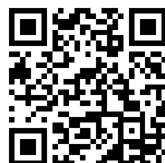
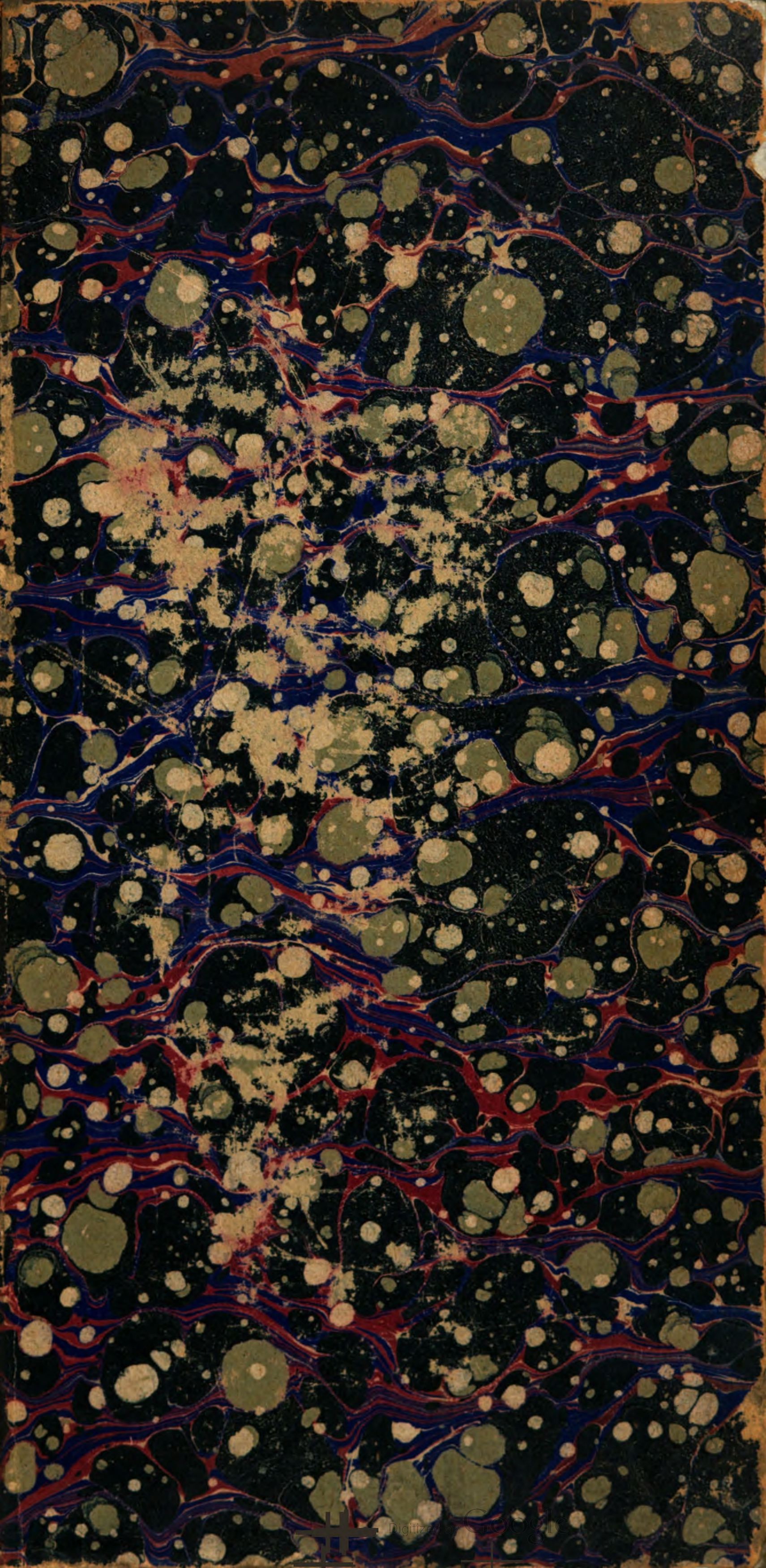




Jahresbericht

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Siebenter Band.

Enthaltend die Chronik der Vereinigung für das Jahr 1898,
die auf der Versammlung in Düsseldorf gehaltenen Vorträge,
sowie:

**Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie
und ihrer Anwendungen.**

Bericht von Emanuel Czuber in Wien.

Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes

von

G. Hauck
in Berlin.

A. Gutzmer
in Jena.





Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1899.

Inhalt.

Erstes Heft.

I. Chronik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

II. Die auf der Versammlung in Düsseldorf gehaltenen Vorträge.

Zweites Heft.

III. Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen.

Berichtigung.

Im Jahresbericht VII, Heft 1, S. 158, Z. 12 v. u. mufs es heifsen „damals“ statt „danach“.

DIE ENTWICKLUNG DER
WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE
UND IHRER ANWENDUNGEN.

BERICHT,

ERSTATTET DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

VON

EMANUEL CZUBER,

O. Ö. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN WIEN

Vorwort.

Als mir die Deutsche Mathematiker-Vereinigung gelegentlich ihrer Versammlung in Wien 1894 die Aufgabe überwies, einen Bericht über die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu verfassen, wurde mir der Wunsch als Richtschnur mitgegeben, ich möge die Litteratur möglichst vollständig bringen. Diesem Wunsche suchte ich nach Zulafs der Umstände gerecht zu werden.

Ich war aber auch bemüht, den Entwicklungsgang der Wahrscheinlichkeitstheorie bis zu ihrem heutigen Stande in knappen Zügen zu zeichnen und dabei auf die Ideenbildungen, also auf die philosophische Seite des Gegenstandes, mehr Aufmerksamkeit zu verwenden, als dies in den mathematischen Schriften in der Regel geschieht. Zugleich schien es mir zweckmäfsig, nicht den historischen Gang, sondern die sachliche Gliederung zum Hauptprincip für die Anordnung meines Berichtes zu machen. Die Anwendungsgebiete sind nur soweit in den Rahmen der Arbeit einbezogen, als es sich um theoretische Fragen handelt.

Durch das alphabetisch geordnete Litteraturverzeichnis*), das Sach-, Namen- und das ausführliche Inhaltsregister hoffe ich mannigfachen Bedürfnissen entgegenzukommen.

Wien, Weihnacht 1898.

E. Czuber.

---

*) Auf dieses Verzeichnis beziehen sich die Hinweise im Texte derart, dafs z. B. mit Gaufs [1]) auf dieses Autors Schrift: Theoria motus corporum coelestium — hingedeutet wird.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Zweiter Abschnitt.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Ergebnisse wiederholter Versuche.

Dritter Abschnitt.

Über die Wahrscheinlichkeit der möglichen Ursachen eines beobachteten Ereignisses und das Schliessen auf künftige Ereignisse.

Vierter Abschnitt.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Beurteilung von zufälligen Ereignissen abhängiger Vor- und Nachteile.

Fünfter Abschnitt.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Zeugenaussagen und auf Entscheidungen von Gerichtshöfen.

Sechster Abschnitt.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Resultate von Messungen.

Seite

Siebenter Abschnitt.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Statistik.

Chronik

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Bericht über die Jahresversammlung zu Düsseldorf

am 19. bis 24. September 1898.

Zu der diesjährigen Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, welche in Gemeinschaft mit der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Düsseldorf in der Zeit vom 19. bis 24. September stattfand, hatte sich auf die Einladung des Vorstandes eine gröfsere Anzahl von Fachgenossen eingefunden. Insbesondere waren nach den in der letzten Versammlung zu Braunschweig gefafsten Beschlüssen auch die belgischen und holländischen Mathematiker zur Teilnahme aufgefordert worden, und diese erfreuten denn auch die Düsseldorfer Versammlung durch ihren Besuch, für den ihnen seitens des Vorsitzenden der Vereinigung der gebührende Dank ausgesprochen wurde.

Seine Aufgabe, „die Jahresversammlung vorzubereiten durch Aufstellung eines ausführlichen Programmes, in welches womöglich Referate über die einzelnen Gebiete der Wissenschaft aufzunehmen sind" (§ 4 der Statuten), hatte der Vorstand unter Beachtung der auf der vorjährigen Versammlung hervorgetretenen Wünsche und mit Rücksicht auf namhafte Untersuchungen der zu erwartenden Gäste dadurch zu erfüllen gesucht, dafs er einerseits die Mannigfaltigkeitslehre, andererseits die mathematische Theorie der modernen Elektrodynamik in den Mittelpunkt der Verhandlungen stellte. In Verbindung mit den bereits auf der Braunschweiger Versammlung eingeleiteten Fragen aus dem Gebiet des numerischen Rechnens und des Hochschulunterrichts lag somit ein reichhaltiges Programm vor, in das sich weiterhin einzelne Mitteilungen einordneten.

Nach mannigfachen Verschiebungen standen zur Verhandlung die folgenden Vorträge:

I. Reine Mathematik:
1. A. Schoenflies (Göttingen): Referat über Curven und Punktmannigfaltigkeiten.
2. E. Jürgens (Aachen): Der Begriff der n-fachen stetigen Mannigfaltigkeit.
3. R. Fricke (Braunschweig): Über eine einfache Gruppe von 504 Operationen.
4. H. Minkowski (Zürich): Ein Kriterium für algebraische Zahlen.

5. G. Landsberg (Heidelberg): Über die Differentialgleichungen des Abel'schen Theorems.
6. K. Hensel (Berlin): Über die Theorie der algebraischen Functionen zweier Variablen.
7. J. Cardinaal (Delft): Über die Anwendung der Caporali'schen Abbildung des Strahlencomplexes zweiten Grades auf die Bewegung eines starren Körpers mit Freiheit vierten Grades.
8. M. Simon (Straſsburg i. E.): Die Geometrie der Zwischenebene. (Ein Beitrag zur elementaren Stereometrie der Lobatschewski'schen Geometrie.)

II. Angewandte Mathematik:

9. W. Wien (Aachen): Referat über die Fragen, welche die translatorische Bewegung des Lichtäthers betreffen.
10. J. Lorentz (Leiden): Correferat hierzu.
11. L. Boltzmann (Wien): a) Über die kinetische Ableitung der Formeln für den Druck des gesättigten Dampfes und für den Dissociationsgrad von Gasen. b) Ableitung der Entropie eines das van der Waals'sche Gesetz befolgenden Gases aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. c) Über Herrn Helm's Ableitung der mechanischen Grundgleichungen aus dem Energieprincip. d) Eine Anfrage betreffend ein Beispiel zu Hertz's Mechanik.
12. M. Planck (Berlin): Die Maxwell'sche Theorie der Elektricität von der mathematischen Seite betrachtet.
13. H. du Bois (Berlin): Die moderne Theorie des Magnetismus.
14. H. Görges (Berlin): Die praktische Berechnung der Dynamomaschinen, insbesondere für Gleichstrom. Mit ausführlicher Erläuterung durch Zeichnungen.
15. A. Sommerfeld (Clausthal): Über das Problem der elektrodynamischen Drahtwellen.
16. A. Tauber (Wien): Induction in rotirenden Körpern.
17. J. Schütz (München): Ein elementares Übungsbeispiel zur Potentialtheorie.
18. Eugen Meyer (Göttingen): Die Umwandlung von Wärme in Arbeit in unseren heutigen Wärmekraftmaschinen.
19. Fr. Schilling (Karlsruhe): Neue kinematische Modelle.
20. F. Deichmüller (Bonn): Über die Gröſse und Figur des scheinbaren Himmelsgewölbes.

III. Numerisches Rechnen:

21. R. Mehmke (Stuttgart): Vorläufiger Bericht der „Tafelcommission".

IV. Pädagogisches:

22. F. Klein (Göttingen): Über Aufgabe und Methode des mathematischen Unterrichts an den Universitäten.
23. H. Schotten (Halle a. S.): Über die Wechselbeziehungen zwischen Universität und höheren Schulen auf dem Gebiete der Mathematik.
24. Franz Meyer (Königsberg i. Pr.): Zur Ökonomie des Denkens in der Elementarmathematik.
25. Pietzker (Nordhausen): Über die Behandlung des Imaginären im Unterricht der höheren Schulen.

V. Allgemeines:

26. Berichte über die Bearbeitung und Herausgabe des Nachlasses von Gauss, erstattet von F. Klein, R. Fricke und E. Wiechert, sowie Mitteilungen über Gauss'sche Vorlesungen von A. Gutzmer.
27. P. Mansion (Gent): Über eine Stelle bei Gauss, welche sich auf nichteuklidische Metrik bezieht.
28. Felix Müller (Loschwitz): Über ein mathematisches Vocabularium in französischer und deutscher Sprache.

Diese Vorträge, welche zum Teil bei den Abteilungen für Physik, für Ingenieurwesen, sowie für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht angemeldet worden waren, wurden teils in Fachsitzungen, teils in gemeinschaftlichen Sitzungen mit den genannten Abteilungen gehalten, und an sie schloſs sich meist eine lebhafte Discussion. Ein Teil der Vorträge wird in dem gegenwärtigen Jahresbericht vollständig zum Abdruck gebracht, während über die weiteren Mitteilungen — soweit dieselben von Mitgliedern der Vereinigung herrühren — die der Redactionscommission zugegangenen Referate nachfolgend veröffentlicht werden.

In der ersten allgemeinen Sitzung der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte hielt auſserdem Herr F. Klein einen Vortrag über „Universität und Technische Hochschule", der in diesem Jahresbericht vollständig zur Wiedergabe gelangt.

Zu den einzelnen Abteilungen des Programmes möge folgendes bemerkt werden:

Die wachsende Bedeutung der Mannigfaltigkeitslehre für die neueren mathematischen Arbeiten lieſs es wünschenswert erscheinen, dieses Gebiet zum Gegenstande eines ausführlichen Referates zu machen. Herr A. Schoenflies hat sich in dankenswerter Weise dieser Aufgabe unterzogen und einen vorläufigen Bericht erstattet. Das ausführliche Referat wird später in dem Jahresbericht erscheinen.

Zu groſsem Danke haben die Herren M. Planck, H. du Bois, H. Görges die Vereinigung durch eine zusammenhängende Gruppe von Vorträgen über die neuere Elektrodynamik verpflichtet. Herr M. Planck behandelte nach einer allgemeinen Einleitung über die principielle Bedeutung der Maxwell'schen Gleichungen insbesondere die Frage nach dem bisherigen Umfang und Inhalt derjenigen Untersuchungen, die in Bezug auf die Integration dieser Gleichungen unter gewissen Vereinfachungen angestellt worden sind. An diesen Vortrag anknüpfend gab Herr H. du Bois eine vergleichende Übersicht über die Theorie des Magnetismus nach Poisson, F. Neumann und Kirchhoff, und charakterisirte dann die neuere Wendung, welche diese Untersuchungen durch die Benutzung einer bestimmten Gruppe der Maxwell'schen Gleichungen durch englische Physiker, insbesondere durch Hopkinson, genommen hat. Hieran schloſs sich endlich der Vortrag des Herrn H. Görges über die allgemeinen Gesichtspunkte, welche die gegenwärtige Technik in der Construction und Verwendung der Dynamomaschinen einnimmt. — Das von der Abteilung für Physik veranlaſste Referat des Herrn W. Wien über die Fragen, welche die translatorische Bewegung des Lichtäthers betreffen, nebst dem sehr eingehenden Correferat des

Herrn J. Lorentz fügten sich dem Programm der Vereinigung aufs beste ein.

Auf der vorjährigen Versammlung war eine Commission, bestehend aus den Herren L. Kiepert, R. Mehmke und W. Voigt, sowie dem jeweiligen Vorsitzenden der Vereinigung als Leiter der Beratungen, zur Prüfung des Planes gewählt worden: wichtige, selten gewordene oder schwer zugängliche Tabellen neu herauszugeben. Im Namen dieser Commission erstattete Herr Mehmke einen kurzen Bericht über die bisherigen Arbeiten, welcher unten im Auszuge wiedergegeben wird. Im Anschlufs hieran erläuterte Herr Kiepert seinen Plan der Einrichtung und Neubearbeitung von Tafeln elliptischer Integrale.

Unter Vorlegung des Manuscriptes eines Vortrages über die Decimalteilung des Winkels von Herrn A. Schülke, der am Erscheinen verhindert war, regte dann Herr A. Gutzmer an, die Frage der Winkelteilung, die auf seine Veranlassung bereits von Herrn F. Rudio in dem Vortrage „über die Aufgaben und die Organisation internationaler mathematischer Congresse“ auf dem ersten Congress zu Zürich 1897 als der internationalen Verständigung würdig und bedürftig gekennzeichnet worden war, eingehend zu prüfen; sein auch von Herrn Schülke acceptirter Vorschlag, die in Rede stehende Angelegenheit der soeben erwähnten Commission zu überweisen, die sich durch Zuwahl von Fachmännern der verschiedenen, bei der Frage der Winkelteilung interessirten Gebiete in geeigneter Weise zu ergänzen haben würde, fand sowohl bei der Versammlung als auch bei der Tafelcommission Zustimmung. Jedenfalls gehört es zu den Aufgaben der Vereinigung, derartige Fragen zu prüfen und einer praktischen Vereinbarung möglichst entgegenzuführen.

Ein in gewissem Sinne hiermit verwandter Gegenstand wurde von Herrn L. Boltzmann in der Abteilung für Physik in Anregung gebracht, nämlich die Anbahnung einer Einigung über die neuere Terminologie der mathematischen Physik, und zwar unter Mitwirkung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Von der Abteilung für Physik sind die Herren L. Boltzmann, M. Planck, E. Riecke und Eilhard Wiedemann zur Prüfung dieser Frage gewählt worden. So sehr die Wichtigkeit der Regelung der Terminologie, der eine internationale Bedeutung auch namentlich für die reine Mathematik zukommt, anerkannt wurde, so machten sich doch auch Bedenken gegen eine unmittelbare Inangriffnahme dieses Vorschlages geltend. Es wurde daher beschlossen, vor Einleitung weiterer Schritte zunächst Herrn Boltzmann um eine ausführliche Darlegung über den Inhalt und Umfang der von ihm erstrebten Mafsnahmen auf physikalischem Gebiet zu ersuchen.

Die Frage des mathematischen Hochschulunterrichtes war auf der Braunschweiger Versammlung durch den Vortrag des Herrn A. Pringsheim „über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht“ (Jahresbericht VI) Gegenstand einer lebhaften Discussion gewesen, die damals aus Mangel an Zeit abgebrochen werden mufste; sie wurde diesmal durch einen Vortrag wieder aufgenommen, in welchem Herr F. Klein seinen Standpunkt, im Gegensatz zu dem des Herrn Pringsheim, ausführlich vertrat. Angesichts der grofsen Bedeutung der Frage des Hochschulunterrichts gelangen die Darlegungen des Herrn F. Klein sowie die Erwiderung des Herrn A. Pringsheim im folgenden zur Wiedergabe; auf die lebhafte Debatte, welche sich weiterhin daran knüpfte, kann an dieser Stelle naturgemäfs nicht näher eingegangen werden.

Die äufserst interessanten Berichte der Herren F. Klein, R. Fricke und E. Wiechert über die Bearbeitung und Herausgabe des Gauss'schen Nachlasses sowie über neues Material für den letzteren (Mitteilung des Herrn Gutzmer) schon hier zu veröffentlichen, müssen wir uns leider versagen. Eine damit in Zusammenhang stehende Mitteilung von Herrn P. Mansion wird indessen in diesem Jahresbericht abgedruckt.

Während der Dauer der Versammlung hatte Herr F. Schilling eine Zusammenstellung von ihm angefertigter, sehr instructiver kinematischer Originalmodelle ausgestellt, nachdem sie durch einen erläuternden Vortrag eingeführt waren. Herr Schilling hat mit den vorgelegten Modellen den Gedanken zu verwirklichen begonnen, der auf der Frankfurter Versammlung unter allseitiger Zustimmung ausgesprochen wurde: es möge eine Sammlung einfacher kinematischer Modelle herausgegeben werden, welche die wichtigsten Mechanismen in der Art zur Anschauung bringen, dafs der mathematische Grundgedanke überall klar hervortritt. (Jahresbericht V, S. 5.)

Die vorgelegten Modelle ordnen sich in vier Gruppen: Erzeugung der allgemeinen cyklischen Curven, specielle Fälle derselben, Modelle von Zwillingskurbelgetrieben, sowie von gewissen Inversoren. Eine ausführliche Beschreibung der Modelle wird voraussichtlich in der Zeitschrift für Mathematik und Physik erscheinen. Um die Kosten bei der Herausgabe der Modelle möglichst zu verringern, gedenkt Herr Schilling, zu einer Subscription zunächst auf die bisher construirten Modelle einladen zu lassen.

Über den Stand der Arbeiten für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften berichteten die Herausgeber derselben, die Herren H. Burkhardt und Franz Meyer. Hiernach ist die Vollendung des ersten Bandes binnen kurzer Zeit zu

erwarten. Es ist dem Vorstande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung gelungen, den Mitgliedern die Encyklopädie zu einem Vorzugspreise zugänglich zu machen.

In Rücksicht auf den Umstand, dafs die nächste Versammlung über die Einladung Beschlufs zu fassen haben wird, welche seitens der Deutschen Mathematiker-Vereinigung im Jahre 1900 dem in Paris tagenden II. internationalen Congress für den dritten, in Deutschland abzuhaltenden zu unterbreiten ist, wurde die Ansicht ausgesprochen, dafs bei der Wahl eines im südwestlichen Deutschland gelegenen Versammlungsortes den Mitgliedern der Vereinigung an den Hochschulen zu Karlsruhe, Freiburg i. Br., Heidelberg und Strafsburg i. E. vorwiegend die Aufgabe zufallen würde, die erforderlichen Vorbereitungen zu treffen.

Was die gröfseren Referate angeht, so wird der Bericht über allgemeine Dynamik von Herrn P. Stäckel in der ursprünglich geplanten Ausführlichkeit in einem der nächsten Bände des Jahresberichts erscheinen. Dagegen wird die Übersicht des Herrn G. Bohlmann über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimalrechnung von Euler bis auf die heutige Zeit bereits in das zweite Heft des VI. Bandes aufgenommen. Es besteht ferner begründete Aussicht, dafs in kurzer Zeit das Referat des Herrn E. Czuber über Wahrscheinlichkeitsrechnung druckfertig sein wird, welches besonderer Umstände wegen der diesjährigen Versammlung noch nicht vorgelegt werden konnte. Ebenso ist zu erwarten, dafs Herr A. Schoenflies sein Referat über Curven und Punktmannigfaltigkeiten baldigst vollenden wird. Aufserdem befinden sich noch in Bearbeitung: ein Referat über die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik von Herrn K. Heun, ein Bericht über numerische Auflösung von Gleichungen von Herrn R. Haufsner, ein Referat über die Theorie der endlichen Gruppen von Herrn E. Steinitz und ein Bericht über graphische Methoden von Herrn R. Mehmke. Endlich hat Herr Ernst Kötter, welcher seine ausführliche Darstellung der Entwickelung der synthetischen Geometrie aus äufseren Gründen in zwei Teile zerlegen mufste, den mit dem Jahre 1847 beginnenden zweiten Teil für einen späteren Band der Jahresberichte zu liefern versprochen.

Für die nächste Jahresversammlung, welche im September 1899 zu München tagen wird, hat der Vorstand bereits Schritte gethan, um — wie bisher — neben der reinen ein Gebiet der angewandten Mathematik in den Mittelpunkt der Tagesordnung zu stellen, und zwar ist vorläufig ein ausführliches Referat über die modernen Methoden zur statischen Berechnung der Bauconstructionen in Aus-

sicht genommen. Aus der reinen Mathematik wird der Vorstand in erster Linie zusammenfassende Berichte über die neuere Entwickelung der Variationsrechnung und der Theorie der Differentialgleichungen zu gewinnen suchen.

Wenn auch nur ein Teil dieser Pläne zur Verwirklichung gelangen sollte, so verspricht doch das Programm der kommenden Versammlung ein reichhaltiges und interessantes zu werden und mehr und mehr den der Entstehung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Grunde liegenden Gedanken hervortreten zu lassen!

Geschäftlicher Bericht.

1. Die Geschäftssitzung der Vereinigung fand unter Leitung ihres Vorsitzenden, Herrn A. Voss, am 22. September 1898 statt. Zunächst erstattete der Schrift- und Kassenführer, Herr A. Gutzmer, einen vorläufigen Bericht über die Vermögenslage der Vereinigung, die als nicht ungünstig zu bezeichnen ist, wie der unter dem 31. October 1898 abgeschlossene und von den Revisoren geprüfte Kassenbericht (s. unten) erkennen läfst. Indessen ist noch eine verhältnismäfsig grofse Zahl von Mitgliedern mit den Jahresbeiträgen im Rückstande.

2. Über den gegenwärtigen Stand des Druckes der Jahresberichte gab Herr Gutzmer gleichfalls einen kurzen Bericht, aus dem folgendes angeführt werden möge: Der Druck des 2. Heftes von Band V (Referat des Herrn E. Kötter) hat sich besonderer Umstände wegen sehr verzögert; es konnte erst eine Lieferung bis zur diesjährigen Versammlung fertiggestellt werden. Das 2. Heft des VI. Bandes wird zunächst die beiden Referate des Herrn Finsterwalder und alsdann das Referat des Herrn Bohlmann enthalten. Was die übrigen Referate betrifft, so sind die Mitteilungen, welche der Herr Vorsitzende hierüber machte, bereits in dem vorstehenden allgemeinen Bericht wiedergegeben worden.

Es sei hier noch betont, dafs naturgemäfs die Redaction eine Verantwortlichkeit für den Inhalt der Beiträge in den Jahresberichten ebensowenig übernehmen kann wie für Verzögerungen oder Mehrausgaben in der Drucklegung, welche durch Unfertigkeit der Druckvorlagen verursacht werden.

3. Die Vereinigung verlor ihre Mitglieder K. Fink und H. Schapira durch den Tod; dem ersteren ist ein Nachruf gewidmet, den Herr L. Fleischmann-Tübingen der Vereinigung in dankenswerter Weise zur Verfügung gestellt hat. Ferner enthält der gegenwärtige Jahresbericht einen Auszug aus der Gedächtnisrede auf Ludwig Seidel, welche Herr F. Lindemann in der Akademie der Wissenschaften zu München gehalten hat. Ein Nekrolog für Schapira wird voraussichtlich im nächsten Jahresberichte veröffentlicht werden können.

4. Bei Gelegenheit ihrer diesjährigen Tagung liefs die Vereinigung durch eine Abordnung, bestehend aus den Herren: A. Voss, G. Hauck und A. Gutzmer, dem hochverdienten Director der Düsseldorfer Sternwarte, Herrn Geheimen Regierungsrat Professor Dr. Robert Luther, ihre Verehrung aussprechen.

5. Namens der holländischen Mathematiker und als Erwiederung der Einladung zur Düsseldorfer Versammlung forderte Herr Cardinaal die deutschen Fachgenossen zum Besuch der Versammlung holländischer Naturforscher und Ärzte auf, welche in der Osterwoche des Jahres 1899 zu Haarlem stattfinden wird: hoffentlich leisten recht viele Fachgenossen dieser freundlichen Einladung Folge.

6. Die Wahlen führten zu folgendem Ergebnis: zu Kassenrevisoren wurden wieder ernannt die Herren G. Cantor und H. Grafsmann in Halle a. S.; an Stelle des Ende 1898 statutengemäfs ausscheidenden Herrn F. Klein wurde Herr D. Hilbert-Göttingen in den Vorstand gewählt. Der Schriftführer, Herr A. Gutzmer-Halle a. S., dessen Amtszeit gleichfalls Ende 1898 abläuft, wurde auf Grund des § 3 der Statuten wiedergewählt. Der Vorstand wird demnach für das Jahr 1899 aus folgenden Herren bestehen: G. Hauck (1899), A. Vofs (1899), K. Hensel (1900), M. Noether (1900), A. Gutzmer (1901), D. Hilbert (1901), wobei die zugefügten Zahlen das Jahr bezeichnen, an dessen Ende der Betreffende statutengemäfs aus dem Vorstande ausscheidet.

7. Die Wahlen innerhalb des Vorstandes für das Jahr 1899 ergaben folgendes Resultat: es wurden gewählt

zum Vorsitzenden: Herr M. Noether-Erlangen;
zum Schrift- und Kassenführer: Herr A. Gutzmer-Halle a. S.;
zur Redactionscommission für den Jahresbericht: Herr A. Gutzmer und Herr G. Hauck-Berlin.

8. Um die Führung der Geschäfte der Vereinigung nach Möglichkeit dem Schriftführer zu erleichtern, wurde dieser ermächtigt, sich einer geeigneten Hilfskraft auf Kosten der Vereinigung zu bedienen. Aus dem gleichen Grunde wurden die in Düsseldorf als Vertreter der Vereinigung in den wissenschaftlichen Ausschufs der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte gewählten Herren G. Hauck und A. Vofs gebeten, für eine engere und dauernde Bezugnahme zwischen der genannten Gesellschaft und der Vereinigung zu wirken; denn erfahrungsgemäfs erwächst dem Schriftführer durch die in den Ortsausschüssen der jeweiligen Versammlungen der Naturforschergesellschaft fehlende Continuität eine erhebliche Arbeitslast.

9. Auf Anregung des Herrn F. Klein wurde ferner beschlossen, den allgemeinen Bericht über den Verlauf der Jahresversammlungen unmittelbar nach Beendigung derselben zum Druck und zur Versendung zu bringen. Demgemäfs gelangt die Chronik von nun an bereits vor dem Abschlufs des betreffenden Jahresberichts an die Mitglieder zur Ausgabe.

10. Im Interesse eines genauen Mitgliederverzeichnisses bitten wir, von jeder Änderung der Adresse dem Schriftführer Mitteilung machen zu wollen.

Kassenbericht.

Nach dem Stande vom 31. October 1898.

Einnahmen.		ℳ	₰	Ausgaben.	ℳ	₰
Kassenbestand am 1. Januar 1898		380	89	Drucksachen	23	50
Jahresbeiträge der Mitglieder:				Papier, Utensilien, Buchbinder	14	10
1 Beitrag für 1893	ℳ 2,00			Schreibarbeiten	32	50
2 Beiträge für 1894	„ 4,00			Postporti	89	29
5 „ „ 1895	„ 10,00			Honorar für das Referat im Jahresbericht V, 2, Lief. 1	210	00
21 „ „ 1896	„ 42,00			Angekauft: nom. 1300 ℳ 3 % Reichsanleihe à 93,70 %	1233	65
36 „ „ 1897	„ 72,00			Barbestand	406	10
106½ „ „ 1898	„ 213,00					
10 „ „ 1899	„ 20,00					
3 „ „ 1900	„ 6,00	369	00			
24 Ablösungen der Jahresbeiträge		720	00			
Honorar für Jahresbericht VI, Heft 1		266	25			
„ „ „ V, Heft 2, Lief. 1		240	00			
½ Jahr Zinsen von 4200 ℳ 3% Reichsanleihe		63	00			
Summe		2039	14	Summe	2039	14

Vermögensbestand: nom. 5500 ℳ 3 % Reichsanleihe, Ankaufswert: ℳ 5287,65.
Barer Kassenbestand . . . . „ 406,10.

A. Gutzmer, als Kassenführer.
G. Cantor, H. Grafsmann, als Revisoren.

Mitglieder-Verzeichnis

nach dem Stande vom 30. November 1898.

Abbe, C., Meteorological Institute, Washington.
Ackermann-Teubner, Alfred, Verlagsbuchhändler, Leipzig, Poststr. 3.
Adami, Fr., Gymnasialprofessor, Hof.
Ahrens, W., Lehrer an der Baugewerkschule, Magdeburg, Badestr. 1.
Aley, R. J., Professor at the Indiana State University, Bloomington, Indiana, U. S. A.
Ambronn, L., Professor an der Universität, Göttingen.
Amthor, A., Hannover, Königstr. 40.
Archenhold, F. S., Director der Treptow-Sternwarte bei Berlin.
Bacharach, J., Professor an der Industrieschule, Nürnberg.
10. Bäcklund, A. V., Professor an der Universität, Lund (Schweden).
Baker, H. F., Fellow and Lecturer at St. John's College, Cambridge (England).
Bauer, G., Professor an der Universität, München, Türkenstr. 29.
Baur, L., Director der Grofsh. Realschule, Heppenheim a. d. B., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Darmstadt; Heppenheim a. d. B.
Bauschinger, J., Professor an der Universität, Berlin SW., Lindenstr. 91.
Beck, A., Professor am Polytechnicum, Riga.
Beke, E., Professor, Privatdocent an der Universität, Budapest, Damjanichgasse 50.
Beman, W. W., Professor at the University, Ann Arbor, Mich. U. S. A., 61 East Kingsley Street.
Biermann, O., Professor an der Technischen Hochschule, Brünn (Mähren), Falkensteinergasse 5.
Binder, W., Professor an der Fachschule für Maschinenwesen, Wiener-Neustadt.
20. Bjerknes, Professor an der Universität, Christiania.
Blaschke, E., Privatdocent an der Universität, Wien XVIII, Gürtelstr. 1.
Blümcke, Ad, Reallehrer, Nürnberg, Glockenhofstr. 32.
Bobek, K., Professor an der deutschen Universität, Prag.
Bock, A, Reallehrer an der Realschule, Rothenburg a. d. T.
Böger, R., Oberlehrer an der Realschule, Hamburg, Sophien-Allee 31.
Boehm, Karl, Heidelberg, Theaterstr. 9.
Börsch, A., Professor, Abteilungsvorsteher am Kgl. Geodätischen Institut, Potsdam, Mauerstr. 6.
Böttcher, J. E., Professor, Rector des Realgymnasiums, Leipzig, Zeitzerstr. 10.
Bohlmann, G., Privatdocent an der Universität, Göttingen, Bertheaustr. 1.
30. Bois, H. du, Professor an der Universität, Berlin NW, Schiffbauerdamm 21.
Boltzmann, L., Professor an der Universität, Wien IX, Türkenstr. 3.
Bolza, O., Professor at the University, Chicago III, Woodtown avenue 5810.
Braunmühl, A. v., Professor an der Technischen Hochschule, München, Schellingstr. 53.
Brendel, M., Professor an der Universität, Göttingen.
Bretschneider, W., Professor an der Realanstalt und Docent an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Senefelderstr. 38 A.

Brill, A. v., Professor an der Universität, Tübingen.
Brix, W., Berlin W., Friedrich Wilhelm-Strafse 9.
Brückner, Max, Oberlehrer am Gymnasium, Bautzen, Paulistr. 31.
Brunn, H., Privatdocent an der Universität, Bibliothekar an der Technischen Hochschule, München, Giselastr. 27.
40. Bruns, H., Professor an der Universität, Leipzig, Sternwarte.
Burkhardt, H., Professor an der Universität, Zürich V, Kreuzplatz 1.
Burmester, L., Professor an der Technischen Hochschule, München, Barerstr. 69.
Busche, E., Oberlehrer an der Hansaschule, Bergedorf bei Hamburg.
Cantor, G., Professor an der Universität, Halle a. S., Händelstr. 13.
Cantor, M., Professor an der Universität, Heidelberg, Gaisbergstr. 15.
Cardinaal, J., Professor am Polytechnicum, Delft (Holland), Orangeplantage 35.
Cranz, C., Professor an der Oberrealschule und Privatdocent an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Johannesstr. 17.
Crawley, E. S., Professor at the University, Philadelphia, Pa.
Crayen, Wilhelm, Verlagsbuchhändler (G. J. Göschen'sche Verlagshandlung), Leipzig, Johannisgasse 6.
50. Cremona, L., Professor an der R. Scuola d'applicazione per gl' ingegneri, Rom, Piazza S. Pietro in Vincoli 5.
Czuber, E., Professor an der Technischen Hochschule, Wien III, Neulinggasse 3.
Dalwigk, F. v., Privatdocent an der Universität, Marburg.
Dantscher v. Kollesberg, V., Professor an der Universität, Graz, Rechbauerstr. 29.
Dedekind, R., Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Kaiser Wilhelm-Strafse 87.
Denizot, A., Assistent an der Technischen Hochschule, Aachen, Mauerstr. 12.
Dickstein, S., Professor, Warschau, Marzalkowskastr. 117.
Dingeldey, F., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Grüner Weg 13.
Dobriner, H., Oberlehrer am Philantropin, Frankfurt a. M., Eiserne Hand 18.
Döhlemann, K., Privatdocent an der Universität, München, Von der Tann-Str. 23.
60. Doergens, R., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin NW., Spenerstr. 2.
Doležal, E., Professor an der Technischen Hochschule, Wien IV, Taubstummengasse 10.
Domsch, P. R., Lehrer an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.
Dyck, W., Professor an der Technischen Hochschule, München, Hildegardstr. 1½.
Dziobek, O., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin; Charlottenburg, Berlinerstr. 55.
Eberhard, V., Professor an der Universität, Halle a. S., Jägerplatz 7.
Ellemann, Fr., Mittelschullehrer, Leopoldshall-Stafsfurt.
Emmerich, A., Oberlehrer am Gymnasium, Mülheim a. d. Ruhr.
Engel, F., Professor an der Universität, Leipzig, An der Pleifse 5.
Escherich, G. v., Professor an der Universität, Wien IX, Dietrichsteingasse 5.
70. Färber, C., Oberlehrer an der Luisenstädtischen Oberrealschule, Berlin SO., Fichtestr. 30.
Fehr, H., Privatdocent an der Universität, Genf, Rue Gevray 19.
Fiedler, Ernst, Professor an der Cantonschule, Zürich-Hottingen, Englisches Viertel 57.

Fiedler, Wilhelm, Professor am Polytechnicum, Zürich, Klosbachstr. 79.
Finger, J., Professor an der Technischen Hochschule, Wien IV, Alleegasse 35.
Finsterwalder, S., Professor an der Technischen Hochschule, München, Leopoldstr. 51.
Fischer, Karl, Hülfsarbeiter im Bureau des Kgl. Ausschusses zur Untersuchung der Hochwasserverhältnisse, Berlin SW., Puttkamerstr. 10.
Fischer, K., Assistent an der Technischen Hochschule, München.
Fisher, George Egbert, Professor at the University, Philadelphia Pa.
Flatt, R., Privatdocent an der Universität, Basel, Margaretenstr. 77.
80. Föppl, A., Professor an der Technischen Hochschule, München.
Franz, J., Professor an der Universität, Breslau.
Frege, G., Professor an der Universität, Jena.
Fricke, R., Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Kaiser Wilhelm-Strafse 17.
Friesendorff, Th., Oberlehrer an den reformirten Kirchenschulen, Assistent am Institut der Wegebauingenieure, St. Petersburg.
Frobenius, G., Professor an der Universität, Berlin; Charlottenburg, Leibnizstr. 70.
Fuchs, L., Professor an der Universität, Berlin W., Rankestr. 14.
Fuhrmann, A., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Circusstr. 39.
Galdeano, Zoel Ga. de, Professor an der Universität, Zaragoza (Spanien), Cóso 99, 3°.
Gascó, Luis Gonzaga, Professor an der Universität, Valencia (Spanien), Hernán Cortés 25.
90. Geer, P. van, Professor an der Universität, Leiden (Holland), Rapenburg 81.
Gegenbauer, L., Professor an der Universität, Wien IX, Frankstr. 1.
Gerbaldi, F., Professor an der Universität, Palermo, Via Gaetano Daita 11.
Gerhardt, K. J., Gymnasial-Director a. D., Halle a. S., Magdeburgerstr. 58.
Godt, W., Oberlehrer am Katharineum, Lübeck, Geninerstr. 29.
Görges, H., Ingenieur, Berlin W., Fasanenstr. 48.
Götting, E., Oberlehrer am Gymnasium, Göttingen.
Gordan, P., Professor an der Universität, Erlangen.
Graefe, F., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Soderstrafse 75.
Graf, J. H., Professor an der Universität, Bern, Wylerstr. 10.
100. Grafsmann, H., Oberlehrer an der Latina, Halle a. S., Niemeyerstr. 23.
Greenhill, A. G., Professor am Artillery College Woolwich, London W. C. 10 New Inn, Strand.
Grübler, M., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin; Charlottenburg, Schillerstr. 113.
Günther, S., Professor an der Technischen Hochschule, München, Akademiestr. 5.
Gundelfinger, S., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Grüner Weg 37.
Gutzmer, A., Privatdocent an der Universität, Halle a. S., Reichardtstr. 2.
Gysel, Julius, Director des Kantons-Gymnasiums, Schaffhausen, Tannergäfschen 13.
Haas, K., Gymnasialprofessor, Wien VI, Matrosengasse 8.
Haberland, M., Realschullehrer, Neustrelitz.
Haebler, Th., Professor an der Fürstenschule, Grimma i. S.
110. Haenlein, J., Oberlehrer am Humboldt-Gymnasium, Berlin NW., Spenerstrafse 34.

Haentzschel, E., Oberlehrer am Köllnischen Gymnasium und Privatdocent an der Technischen Hochschule, Berlin W., Gleditschstr. 43.
Hagen, J., Professor und Director der Sternwarte am Georgetown College, Washington D. C.
Halsted, George Bruce, Professor at the University, Austin, Texas U. S. A., 2407 Guadalupe Street.
Hamburger, M., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin N., Karlstr. 28.
Hancock, H., Instructor at the University, Chicago Ill.
Hartwig, E., Director der Sternwarte, Bamberg.
Hauck, G., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin W., Bülowstraſse 6.
Hausdorff, F., Privatdocent an der Universität, Leipzig, Nordstr. 58.
Hauſsner, R., Professor an der Universität, Gieſsen, Frankfurterstr. 11.
120. Hecht, Professor am Melanchthon-Gymnasium, Nürnberg, Nunnenbeckstraſse 19.
Heffter, L., Professor an der Universität, Bonn, Goethestr. 17.
Helm, G., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Winkelmannstr. 27.
Helmert, F. R., Professor an der Universität, Berlin; Director des Geodätischen Instituts, Potsdam.
Henneberg, L., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Hochstr. 58.
Henneke, Professor am Gymnasium, Preuſsisch-Friedland.
Henrici, O., Professor am City and Guilds of London Institute, Clarendon Road 34, Notting Hill, London W.
Hensel, K., Professor an der Universität, Berlin W., Kurfürstendamm 236.
Hermann, A., Éditeur, membre de la Société mathématique de France, Paris, rue de la Sorbonne 8.
Hermes, J., Professor am Gymnasium, Lingen a. d. Ems.
130. Hermes, O., Professor an der Artillerieschule, Steglitz, Lindenstr. 35.
Hertzer, H., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin W., Frobenstr. 14.
Heſs, E., Professor an der Universität, Marburg, Wörthstr. 24.
Hettner, G., Professor an der Technischen Hochschule und an der Universität, Berlin W., Kaiserin Augusta-Str. 58.
Heun, K., Oberlehrer an der ersten Realschule, Berlin SW., Mittenwalderstraſse 17.
Heymann, Woldemar, Professor an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz, Promenadenstr. 36.
Hilbert, D., Professor an der Universität, Göttingen, Wilhelm Weber-Straſse 29.
Hirsch, A., Professor, Assistent am Polytechnicum, Zürich, Plattenstr. 14.
Hölder, O., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr. (Vom 1. 4. 99: Leipzig.)
Holländer, E., Oberlehrer am Gymnasium, Norden (Ostfriesland).
140. Holzmüller, G., Professor, Director a. D., Hagen i. W.
Hoppe, R., Professor an der Universität, Berlin S., Prinzenstr. 69.
Hoppe, R. H., Lehrer an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.
Horn, J., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Berlin; Charlottenburg, Schillerstr. 34.
Hoſsfeld, C., Oberlehrer am Gymnasium, Eisenach, Fahrzeugstr. 5.
Hurwitz, A., Professor am Polytechnicum. Zürich, Falkengasse 15.
Hurwitz, J., Privatdocent an der Universität, Basel, Allschwilerstr. 3.
Järisch, P., Oberlehrer am Johanneum, Hamburg-Eilbeck, Papenstr. 56.

Jahnke, E.. Oberlehrer an der achten Realschule, Berlin; Wilmersdorf, Pariserstr. 55.
Jolles, St., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin; Halensee bei Berlin, Boothstr. 2.
150. Joukovsky, N., Professor an der Universität, Moskau.
Jürgens, E., Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Ludwigsallee 79.
Junker, F., Reallehrer, Urach (Württemberg).
Keck, L., Professor am Realgymnasium, Nürnberg.
Kepinski, Stanislaus, Professor an der Universität, Krakau, Retoryka 5.
Kerschensteiner, G., Stadtschulrat, München, Lilienstr. 66.
Kiepert, L., Professor an der Technischen Hochschule, Hannover, Oeltzenstr. 1 D.
Killing, W., Professor an der Akademie, Münster i. W., Salzstr. 21 a.
Kirsch, E. G., Professor an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.
Kleiber, J., Hauptlehrer an der Handelsschule, München, Herrenstr. 7.
160. Klein, Felix, Professor an der Universität, Göttingen, Wilhelm Weber-Strafse 3.
Klein, Georg, Rector des Realgymnasiums, München, Ludwigstr. 14.
Klug, L., Privatdocent an der Universität, Klausenburg (Ungarn).
Kneser, A., Professor an der Universität, Dorpat, Gartenstr. 24.
Knoblauch, J., Professor an der Universität, Berlin W., Karlsbad 12.
Kobald, E., Professor an der Bergakademie, Leoben (Steiermark).
Köhler, C., Professor an der Universität, Heidelberg, Treitschkestr. 3.
König, J., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest.
Koenigsberger, L., Professor an der Universität, Heidelberg, Kaiserstr.
Köpcke, A., Oberlehrer an der Realschule, Ottensen, Holländische Reihe 4.
170. Kötter, E., Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Lousbergstrafse 49.
Kötter, F., Professor an der Bergakademie, Berlin S., Annenstr. 1.
Kohn, Gustav, Professor an der Universität, Wien I, Schottenring 15.
Kollert, J. A., Lehrer an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz, Weststr. 14.
Kortum, H., Professor an der Universität, Bonn, Meckenheimerstr. 136.
Kostka, C., Professor am Gymnasium, Insterburg.
Kraft, F., Privatdocent an der Universität, Zürich IV, Bolleystr. 5.
Krause, M., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Kaitzerstrafse 12.
Krazer, A., Professor an der Universität, Strafsburg i. E., Nikolausring 3.
Kreutz, H., Professor an der Universität, Kiel, Niemannsweg 103.
180. Krüger, L., Professor, Abteilungsvorsteher am Kgl. Geodätischen Institut, Potsdam.
Kühne, H., Oberlehrer an den Maschinenbauschulen, Dortmund, Kaiserstr. 102.
Küpper, C., Professor an der deutschen Technischen Hochschule, Prag; Kgl. Weinberge, Villa Brosche.
Kürschak, J., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest II, Albrechtstr. 14.
Kullrich, Oberlehrer am Reformgymnasium, Schöneberg bei Berlin, Erdmannstr. 11.
Kutta W., Assistent an der Technischen Hochschule, München.
Lacombe, M., Professor am Polytechnicum, Zürich, Kreuzplatz 1.
Lampe, E., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin W., Kurfürstenstr. 139.
Landsberg, G., Professor an der Universität, Heidelberg, Sandgasse 5.
Laugel, L., Mitglied der Société mathématique de France, Châlet des Bruyères, Golfe Jouan, Alpes Maritimes.

190. Leesekamp, E. A., Professor an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.
Leitzmann, H., Privatgelehrter, Giebichenstein, Ziethenstr. 28.
Lerch, M., Professor an der Universität, Freiburg (Schweiz).
Levi-Civita, T., Professor an der Universität, Padua (Italien), Via S. Gaetano 3394.
Lie, S., Professor an der Universität, Christiania (Norwegen).
Liebmann, H., Assistent an der mathematischen Modellsammlung der Universität, Göttingen, Wöhlerstr. 10.
Lilienthal, R. v., Professor an der Akademie, Münster i. W., Blumenstr. 11.
Lindemann, F., Professor an der Universität, München, Franz Joseph-Strafse 12.
Linsenbarth, H., Oberlehrer an der ersten Realschule, Berlin N., Lothringerstr. 76.
Lipschitz, R., Professor an der Universität, Bonn, Königstr. 34.
200. Loewy, A., Privatdocent an der Universität, Freiburg i. B., Thurnseestr. 4.
Lommel, E. v., Professor an der Universität, München, Kaiserstr. 10½.
London, Franz, Professor an der Universität, Breslau.
Lorenz, Franz, Professor an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz, Reichsstr. 33.
Lorenz, Hans, Professor an der Universität, Halle a. S., Mühlweg 26.
Lorey, W., Gymnasiallehrer, Quakenbrück.
Loria, G., Professor an der Universität, Genua, Passo Caffaro 1.
Lüroth, J., Professor an der Universität, Freiburg i. B., Mozartstr. 10.
Mackay, John S., Edinburgh, Northumberland Street 69.
Mandl, M., Professor an der Realschule, Profsnitz in Mähren.
210. Mangoldt, H. v., Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Vaelserstr. 148.
Mansion, Paul, Professor an der Universität, Gent (Belgien), Quai des Dominicains 6.
Marcuse, A., Privatdocent an der Universität, Berlin W., Matthäikirchstr. 12.
Marxsen, S., Cand. math., Hohenhütten bei Preetz.
Maschke, H., Professor at the University, Chicago Ill., Woodtown Avenue 5810.
Maurer, L., Professor an der Universität, Tübingen, Uhlandstr. 22.
Mayer, A., Professor an der Universität, Leipzig, Königstr. 1.
Mehmke, R., Professor an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Immenhoferstr. 4.
Metzler, W., Professor at the University, Syracuse, N. Y.
Meyer, Eugen, Professor an der Universität, Göttingen.
220. Meyer, Franz, Professor an der Universität, Königsberg i. Pr., Mittel-Tragheim 39.
Meyer, Friedrich, Professor am städtischen Gymnasium, Halle a. S., Reichardtstrafse 19.
Meyer, Georg, Oberlehrer an der Realschule, Bremen, Georgstr. 56.
Meyer, Gustav Ferdinand, Professor, München, Amalienstr. 80, 3.
Minkowski, H., Professor am Polytechnicum, Zürich, Mittelstr. 12.
Mittag-Leffler, G., Professor an der Universität, Stockholm, Djursholm.
Moore, E. H., Professor at the University, Chicago Ill.
Müller, E., Oberlehrer an der Kgl. Baugewerkschule, Königsberg i. Pr., Dohnastr. 4.
Müller, Felix, Professor, Oberloschwitz bei Dresden, Heinrichstr. 12.
Müller, Reinhold, Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Hagenstr. 2.
230. Müller, Richard, Oberlehrer am Kaiser Wilhelms-Realgymnasium und Privatdocent an der Technischen Hochschule, Berlin SW., Zossenerstr. 39.

Muth, P., Privatgelehrter, Osthofen (Rheinhessen).
Naetsch, E., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Dresden, Gluckstr. 6.
Nagaoka, H., Professor an der Universität, Tokyo (Japan).
Nath, M., Oberlehrer am Luisen-Gymnasium, Berlin NW., Gerhardstr. 8.
Netto, E., Professor an der Universität, Giefsen, Süd-Anlage 13.
Neuberg, J., Professor an der Universität, Lüttich, Rue Sclessin 6.
Neumann, C., Professor an der Universität, Leipzig, Querstr. 10—12.
Noether, M., Professor an der Universität, Erlangen, Nürnbergerstr. 32.
Oettingen, A. v., Professor an der Universität, Leipzig, Mozartstr. 1.
240. Papperitz, E., Professor an der Bergakademie, Freiberg i. S., Weisbachstrafse 5.
Pasch, M., Professor an der Universität, Giefsen, Alicestr. 31.
Pelz, C., Professor an der deutschen Technischen Hochschule, Prag.
Peschka, G. A. V., Professor an der Technischen Hochschule, Wien III, Joaquingasse 2.
Pick, G., Professor an der deutschen Universität, Prag; Kgl. Weinberge 754.
Pierpont, James, Professor at the Yale University, New Haven, Conn. U. S. A., Howard Avenue 357.
Pietzker, Professor am Gymnasium, Nordhausen.
Piltz, A., Jena.
Planck, M., Professor an der Universität, Berlin W., Tauenzienstr. 18a.
Pochhammer, L., Professor an der Universität, Kiel, Niemannsweg 59.
250. Pockels, F., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Lüttichaustrafse 28.
Pokrowsky, P., Professor an der Universität, Kiew.
Pringsheim, A., Professor an der Universität, München, Arcisstr. 12.
Prümm, E., Cand. phys. et math., Göttingen, Reinhäuser Chaussee 38.
Prym, F., Professor an der Universität, Würzburg.
Raaij, W. H. L. Janssen van, Haarlem (Holland).
Rados, G., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest VII, Csengery Gasse 1.
Rausenberger, O., Professor an der Musterschule, Frankfurt a. M., Heisterstr. 8.
Recknagel, G., Rector des Realgymnasiums, Augsburg.
Reich, Karl, Professor am K. K. Technologischen Gewerbe-Museum, Docent an der Technischen Hochschule, Wien IX, Michelbeurngasse 2.
260. Reinhardt, C., Professor an der Fürstenschule, Meifsen, Freiheit 16.
Réthy, M., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest, Soraksárer Gasse 18.
Reuschle, C., Professor an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Lerchenstr. 5.
Reye, Th., Professor an der Universität, Strafsburg i. E., Brantplatz 3.
Richarz, F., Professor an der Universität, Greifswald.
Richter, Oberlehrer am Gymnasium, Quedlinburg, Kaiserstr. 38.
Riecke, E., Professor an der Universität, Göttingen.
Rinecker, Gymnasialprofessor, Regensburg.
Ritter, A., Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Kasernenstrafse 36.
Rodenberg, C., Professor an der Technischen Hochschule, Hannover, Oeltzenstr. 2.
270. Rogel, F., Ingenieur, Barmen, Gewerbeschulstr. 25 b.
Rohn, K., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden.
Rosanes, J., Professor an der Universität, Breslau, Schweidnitzer Stadtgraben 16 b.

Rosenow, H., Director der neunten Realschule, Berlin N., Badstr. 22.
Rudel, K., Professor an der Industrieschule, Nürnberg, L.-Feuerbach-Str. 13.
Rudio, F., Professor am Polytechnicum, Zürich, Feldeggstr. 64.
Runge, C., Professor an der Technischen Hochschule, Hannover, Körnerstraſse 19 a.
Saalschütz, L., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr.
Scheffers, G., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Heinrichstr. 9.
Scheibner, W., Professor an der Universität, Leipzig, Schletterstr. 8.
280. Schell, W., Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Kriegstraſse 52.
Schendel, L., Halensee bei Berlin, Kronprinzendamm 3.
Schilling, C., Director der Navigationsschule, Bremen.
Schilling, F., Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Ludwig Wilhelm-Straſse 19.
Schimpf, E., Oberlehrer am Gymnasium, Bochum, Blücherstr. 46.
Schlegel, V., Professor an der Gewerbeschule, Hagen i. W., Volmestraſse 62.
Schleiermacher, L., Professor an der Forstschule, Aschaffenburg, Glattbacherstr. 2.
Schlesinger, L., Professor an der Universität, Klausenburg (Ungarn), S'amzaljutcza 104.
Schlömilch, O., Geheimrat, Dresden, Liebigstr. 14.
Schmidt, Fr., Baumeister, Budapest V, Rudolfsquai 8.
290. Schmidt, M., Professor an der Technischen Hochschule, München, Heſsstraſse 32.
Schober, Karl, Oberrealschulprofessor und Universitätsdocent, Innsbruck.
Schoenflies, A., Professor an der Universität, Göttingen, Friedländer Weg 46.
Scholz, P. G., Professor am Friedrichs-Realgymnasium, Berlin; Steglitz, Fichtestr. 34.
Schorr, R., Observator der Sternwarte, Hamburg.
Schotten, H., Director der städtischen Oberrealschule, Halle a. S.
Schottky, F., Professor an der Universität, Marburg, Barfüſserthor 14.
Schröder, E., Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Gottesauerstr. 9.
Schröder, Th., Professor am Melanchthon-Gymnasium, Nürnberg, Sulzbacherstr. 7.
Schubert, H., Professor am Johanneum, Hamburg, Steindamm 107.
300. Schülke, A., Oberlehrer, Osterode i. Ostpr.
Schütz, J. R., Gern bei München, Rupprechtstr. 41.
Schultz, E., Oberlehrer am Realgymnasium, Stettin, Poelitzerstr. 9.
Schumacher, H., Reallehrer an der Realschule, Neustadt a. H.
Schumacher, R., Reallehrer an der Realschule, Augsburg, Bismarckstraſse 11.
Schur, F., Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Linkenheimerstr. 15.
Schur, W., Professor an der Universität, Göttingen.
Schwalbe, B., Professor, Director des Dorotheenstädtischen Realgymnasiums, Berlin NW., Georgenstr. 30—31.
Schwarz, H. A., Professor an der Universität, Berlin; Villencolonie Grunewald, Boothstr. 33.
Schwatt, J., Professor at the University, Philadelphia Pa.
310. Schwering, K., Professor, Director des Gymnasiums, Düren.
Scott, Charlotte Angas, Professor at the College, Bryn Mawr, Pa.
Seeliger, H., Professor an der Universität, München, Sternwarte.

Segre, C., Professor an der Universität, Turin (Italien), Corso Vittorio Emanuele 85.
Selivanoff, D., Professor am Technologischen Institut und Privatdocent an der Universität, St. Petersburg, Fontanka 116 log. 16.
Selling, E., Professor an der Universität, Würzburg, Obere Frühlingstr. 4.
Servus, H., Oberlehrer am Friedrichs-Realgymnasium und Privatdocent an der Technischen Hochschule, Berlin; Charlottenburg, Spandauerstr. 9.
Sidler, G., Professor an der Universität, Bern, Christoffelgasse 4.
Siebert, A., Oberlehrer des Cadettencorps, Grofs-Lichterfelde, Potsdamerstrafse 61.
Sievert, H., Professor am Gymnasium, Bayreuth.
320. Simon, M., Professor am Lyceum, Strafsburg i. E., Lessingstr. 5.
Sintzow, D., Privatdocent an der Universität, Kasan (Rufsland).
Smith, D. E., Professor at the Michigan State Normal College, Ypsilanti, Mich. U. S. A.
Sommerfeld, A., Professor an der Bergakademie, Clausthal i. H., Sorger-Teichdamm.
Sonin, N., Professor, Mitglied der Akademie der Wissenschaften, St. Petersburg.
Souslow, Professor an der Universität, Kiew.
Sprung, A., Professor am Meteorologischen Institut, Potsdam.
Stäckel, P., Professor an der Universität, Kiel, Niemannsweg 14.
Stahl, H., Professor an der Universität, Tübingen.
Stammer, Wilhelm, Professor, Düsseldorf, Hohenzollernstr. 9.
330. Staude, O., Professor an der Universität, Rostock, St. Georg-Str. 38.
Steinitz, E., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Charlottenburg, Uhlandstr. 187.
Stephanos, Kyparissos, Professor an der Universität, Athen, Rue de Solon 20.
Sterneck, R. v., Privatdocent an der Universität, Wien VIII, Josefstädterstr. 30.
Stickelberger, L., Professor an der Universität, Freiburg i. B., Baslerstr. 38.
Stolz, O., Professor an der Universität, Innsbruck, Anichstr. 34.
Strafsmann, H. W., Gymnasiallehrer, Berlin SW., Dessauerstr. 36.
Studnička, F. J., k. k. Hofrat, Professor an der böhmischen Universität, Prag, Schwarze Gasse 6.
Study, E., Professor an der Universität, Greifswald.
Sturm, R., Professor an der Universität, Breslau, Fränkelplatz 9.
340. Suták, Jos., Gymnasialprofessor und Privatdocent an der Universität, Budapest IV., Város ház ter 4.
Tauber, A., Privatdocent an der Universität, Wien VI, Gumpendorferstr. 63.
Thomae, J., Professor an der Universität, Jena.
Timerding, E., Privatdocent an der Universität, Strafsburg i. E., Fischartstrafse 4.
Toeplitz, E., Professor am Johannes-Gymnasium, Breslau, Ohlauerstadtgraben 3.
Tötössy, B. v., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest.
Vahlen, K. Th., Privatdocent an der Universität, Königsberg i. Pr., Mittel-Tragheim 27.
Valentin, G., Oberbibliothekar der Kgl. Bibliothek, Berlin W., Burggrafenstr. 6.
Vályi, J., Professor an der Universität, Klausenburg (Ungarn).
Veronese, G., Professor an der Universität, Padua.
350. Vogel, P., Professor an der Artillerie- und Ingenieurschule, München, Linprunnstr. 68.
Voigt, W., Professor an der Universität, Göttingen.
Von der Mühll, K., Professor an der Universität, Basel, Bäumleingasse 15.

Vofs, A., Professor an der Universität, Würzburg, Sanderglacis 31.
Vries, Jan de, Professor an der Universität, Utrecht (Holland).
Wälsch, E., Professor an der Technischen Hochschule, Brünn.
Wallenberg, G., Oberlehrer an der neunten Realschule, Berlin N., Brunnenstr. 120.
Walter, Alois, Professor an der Staats-Oberrealschule, Graz.
Wangerin, A., Professor an der Universität, Halle a. S., Burgstr. 35.
Wassiljef, Alexander, Professor an der Universität, Kasan.
360. Weber, E. v., Privatdocent an der Universität, München, Königinstr. 5/0.
Weber, H., Professor an der Universität, Strafsburg i. E., Goethestr. 27.
Weber, M., kgl. Regierungsbauführer, Assistent an der Technischen Hochschule, Hannover, Baumstr. 19.
Weiler, A., Privatdocent am Polytechnicum, Zürich-Hottingen, Neptunstr. 4.
Weingarten, J., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin; Charlottenburg, Grolmanstr. 57.
Weinmeister, J. Ph., Professor an der Forstakademie, Tharandt.
Weifs, W., Professor an der deutschen Technischen Hochschule, Prag.
Wellstein, J., Privatdocent an der Universität, Strafsburg i. E., Domplatz 13.
Weltzien, C., Professor an der Friedrichs-Werder'schen Oberrealschule, Berlin; Zehlendorf, Prinz Handjery-Str. 3.
Wend, H. O., Lehrer an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.
370. Wernicke, A., Oberrealschuldirector, Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Hintern Brüdern 30.
Westphal, A., Professor, Abteilungsvorsteher am kgl. Geodätischen Institut, Potsdam.
White, H., Professor at the University, Evanston, Ill.
Wiechert, Emil, Professor an der Universität, Göttingen, Weender Chaussee 15.
Wien, W., Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Gartenstr. 46.
Wiener, H., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Grüner Weg 28.
Wirtinger, W., Professor an der Universität, Innsbruck, Andreas Hofer-Strafse 6.
Witting, A., Oberlehrer am Gymnasium, Dresden-Strehlen, Residenzstr. 32.
Wölffing, E., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Im Lausbühl 38.
Wolf, M., Professor an der Universität, Heidelberg.
380. Wolfskehl, P., Privatgelehrter, Darmstadt, Rheinstr. 4.
Zahradnik, K., Professor an der Universität, Agram, Kukovićgasse 6.
Zelbr, K., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Brünn (Mähren).
Zindler, K., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Wien, Resselgasse 5.
Ziwet, A., Professor at the University of Michigan, Ann Arbor, Mich.
Zorawski, C. v., Professor an der Universität, Krakau.
Zsigmondy, Privatdocent an der Universität, Wien I, Schmerlingplatz 2.
Züge, Professor am Gymnasium, Wilhelmshafen, Roonstr. 29.

Bibliothek der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg.
Mathematisches Institut der Technischen Hochschule, München.
390. Mathematischer Verein der Universität, Berlin NW., Dorotheenstr. 5.
Mathematischer Verein der Universität, Göttingen.
Mathematischer Verein der Universität, Halle a. S.
Royal Observatory zu Greenwich.
Kaiserliche Universitäts- und Landesbibliothek, Strafsburg i. E.
Universitäts-Bibliothek zu Utrecht.

Zum Gedächtnis.

Ludwig Seidel.*)

Von **F. Lindemann** in München.

Das äufsere Leben Seidel's ist schlicht verlaufen, wie meist das Leben eines Gelehrten, dessen Darstellung notwendig zusammenfällt mit der Darstellung seines Lernens, seines Arbeitens und seines Lehrens. Es liegt das Curriculum vitae vor, das Philipp Ludwig Seidel im Januar 1846 der Münchener philosophischen Facultät bei Gelegenheit seiner Promotion einreichte. Lassen wir ihn selbst sprechen:

„Ich bin geboren 1821, den 24. October in Zweibrücken, als der Sohn des damaligen k. Postverwalters daselbst, jetzigen Grenzpostmeisters von Hof, Justus Christian Felix Seidel, und seiner Frau Julie, geborene Reinhold; unter vier lebenden Geschwistern das dritte. Schon in meiner ersten Kindheit wurde mein Vater nach Nördlingen versetzt, wo ich den ersten Unterricht privatim und dann in der oberen Classe der dortigen lateinischen Schule erhielt. Nachdem ich diese durchgemacht und Ostern 1835 die Confirmation erhalten hatte, sandten mich meine Eltern im Herbste desselben Jahres auf's Gymnasium nach Nürnberg, dessen erste Classe damals unter Leitung von Professor Nägelsbach stand. Die drei übrigen machte ich in den folgenden Jahren in Hof durch, wohin mein Vater unterdessen zu seiner jetzigen Stellung befördert worden war. Während dieser Zeit entschied ich mich, angezogen durch den belebenden Vortrag des Professor Schnürlein, für das Studium der Mathematik, in welcher er mir, da er meine Neigung bemerkte, einen $2\frac{1}{2}$ Jahre fortgesetzten Privatunterricht erteilte. Aus diesem Grunde verlängerte ich meinen Aufenthalt in Hof noch ein halb Jahr, nachdem ich das Gymnasium im Herbst 1839 absolvirt hatte,

*) Auszug aus: Gedächtnisrede auf Philipp Ludwig von Seidel, gehalten in der öffentlichen Sitzung der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München am 27. März 1897, München 1898. In den a. a. O. beigefügten Anmerkungen findet man zahlreiche Auszüge aus Briefen von und an Seidel, sowie ein Verzeichnis seiner Schriften mit kurzer Inhaltsangabe.

und ging dann, so vorbereitet, Ostern 1840 nach Berlin auf die Universität. Neben denjenigen Vorlesungen, welche zur Erwerbung einer allgemeinen Bildung erforderlich sind, habe ich daselbst vorzüglich die Vorträge Encke's über Astronomie und diejenigen von Lejeune Dirichlet über reine Mathematik zu nützen gesucht; auch hatte ich das Glück, von dem letzteren zur Teilnahme an dem mathematischen Seminar, welches er damals privatim errichtet hatte, zugelassen, und von Encke mit verschiedenen astronomischen Arbeiten beauftragt zu werden: erst für seine Ephemeriden, für welche ich auch noch hier einen Teil der jährlichen Berechnung des Mondlaufes bearbeitet habe, und dann während $1^1/_2$ Jahren auch für die laufenden Geschäfte der Sternwarte, an deren Spitze er steht. — Auf den Rat dieser meiner Lehrer und von ihnen an Bessel, Jacobi und Neumann empfohlen, und mit der Bewilligung meiner Eltern, die stets die Rücksicht auf die Ausbildung ihrer Kinder vorangestellt haben, begab ich mich dann im Herbst 1842 nach Königsberg, angezogen von dem Ruhm der Männer, die ich genannt habe. Ein Jahr lang war ich ihr Zuhörer und genofs die Ehre, von ihnen mit mancherlei wifsenschaftlichen Arbeiten beauftragt zu werden, die ich zum Teil erst hier vollendet habe. Auch wurde mir, dem Bayern, als einem Genossen des mathematisch-physikalischen Seminars der Alma Albertina von der preufsischen Regierung ein Preis verliehen. — Im Herbst 1843, da Jacobi seiner Gesundheit wegen eine längere Reise unternahm, verliefs ich Königsberg, um in München meine akademischen Studien zu beschliefsen: adressirt von Geheimrat Bessel an seinen früheren Schüler, Professor Steinheil, dessen Güte mir hier eine Teilnahme an den Arbeiten, mit welchen er selbst beschäftigt, gestattet hat und fortwährend gestattet. Neben diesen und neben dem Besuche der Vorlesungen berühmter Lehrer habe ich gesucht, eigene Arbeiten fortzuführen, um mich zur Erlangung des akademischen Grades vorzubereiten, um welchen ich bei der hohen philosophischen Facultät gegenwärtig nachsuche. Da dieselbe für das verflossene Jahr die Preisfrage über die Anwendung der Mathematik auf die Naturwissenschaften aufstellte, so glaubte ich, einen Versuch zur Beantwortung machen zu müssen, indem mir die Vorlegung einer Frage von solcher Ausdehnung an die Studirenden an sich schon ein Beweis schien, dafs die Facultät keine Lösung erwarte, sondern geneigt sei, wenn sie nur ein mit sich selbst im Klaren befindliches Streben wahrnähme, dasselbe für die That zu nehmen. Diese Hoffnung hat der Erfolg gerechtfertigt.

„Man ist es gewohnt, mit der wissenschaftlichen Gröfse eines Mannes seine Humanität im gleichen Verhältnisse zu finden. Darum ziemt es mir nicht, den Männern, die mir überall die wohlwollendste und beinahe väterliche Aufnahme geschenkt haben, von meinem Danke zu reden, als hätte ich eine unverhoffte Gunst erfahren,

oder als ob meine Gesinnung gegen sie einen Wert für die haben könnte, die hoch über meinem Lobe stehen. Mein Streben ist es gewesen, ihren Unterricht und die Vorteile des persönlichen Umganges, dessen sie mich gewürdigt haben, so zu nützen, wie ich konnte; es soll dahin gerichtet bleiben, den Namen ihres Schülers ohne Schande zu tragen."

Der mitgeteilte Lebenslauf giebt uns ein Abbild des ganzen Seidel: Kindliche Liebe und Dankbarkeit gegen die Eltern, unbegrenzte Verehrung gegen seine berühmten Lehrer, Bescheidenheit bei Erwähnung eigenen Verdienstes, begeisterte Hingabe an seine Wissenschaft. Letztere hat ihn andauernd, auch unter widrigen Verhältnissen, geleitet, hat ihn befähigt, diese Verhältnisse zu ertragen, oder sich über sie zu erheben.

Solche Widrigkeiten wurden in späteren Jahren durch seinen Gesundheitszustand bedingt, aber schon mit Beginn seiner Studienzeit durch die eigentümlichen Zustände, welche in betreff des mathematischen Unterrichtes an den meisten deutschen, und insbesondere an den bayerischen Universitäten herrschten. Es war ein besonderes Glück für Seidel, dafs er in Hof die Förderung eines Mannes wie Schnürlein geniefsen konnte, der selbst bei Gaufs in Göttingen studirt hatte und so auf einer höheren Stufe mathematischer Erkenntnis stand als damals die meisten seiner Collegen, denen an deutschen Gymnasien der Unterricht in der Mathematik anvertraut war. Der Fürsprache Schnürlein's hatte es der junge Seidel zu danken, dafs ihm sein Vater das Studium an einer auswärtigen Universität gestattete. Gerade an diesem Beispiele sehen wir, welch' segensreichen und weittragenden Einflufs ein wahrhaft wissenschaftlich gebildeter Gymnasialprofessor ausüben kann. Es giebt ja leider noch heute Lehrer, die es für unnötig halten, dafs der Professor der Mathematik mehr wisse, als er auf der Schule zu unterrichten hat, die es bereuen, ihre Zeit den höheren Disciplinen der Mathematik während ihrer Universitätsstudien gewidmet zu haben, die sich nicht scheuen, solch banausischer Ansicht Ausdruck zu geben; möchten dieselben durch das Beispiel Schnürlein's sich eines besseren belehren lassen!

Schon in Nördlingen hatte Seidel den ersten Platz in allen Unterrichtsgegenständen inne; ebenso war er in Nürnberg der beste unter 15 Schülern, und in Hof legte er die Absolutorialprüfung mit dem (sic!) Note der ersten Klasse und dem Prädicate „vorzüglich würdig, mit Auszeichnung" ab.

Der gewöhnliche Unterrichtscursus in der Mathematik war damals wenig umfassend; die elementaren Fächer wurden repetirt und weiter ausgebaut, hin und wieder eine Vorlesung über höhere Analyse und Differential-Calculus angefügt. Seit Anfang des Jahrhunderts war die mathematische Wissenschaft in Deutschland durch Gaufs

neu belebt; aber die Zahl seiner Zuhörer in Göttingen war gering; in Leipzig wirkte Möbius, in Bonn Plücker, in Erlangen v. Staudt; aber auch sie entfalteten keine hervorragende Lehrthätigkeit. Anders in Berlin und Königsberg; hier Jacobi, dort Lejeune Dirichlet wagten es zuerst, in ihren Vorlesungen nicht nur über das gewöhnliche hinauszugehen, sondern ihre Zuhörer unmittelbar in die Gegenwart, in ihre eigensten und neuesten Gedanken und Forschungen einzuführen; und sie hatten damit einen ungeahnten Erfolg, sie gründeten zuerst in Deutschland eine „wissenschaftliche Schule" der mathematischen Forschung.

Am 6. Mai 1840 wurde Seidel in Berlin immatriculirt. In den folgenden fünf Semestern hörte er bei Dirichlet: 1) Theorie der bestimmten Integrale und Anwendungen, 2) Theorie der partiellen Differentialgleichungen und Elemente der Lehre von den Reihen, 3) Zahlentheorie, 4) Methoden zur Bestimmung bestimmter Integrale und Anwendungen, 5) Theorie der complexen Zahlen und ausgewählte Capitel der Zahlentheorie; bei dem Astronomen Encke: 1) Sphärische Astronomie, 2) Berechnung der Kometenbahnen, 3) Rechnende Astronomie, 4) Geschichtliche Entwickelung der Hauptlehren der Astronomie; aufserdem bei Ohm: Statik, Dynamik und Anwendungen der Differentialrechnung; bei Dove: Experimentalphysik; bei Gabler und Werder philosophische, bei Ranke historische Vorlesungen, welch' letzteren er mit besonderer Begeisterung folgte; endlich im letzten Semester bei Steiner: über Kegelschnitte und ausgewählte Capitel der Geometrie. Dieser grofse Geometer, der vorher wegen seines Aufenthaltes in Paris nicht gelesen hatte oder wegen Collision der Stunden nicht gehört werden konnte, veranlafste Seidel noch ein Semester länger in Berlin zu bleiben. Aus seinen Briefen an die Eltern spricht immer erneute Dankbarkeit gegen seine Lehrer, gegen Rector Hirschmann in Nördlingen, der zuerst seinen Sinn auf die Mathematik gewendet habe, gegen Professor Schnürlein in Hof, der ihn durch seinen ausgezeichneten Unterricht so weit gebracht habe, dafs er in Berlin sofort höhere Vorlesungen mit Vorteil hören konnte, dann gegen Dirichlet, der ihn bereits im Winter 1840/41 in sein seit Jahren zum ersten Male wieder eröffnetes Seminar aufnahm, endlich gegen Encke, der ihm wiederholt Rechnungen für die Sternwarte auftrug und ihn seit Sommer 1841 dauernd auf der Sternwarte (4 bis 6 Stunden täglich) beschäftigte; Dank aber auch gegen Gott und Vertrauen auf den, der schon so vieles günstig für ihn geschickt hat.

Ein durchreisender Student aus Königsberg bestärkt Seidel in dem Wunsche, auch letztere Universität zu besuchen, der indessen erst ein Jahr später zur Ausführung gelangen sollte. Das war damals ein grofser Entschlufs; Eisenbahn gab es dorthin noch nicht; die lange Reise mufste per Post zurückgelegt werden. Die Namen

des Astronomen Bessel und des Mathematikers Jacobi liefsen indessen alle Schwierigkeiten überwinden. Fast gleichzeitig kam Eduard Heine, der spätere Hallenser Mathematiker, in Königsberg an; beide waren an Jacobi von Dirichlet empfohlen und verkehrten viel mit einander. Im Interesse dieser beiden „Berliner" kündigt dann auch Jacobi, veranlafst durch Dirichlet, eine höhere Vorlesung an, nämlich über die Mechanik des Himmels. Seidel berichtet, dafs Jacobi den eigentlichen Königsberger Studenten abgeraten habe, zu kommen, da sie doch nicht folgen könnten, und so habe Jacobi nur vier Zuhörer gehabt; letzterer habe in der Regel weniger hohe Gegenstände in seinen Vorlesungen behandelt, um leichter Zuhörer zu finden; dann sei er aber etwas nachlässig in seinem Vortrage, weil der Stoff für ihn selbst zu geringes Interesse habe. Aus diesem Colleg über die Mechanik des Himmels sind die später so berühmt gewordenen und von Clebsch für den Druck bearbeiteten Vorlesungen hervorgegangen. Seidel's Urteil über die Königsberger Studenten ist anfangs wenig günstig; er fühlt sich ihnen gegenüber als überlegener Berliner und Grofsstädter; er verurteilt ihr burschikoses Wesen. Aber sehr bald ändert er sein Urteil, erkennt er die trefflichen Eigenschaften der Königsberger an; es ergeht da ihm, wie noch heute dem Fremden, der zuerst diese östlichste und nördlichste Hauptstadt Deutschlands betritt. Die Menschen dort leben einfacher als im Süden und Westen, sind aber deshalb nicht weniger hoch zu schätzen; bei den Studenten insbesondere besteht noch manch alte Sitte, die anderswo erloschen ist; aber dafür fehlen auch die extravaganten, oft lächerlichen Auswüchse des studentischen Lebens, die wir an den Universitäten Süd- und Mitteldeutschlands so oft beklagen; daher hängt der Student mit inniger Liebe an seiner „Albertina" auch noch im späteren Leben, und ungern entschliefst sich der Ostpreufse, draufsen „im Reiche" eine Universität zu besuchen. Königsberg trägt deshalb ein durchaus provinzielles Gepräge, aber der Student ist fleifsig und intelligent; und speciell in der Mathematik waren schon vor 1843 aus der Königsberger Schule Männer hervorgegangen, die sich eine anerkannte Stellung in unserer Wissenschaft errungen haben, deren Namen teilweise zu den ersten in ihr gezählt werden, wie Hesse, Rosenhain, Borchardt, Joachimsthal. Mit Seidel zusammen nahmen Aronhold, Kirchhoff, Siebeck, Heine an den Übungen des Seminars Teil, wie sich denn Seidel's Bemerkung über den elementaren Charakter von Jacobi's Vorlesungen nur auf die gerade zuletzt vorhergehenden Semester beziehen kann. Seidel erhält im Sommer 1843 eine Prämie im Seminar, und in dem an das Ministerium erstatteten Berichte schreibt Jacobi über ihn: „ein gediegener und vielseitiger junger Mann, der sich auch durch gröfsere numerische Rechnungen als geschickter und einsichtsvoller Rechner bewährt hat." In der

That hatte Seidel für Jacobi sehr umfangreiche Rechnungen zu dessen Störungstheorie durchgeführt, wie letzterer bei späterer Veröffentlichung seiner Arbeiten dankbar anerkennt; aufserdem brachte Seidel auch seine Rechnungen für Encke's Berliner Jahrbuch zum Abschlufs und übernahm neue Rechnungen betr. die Mondbewegung für das Jahr 1848. Daneben arbeitete er bei Bessel, dem Begründer der exacten beobachtenden Astronomie auf der Sternwarte, hörte dessen Vorlesungen über praktische Astronomie und über Dynamik; auch die wertvollen Vorlesungen Neumann's, des erst vor wenigen Jahren verstorbenen Veteranen von Ligny, über theoretische Physik wurden nicht versäumt. Dieser und Bessel veranlassen ihn hauptsächlich, noch den Sommer in Königsberg zu bleiben. Jacobi verspricht aufser seiner öffentlichen Vorlesung für Heine und Seidel ein Privatissimum zu halten und zwar über die Grundzüge seiner Methoden zur Bestimmung der Störungen in den Bewegungen der Himmelskörper und über andere Sachen, von denen er wünschte, dafs Seidel sie später weiter ausarbeite und zum Drucke fertig mache. Andere Probleme der Art hatte er gleichzeitig Heine übergeben, andere hatte Dirichlet (der nach Königsberg gekommen war) übernommen.

Diese Studien über das Weltsystem gaben dem jungen Astronomen und Mathematiker Veranlassung, sich in einer für ihn charakteristischen Weise über allgemeine Fragen seinem Vater gegenüber auszusprechen: „Diese neuen Unsersuchungen," schreibt er (nämlich über die Bewegung unseres Sonnensystems gegen die anderen Fixsterne), „bilden eines der interessantesten und bei weitem das erhabenste Capitel der ganzen Astronomie, und sie flöfsen einem zugleich eine gründliche Verachtung gegen all' das Geschwätz neuerer Philosophen ein, die den Menschen, wie er ist, auf den höchsten Thron setzen und alles auf die Erde als den Mittelpunkt und das Höchste beziehen wollen, als ob alle Sterne für nichts weiter da wären, als damit der Himmel nachts, statt schwarz, schwarz mit hellen Punkten aussieht, und als ob es für die unendliche Welt einen Unterschied machen könnte, wenn die Erde garnicht da wäre." Und bei einer anderen Gelegenheit, wodurch dieser Gedanke wesentlich ergänzt wird: „Man wird wohl sagen können, dafs es für den Menschen nichts Erhabeneres geben kann, als die Erforschung des Firmamentes, dafs uns nirgends der Gedanke der göttlichen Allmacht mit mehr Majestät vor die Seele tritt, und dafs kein Studium mit mehr Entschiedenheit auf die waltende Hand des Schöpfers aufmerksam machen kann."

Sprachliche Studien wurden in Königsberg wie in Berlin getrieben; mit Heine zusammen Vorlesungen über Spanisch und Englisch besucht.

Mit Sorge haben die Angehörigen den geliebten Sohn in die

Ferne ziehen sehen, mit liebender Sorge suchen sie ihn aus der Ferne zu umgeben; aber die unwirtliche Stadt des Nordens war nicht so schlimm, als man erwartete; der Winter dort sogar weniger streng, als im heimatlichen Hof. Jacobi's bedenkliche Erkrankung setzte indessen fernerem Verweilen ein Ziel. Wohl dem Wunsche der Eltern folgend, wendet Seidel sich endlich in die vaterländische Universität nach München, „um sich auszuruhen", wie er spöttelnd bemerkt, thatsächlich, um ein Leben voller erfolgreicher Arbeit zu beginnen.

Es ist immer anziehend, das Werden eines bedeutenden Menschen zu verfolgen. Aber nicht allein deshalb haben wir bei Seidel's Studienzeit länger verweilt. Es handelt sich hier um die grofse Zeit der Wiedergeburt der Mathematik in Deutschland, die wir vor allen Dingen der Königsberger Schule zu verdanken haben; gab es doch eine Zeit, wo fast alle Lehrstühle an deutschen Hochschulen von früheren Königsbergern besetzt waren. Es ist wohl das erste Mal, dafs wir aus dem Munde eines befähigten Schülers einen Einblick in die geistige Werkstatt jener grofsen Meister gewinnen, dafs wir aus solchem Munde mit so tiefer Liebe und Verehrung von der humanen Freundlichkeit jener Lehrer sprechen hören.

Durch Bessel war Seidel an dessen früheren Schüler Steinheil empfohlen worden und zwar „als der allerkenntnisreichste und allerfleifsigste junge Mann, den er je gesehen habe". Bei Steinheil fand er die liebenswürdigste Aufnahme; es kam ihm darauf an, sich in den Anwendungen der Theorie auf physikalische Probleme zu üben und sich mit dem messenden Teile der Physik vertraut zu machen. Dazu bot sich nun die beste Gelegenheit, denn Professor Steinheil war vom Ministerium mit der Regulirung des bayerischen Mafses und Gewichtes beauftragt, und Seidel war glücklich, hierbei als Gehilfe mitwirken zu können.

Aber auch der Astronomie, die er sich eigentlich als Hauptfach gewählt hatte, durfte er sich von neuem widmen. Bei den damaligen eigentümlichen Verhältnissen blieb ihm allerdings die Sternwarte verschlossen; um so wertvoller war für ihn die von Steinheil gemachte Erfindung des Photometers. Schon für 1835 hatte die Göttinger Societät der Wissenschaften (wohl auf Veranlassung von Gaufs) die Construction eines Instrumentes zur Messung der Helligkeiten von Sternen als Gegenstand einer Preisaufgabe verlangt, und Steinheil wurde der Preis zuerkannt. Andererseits war Seidel schon durch Encke in Berlin auf die Wichtigkeit derartiger Messungen aufmerksam gemacht; so war nichts natürlicher, als dafs er nunmehr mit dem Steinheil'schen Photometer die ersten umfassenden Beobachtungen anstellte, wobei er sich der wertvollen Unterstützung Leonhardt's (früher Assistent der Sternwarte, zuletzt Gymnasialprofessor a. D. † 1891) zu erfreuen hatte.

Die ausführliche Publication der Resultate erfolgte allerdings erst später. Zunächst mufste Seidel an seine Promotion denken. Er bearbeitete mit Erfolg die von der philosophischen Facultät gestellte Preisaufgabe „Über die Anwendungen der Mathematik auf die Naturwissenschaften" und hätte daraufhin (da er den Preis erhielt) promoviren können; aber das Thema war ihm zu wenig wissenschaftlich, war er doch der Ansicht, dafs es eigentlich gar nicht hätte gestellt werden sollen. Als Dissertation reichte er daher eine neue Arbeit „Über die beste Form der Spiegel in Teleskopen" ein und betrat damit ein Gebiet, dasjenige der Dioptrik, auf dem er gleichfalls noch Bedeutendes leisten sollte. Die Promotion fand am 24. Januar 1846 statt. Bei derselben wurde nach damaliger Sitte eine besondere Quaestio inauguralis verlesen; sie behandelte die ersten Resultate photometrischer Messungen am Himmel. Schon ein halbes Jahr darauf erfolgte die Habilitation Seidel's als Privatdocent. Als Thema für die Habilitationsschrift hatte er ein rein mathematisches gewählt: Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Kettenbrüche. Wir sehen Dirichlet's Einflufs in dem Bestreben, allgemein anerkannte und benutzte Methoden streng zu begründen und auf sichere Basis zu stellen. Noch mehr tritt dies hervor in der zwei Jahre später erschienenen Arbeit „Über neue Eigenschaften der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen"; er füllt hier eine sehr wesentliche Lücke aus, indem er zuerst den Begriff der ungleichmäfsigen Convergenz einführt und so in der Theorie der trigonometrischen Reihen ein Rätsel löst, das Dirichlet's Beweis für die Convergenz wohl umgangen, aber nicht erledigt hatte. Das ist eine der wichtigsten Leistungen Seidel's in rein mathematischer Beziehung, die um so mehr hervorgehoben werden mufs, als dieselbe Entdeckung einige Decennien später durch Weierstrass in Berlin von neuem gemacht wurde. Auch die anderen mathematischen Aufsätze Seidel's bewegen sich in ähnlichen Bahnen. Es war nicht seine Sache, neue grofse Gebiete durch Erfindung neuer Methoden der Wissenschaft zu eröffnen, er suchte sich vielmehr einzelne schwierige Punkte, unklare Stellen, um sich mit der ganzen Schärfe seines Verstandes in sie zu vertiefen und Licht über sie zu verbreiten.

Seidel's Helligkeitsmessungen an Fixsternen, die auch auf die Planeten ausgedehnt wurden, sind die ersten wirklichen Messungen dieser Art und haben bis heute ihren bedeutenden Wert behalten. Hervorzuheben ist die aufserordentliche, durch Jahrzehnte fortgesetzte Beobachtungen erworbene manuelle Geschicklichkeit Seidel's; die Verwertung des Steinheil'schen Gedankens, wonach nicht die Helligkeit selbst, sondern der Logarithmus derselben als Mafs zu Grunde gelegt wird; dann die überaus sorgfältige Redaction der Beobachtungen nach den mathematischen Methoden der Wahrscheinlichkeits-

rechnung; endlich die genaue Berücksichtigung der Extinction des Lichtes durch die Atmosphäre, d. h. der Nachweis darüber, welchen Einfluſs die Höbe des Sternes über dem Horizonte auf die Helligkeit desselben ausübt. Die in letzterer Beziehung erhaltenen Resultate, die mit älteren Formeln von Lambert und Laplace nicht übereinstimmten, waren besonders für Gauſs überraschend, und derselbe spricht in einem Briefe an Seidel seine hohe Anerkennung über das Erreichte aus.

Gleich bedeutend für die Astronomie sind Seidel's Untersuchungen über die Dioptrik. Seitdem Fraunhofer durch die Entdeckung der festen Linien im Sonnenspectrum die Eigenschaften der Gläser präcis in Zahlen auszudrücken lehrte, kann man das Bild jedes in der Axe eines optischen Systemes gelegenen Objectpunktes strenge berechnen. Für einen seitlich von der Axe gelegenen Objectpunkt wurde die strenge Rechnung für das Bild erst möglich durch die von Seidel auf Veranlassung Steinheil's entwickelten trigonometrischen Formeln; und das ist gerade für die in neuerer Zeit auch in der Astronomie so vielfach angewandte Photographie von ganz hervorragender praktischer Wichtigkeit. Dem entsprechend nahm Seidel auch an den Vorarbeiten für die photographische Beobachtung des Venus-Durchganges regen und fördernden Anteil. Für die Verbesserung der Methoden zur Herstellung exacter astronomischer Instrumente, insbesondere für die Arbeiten im optischen Institute des jüngeren Steinheil bedeuteten die genannten Formeln einen wesentlichen Fortschritt.

Auch die Arbeiten über Wahrscheinlichkeitsrechnung wurden ursprünglich durch astronomische Probleme veranlaſst. Hier muſs ich einer Anwendung der betreffenden Theorien gedenken, die gerade für München von höchstem praktischen Werte wurde. Es handelt sich um die Frage, ob zwischen der Frequenz der im Krankenhause constatirten Typhusfälle und dem Stande des Grundwassers einerseits, der Menge der atmosphärischen Niederschläge andererseits, ein innerer Zusammenhang bestehe. Jede naturwissenschaftliche oder astronomische Beobachtungsreihe ist eine Statistik, und die Wahrscheinlichkeitsrechnung giebt diejenigen mathematischen Hülfsmittel, welche über die Bedeutung der statistischen Erfahrungen zu entscheiden lehren. Auf Pettenkofer's Veranlassung bearbeitete dessen Freund Seidel die Statistik der erwähnten localen Verhältnisse mathematisch.

Die betreffenden Untersuchungen waren nicht nur von theoretischem Interesse, sondern sie kamen nach Mitteilung Pettenkofer's in eminenter Weise zur praktischen Geltung und Anwendung, denn gerade die Zahlen Seidel's waren es, welche damals von ausschlaggebendem Einflusse auf die Entschlieſsungen des Magistrates, insbesondere des damaligen Oberbürgermeisters wurden. Nächst den

allgemeinen Theorien Pettenkofer's sind es daher die Rechnungen Seidel's, denen die Stadt München es zu verdanken hat, wenn sie heute nach von Ziemssen's Ausspruche als eine der gesündesten Städte Europas bezeichnet werden kann.

Andersartig ist Seidel's dauernde Bedeutung, abgesehen von seinen wissenschaftlichen Leistungen, für das Land Bayern. Als es sich um seine Ernennung zum Professor extraordinarius handelte, gab es eine Partei, die ihn beiseite schieben wollte. Wenn das nicht gelang, so haben wir dafür dem Eingreifen Steinheil's zu danken; letzterer schreibt in einer Eingabe an den Minister: „Seidel ist ein ganz eminentes, mathematisches Talent. Aus der Schule eines Bessel, Jacobi, Encke, Dirichlet hervorgegangen, ... ist er jetzt der geeignete Mann, unseren tief darniederliegenden mathematischen Studien an der Universität neuen Aufschwung zu geben.“ Seit 1851 aufserordentlicher, seit 1855 ordentlicher Professor, hat er, später in Gemeinschaft mit Professor Bauer, treu in diesem Sinne gewirkt, war er der erste, der in Bayern das wissenschaftliche Studium der Mathematik einführte, denn v. Staudt in Erlangen kam als Lehrer kaum in Betracht. Ich habe schon oben hervorgehoben, welchen Wert wissenschaftlich durchgebildete Lehrer für die Mittelschulen haben. Wenn in Ost- und West-Preufsen die Leistungen der Mittelschulen in der Mathematik so hoch stehen, höher vielleicht als anderswo, soweit meine Erfahrung reicht, während sonst über die Erfolge im mathematischen Unterricht überall geklagt wird, so liegt das vor allem daran, dafs dort mehrere Decennien früher als anderswo durch die genannten Meister das Universitätsstudium und dadurch das geistige Niveau der Lehrer gehoben war. Denn in keiner Disciplin hängt der Erfolg der Schule mehr von der Persönlichkeit des Lehrers ab, als gerade in der Mathematik. Hierfür die besten Kräfte heranzuziehen, ist eine wesentliche Aufgabe der Schulverwaltung; zu dem Zwecke mufs die materielle Stellung des Lehrers den Opfern entsprechen, die ihm das Studium auferlegt; das war bekanntlich lange Zeit nur in geringem Mafse der Fall, und erst ganz neuerdings ist für Bayern eine Wendung zum Besseren eingetreten. Zu dem Zwecke aber mufs der Lehrer auch wissenschaftlich so hoch stehen, dafs er nicht nur als Einpauker zur Prüfung wirkt, sondern als begeisternder Führer in ein unerschöpfliches, durch seine Anwendungen die Welt beherrschendes Gebiet des Wissens, und zwar des einzig sicheren Wissens, das der Mensch aus sich gewinnen kann. Aber ein solcher Einflufs auf die künftigen Lehrer braucht Decennien, um sich geltend zu machen, und wieder Decennien, um weiterzuwirken auf neue Generationen. Und so ist zu hoffen, dafs Seidel's Anstellung und sein Wirken in München noch für lange Jahrzehnte dauernde segensreiche Nachwirkungen auf das höhere Unterrichtswesen in Bayern ausüben möge!

Wir haben von Seidel in der Glanzzeit seines Schaffens gesprochen. Ein tückisches und unheilbares Augenleiden hat nur allzu früh seinen Arbeiten ein Ziel gesetzt.

Es bleibt noch die Aufgabe, über die ferneren äufseren Lebensschicksale kurz zu berichten. Der Vater war 1848 in Bayreuth gestorben; Mutter und Schwester wohnten dann mit Seidel zusammen in München, bis ihm erstere 1867 entrissen wurde. Die eine Schwester starb als Pfarrersgattin in Ansbach; die andere widmete sich ganz der Pflege des innig geliebten und verehrten Bruders, der solcher Pflege von Jahr zu Jahr mehr bedurfte; auch sie ging vor ihm (1889) dahin.

Seidel blieb unvermählt. Wenn er so die Sorge um eine eigene Familie entbehrte, so betrachtete er (wie Professor Bauer an seinem Grabe treffend sagte) gewissermafsen die ganze Universität als seine Familie; ihr widmete er seine volle Kraft und Zeit. Jede Angelegenheit der Universität berührte ihn wie seine eigene und fand in ihm ihren eifrigsten Vertreter. Sein klarer Verstand, sein eiserner Wille, die Integrität seines Charakters sicherten ihm einen entscheidenden Einflufs in der Universität und in unserer Akademie. Schon seit einer Reihe von Jahren mufste er seine Vorlesungen einstellen; aber noch vor zwei Jahren liefs er sich in die Aula der Universität führen, um an der Rectorwahl teilzunehmen. Seitdem war er immer mehr an das Zimmer gefesselt; am 13. August 1896 erlag er seinen Leiden, ohne viel durch eigentliche Schmerzen gelitten zu haben.

Nachtrag: Eine im Nachlasse Seidel's gefundene Abhandlung: „Ueber die Bedingungen möglichst präciser Abbildung eines Objectes von endlicher scheinbarer Gröfse durch einen dioptrischen Apparat", welche noch aus dem Jahre 1881 stammt, und auf die in dem oben erwähnten ausführlichen Nekrologe Bezug genommen war (a. a. O. S. 83), ist neuerdings in den Sitzungsberichten der math.-phys. Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften, 1898, Heft III, durch Herrn S. Finsterwalder veröffentlicht worden.

Karl Fink.

Von L. Fleischmann in Tübingen.

Am 22. Februar dieses Jahres starb zu Tübingen Dr. Karl Fink, Rector und erster Hauptlehrer der dortigen Realanstalt, nach kurzer, aber schwerer Krankheit im 48. Jahre seines Lebens.

Geboren am 2. Januar 1851 zu Göttingen bei Ulm als Sohn eines Schullehrers besuchte Fink bis zu seinem 14. Lebensjahre die

Volksschule seines Geburtsortes; hierauf bereitete er sich in den Seminarien zu Nürtingen und Esslingen auf den Volksschuldienst vor. Nach Bestehen der ersten Dienstprüfung 1870 wurde er zuerst kurze Zeit als Lehrgehülfe in Böblingen und Reutlingen verwendet; dann bekleidete er 2 Jahre lang die Stelle eines Musikgehülfen am Esslinger Lehrerseminar. Hier reifte in ihm der Entschluſs, sich dem höheren Lehrfach zuzuwenden, und so finden wir Fink 1873 als Schüler der Stuttgarter Realanstalt wieder. 1875 erwarb er sich an der mathematischen Abteilung des Stuttgarter Polytechnicums das Reifezeugnis, und nach weiteren 4 Semestern fleiſsigen Studiums an der genannten Hochschule bestand er 1877 die Reallehrerprüfung; gleich darauf wurde ihm die Stelle eines realistischen Hauptlehrers am Reallyceum Geislingen übertragen. Hier, sowie in Heidelberg (1878/79), bereitete er sich auf die mathematisch-naturwissenschaftliche Professoratsprüfung vor, die er im Jahre 1880 bestand; noch im gleichen Jahre wurde er zum Hauptlehrer für Mathematik und Naturwissenschaften an den Oberklassen der Tübinger Realanstalt befördert. 1886 promovirte Fink, nunmehr ein eifriger Schüler Brill's, an der Universität Tübingen mit einer Abhandlung über „windschiefe Flächen“. 1894 wurde dem jetzt 43-jährigen Manne die Vorstandsstelle an der Tübinger Realanstalt übertragen, die er bis zu seinem Lebensende bekleidete. Auſserdem war Fink noch Vorstand und Lehrer an der gewerblichen und kaufmännischen Fortbildungsschule; viele Jahre hindurch war er auch als Lehrer an der höheren Mädchenschule thätig.

In allen diesen Stellungen, besonders aber als Leiter und Lehrer der Tübinger Realanstalt, entfaltete Fink eine überaus erfolgreiche Thätigkeit. Begabt mit hervorragendem Lehrgeschick und ausgestattet mit einer eisernen Energie hat sich der unermüdliche Lehrer die Achtung und die Liebe seiner Schüler, seiner Collegen und seiner Vorgesetzten in reichem Maſs erworben — bis plötzlich der Tod den rastlos Strebenden aus seinem Wirkungskreise riſs. Aber nicht nur für die eigene Anstalt, die sich unter seiner Leitung immer weiter entwickelt hat, sondern für das gesamte Realschulwesen bedeutet sein früher Heimgang einen schweren Verlust; denn Fink stand stets im Vordertreffen beim Kampfe für die Anerkennung der realistischen Bildung, die er in dem Sinne verstand, daſs sie gleichmäſsig aus den drei Elementen: Mathematik, Naturwissenschaften und modernen Sprachen aufgebaut sei.

Die wissenschaftlichen Arbeiten Fink's bewegen sich auf dem Gebiete der Geometrie; sie zeichnen sich sämtlich durch Schärfe und Klarheit aus. Den Rahmen der Geometrie, soweit sie in der Mittelschule gelehrt wird, will er unter Abweichung von der starren euklidischen Form erweitert wissen. Schon im Planimetrie- und Stereometrie-Unterricht soll der Schüler mit den einfachen Curven

und Flächen, sowie mit den elementarsten Sätzen der synthetischen Geometrie und ihren Anwendungen bekannt gemacht und so, fast spielend, in das Gebiet der höheren Mathematik hinübergeleitet werden. Hand in Hand mit diesem Unterricht soll das Linearzeichnen als „Darstellende Geometrie" der Ebene bezw. des Raumes gehen. Um beim Schüler dauernde Freude für die Geometrie zu erwecken, soll er von der ersten Stunde an dazu angeleitet werden, die geometrischen Wahrheiten an der Figur oder am Modelle selbst zu entdecken. — Dies der Geist des Fink'schen Geometrie-Unterrichts.

Nachstehend folgt eine Aufzählung von Fink's mathematischen Werken. Dabei sei noch erwähnt, dafs Fink, ein hervorragender Turner, auch auf dem Gebiet des Turnwesens wertvolle Arbeiten veröffentlicht hat.

Fink's Veröffentlichungen.

1. Über windschiefe Flächen im allgemeinen und insbesondere über solche des 6. Grades. Correspondenzblatt für die Gelehrten- und Realschulen Württembergs 1887.
2. Kurzer Abrifs einer Geschichte der Elementarmathematik. Tübingen 1890. Laupp'scher Verlag.
3. Über die Einführung gewisser Grundbegriffe der projectiven Geometrie im Schulunterricht. Correspondenzblatt 1891, 7. u. 8. Heft.
4. Monge. Correspondenzblatt 1892, 7. u. 8. Heft.
5. Dupin. Correspondenzblatt 1893, 1. u. 2. Heft.
6. Carnot, sein Leben u. seine Werke. Tübingen 1894. Laupp-scher Verlag.
7. Fünf Leitsätze über den Geometrie-Unterricht in den höheren Schulen. Correspondenzblatt 1895, Heft 8.
8. Kommerell-Fink, Lehrbuch der ebenen Geometrie. Tübingen, Laupp'scher Verlag.
9. Die elementare systematische und darstellende Geometrie der Ebene in der Mittelschule. I. u. II. Kurs für die Hand des Lehrers bearbeitet. Tübingen 1896, Laupp'scher Verlag.
10. Sammlung von Sätzen u. Aufgaben zur systematischen u. darstellenden Geometrie der Ebene in der Mittelschule. I. u. II. Kurs für die Hand des Schülers bearbeitet. Tübingen 1896. Laupp'scher Verlag.
11. 10 Figurentafeln u. 84 Übungsblätter als Beilage zu den beiden vorigen Werken. Gezeichnet von Reallehrer Auer in Tübingen. Tübingen 1896. Laupp'scher Verlag.
12. Sammlung von Sätzen und Aufgaben zur systematischen und darstellenden Geometrie der Ebene in der Mittelschule. III. Kurs. Über die Abbildung geometrischer Systeme. IV. Kurs. Einführung in die Grundlehren der projectiven Geometrie. (Mit 120 Fig. im Text.) Tübingen 1897. Laupp'scher Verlag.

Bericht

über die

wissenschaftlichen Sitzungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

während der

Jahres-Versammlung zu Düsseldorf.

Universität und Technische Hochschule.*)

Von **F. Klein** in Göttingen.

Hochgeehrte Anwesende!

Die Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte, welche zum ersten Male in dieser Stadt ihre Sitzungen beginnt, hat sich von je eine doppelte Aufgabe gestellt. Sie will einen Vereinigungspunkt abgeben für die Fachgenossen, die sich in den Sectionssitzungen über die neuen Fortschritte auf ihren Specialgebieten verständigen; sie bietet andererseits in den allgemeinen Sitzungen Gelegenheit, Probleme oder Resultate von geeigneter Tragweite der groſsen Öffentlichkeit vorzulegen. Wenn ich das Programm, welches Ihre Geschäftsleitung aufgestellt hat, richtig verstehe, so wird die Düsseldorfer Versammlung gerade in letzterer Hinsicht eine besondere Signatur tragen. Seit einigen Jahren hat in Deutschland eine groſse Bewegung eingesetzt, welche darauf abzielt, zwischen der mächtig emporgeblühten Ingenieurwissenschaft und den älteren Disciplinen eine lebhaftere und mehr unmittelbare Beziehung herzustellen. Dieselbe kleidet sich häufig in die Gestalt einer bloſsen Standesfrage, indem sie in sehr berechtigter Weise den wissenschaftlichen Ingenieuren die gleichen socialen Vorrechte sichern will, wie den Vertretern anderer gelehrter Berufe. Aber sie kann doch wesentlich tiefer gefaſst werden, indem man gegenseitiges Verständnis auf Grund genauer Kenntnisnahme anstrebt. Als wir im vorigen Jahre in Braunschweig in den Räumen der Technischen Hochschule daselbst versammelt waren, da haben wir innerhalb der mathematischen Section zu der genannten Bewegung in diesem Sinne Stellung genommen, es gelang in erfreulicher Weise, daſs sich die Vertreter der technischen Wissenschaften, die in gröſserer Zahl unserer Einladung gefolgt waren, mit den abstracten Mathematikern über die Zusammengehörigkeit und über die Abgrenzung ihrer Gebiete verständigten. Was so im engeren Fachkreise vorbereitet wurde, das soll nun dieses Mal, wo wir im Mittelpunkte der rheinisch-

---

*) Vortrag, gehalten in der ersten allgemeinen Sitzung der 70. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Düsseldorf am 19. September 1898.

westfälischen Industrie zusammenkommen, siegreich in die allgemeine Erscheinung treten! Andere Redner werden Ihnen von grofsen praktischen oder theoretischen Errungenschaften der letzten Jahre sprechen, welche hierher gehören, — ich selbst aber will Sie vorab bitten, mir auf ein schlichteres Gebiet zu folgen, welches für das Zustandekommen aller derartiger Leistungen doch aufserordentlich wesentlich ist, auf das Gebiet der allgemeinen Unterrichtsfragen. Ich wünsche, Ihnen allerlei Entwickelungen vorzuführen, welche an unseren Technischen Hochschulen oder Universitäten neuerdings ihre Ausgestaltung gefunden haben oder von Tag zu Tage mehr zu einer Erledigung drängen. Dabei darf ich erwähnen, dafs für mich allerdings eine ganz besondere Veranlassung gegeben ist, vor Ihnen über diese Gegenstände zu reden. Denn was mich bestimmt hat, in meiner Stellung als Universitätsprofessor mit den Jahren fortschreitend an derartigen Fragen thätigen Anteil zu nehmen, das ist, dafs ich als Sohn Ihrer Stadt die Jugendeindrücke, die ich von hier mitnahm, in treuem Gedächtnisse behalten habe und nun versuche, dieselben in den Verhältnissen, auf die ich einzuwirken vermag, zur Geltung zu bringen. Ich bitte Sie von vornherein überzeugt zu sein, dafs trotz der abstracten Richtung, welche meine eigene Entwickelung genommen hat, niemand Ihren Redner übertreffen soll in unmittelbarer Liebe und Wertschätzung des technischen Berufes.

Aber darum ist mein Standpunkt allerdings kein einseitiger, und eben hierin, dafs ich das eine will, ohne das andere zu vernachlässigen, mag eine gewisse Schwierigkeit liegen, der ich bei meinen Bestrebungen gelegentlich begegnet bin. Vielleicht darf ich auch hier an eine zugleich persönliche und örtlich bedingte Erinnerung anknüpfen, die zwar lange zurückliegt, aber des allgemeinen Interesses nicht entbehrt. Es sind ziemlich 30 Jahre her, dafs ich die Ehre hatte, dem damaligen Regierungspräsidenten dahier, Herrn v. Kühlwetter, vorgestellt zu werden. Herr v. Kühlwetter hatte sich in seiner vorherigen Stellung in Aachen ganz besonders um das Zustandekommen der dortigen Technischen Hochschule bemüht und war an dem Gedeihen derselben noch immer interessirt. Er entwickelte mir mit beredten Worten die Bedeutung der Technischen Hochschule, indem er auseinandersetzte, es gäbe zwei Arten getrennter höchster wissenschaftlicher Bildung, die technisch-naturwissenschaftliche und humanistische; dem entsprechend müsse es auch zweierlei getrennte höchste Unterrichtsanstalten geben. Ich habe damals, so gut ich es konnte, hiergegen protestirt und möchte heute, wo ich es mit mehr Aussicht auf Erfolg thun kann, meine Verwahrung vor der Öffentlichkeit wiederholen. Die enge Verbindung, in welche Herr v. Kühlwetter die technischen Wissenschaften mit den Naturwissenschaften brachte, ist ja vortrefflich und ganz in

unserem Sinne, wir möchten aber darum den Contact mit den übrigen Wissenschaften, die man die Culturwissenschaften nennen könnte, nicht verlieren. Wir möchten an der Auffassung festhalten, daſs die Wissenschaft ihrem Wesen nach einheitlich und allumfassend ist, und daſs die Trennung in Gebiete nur wegen der beschränkten Leistungsfähigkeit des einzelnen hat eintreten müssen. So zweifellos es ist, daſs die Specialisirung mit der Weiterentwickelung der Wissenschaft immer mehr fortschreiten wird, so wird es doch auf die Dauer wahr bleiben, daſs allemal die fruchtbarsten Anregungen von den Nachbargebieten aus erfolgen.

Wenn ich nunmehr, hochgeehrte Anwesende, zu specielleren Betrachtungen übergehen darf, so will ich ausdrücklich vorausschicken, daſs ich nicht als Vertreter der Universitäten spreche, auch nicht als Anwalt der Technischen Hochschulen, sondern als ein Mann, der nach beiden Seiten Verbindungen hat und sich das Recht wahren möchte, den Blick auf das Ganze zu richten. Leider ist es im Laufe eines kurzen Vortrags ganz unmöglich, alle Gesichtspunkte hervorzukehren, die wesentlich scheinen mögen, zumal die Fäden der Entwickelung vielfach durcheinanderlaufen. Ich muſs vielmehr meine Betrachtungen von vornherein stark eingrenzen. So werde ich, was die Technische Hochschule angeht, wesentlich vom Standpunkt der Maschinenbauabteilung aus argumentiren (die ja wohl allgemein zur Zeit das lebhafteste Interesse auf sich zieht). Bei der Universität aber werde ich überhaupt nur solche einzelne Punkte hervorheben können, deren Berücksichtigung durch den Vergleich mit der Technischen Hochschule in erster Linie gegeben erscheint. Dabei knüpfe ich überall gerne an den Zustand an, wie er etwa zu Anfang der 70er Jahre herrschte.

Die moderne Entwickelung der Technischen Hochschule setzt mit dem Zeitraume, den wir sonach betrachten, eigentlich erst ein und ist dann entsprechend dem rapiden Anwachsen unserer Industrie quantitativ und intensiv eine ganz auſserordentliche gewesen. Hat sich doch die Frequenz der Technischen Hochschulen allein im letzten Jahrzehnt mehr als verdreifacht! Es ist von hier aus verständlich, daſs die Kreise der Technischen Hochschule von besonderer Zuversicht erfüllt sind, daſs sie ein gemeinsames Vorwärtsstreben und ein Gefühl der Solidarität nach auſsen hin beseelt, um welche man sie nur beneiden kann. Andererseits ist beinahe selbstverständlich, daſs gerade die Raschheit der Entwickelung manche innere Reformen, die notwendig sein mögen, zurückgeschoben hat. Will man im einzelnen sorgfältig bessernd vorgehen, wenn von Semester zu Semester die Neuanlagen, die man eben erst geschaffen, sich immer wieder als nicht ausreichend erweisen?

So ist denn auch die groſse Änderung, von der ich hier in erster Linie zu berichten habe, weniger das Product planmäſsiger

Erwägungen, als das Resultat des Zwanges der Umstände. Ich erwähnte bereits die Auffassung früherer Jahre, der zufolge die Technische Hochschule naturwissenschaftliche und technische Bildung, beide in höchster Entwickelung, vereinigen sollte. Man könnte dies das französische Ideal nennen, denn das Vorbild der École polytechnique in Paris, aus welcher neben hervorragenden Ingenieuren beispielsweise immer auch Mathematiker ersten Ranges hervorgegangen sind, ist hierfür mafsgebend gewesen. Die Grundlage der École polytechnique ist die Zulassung einer ganz begrenzten Schülerzahl auf Grund strengster Examina; sie ist dabei durchaus eine Vorbereitungsschule für den höheren Staatsdienst, nicht nur für die private Industrie. Es ist verständlich, dafs die deutschen Hochschulen bei ihrer viel freieren Organisation und ihrer allgemeineren Zweckbestimmung immer mehr dahin gedrängt wurden, sich solche Ziele zu stellen, welche durch die unmittelbaren Anforderungen der Praxis nahegelegt werden. Gedenken wir zunächst der positiven Wendung, welche von hier aus in die Wege geleitet wurde. Man trat dafür ein, dafs es mit dem Zeichnen und Construiren der Maschinen allein nicht gethan sei, ebensowenig mit einer abstracten Theorie, die vielleicht von unzutreffenden Voraussetzungen ausgeht, dafs Laboratorien geschaffen werden müfsten, in welchen die Studirenden den Betrieb der lebendigen Maschine und die Beanspruchung des Materials unmittelbar beobachten und nachprüfen könnten. Einen letzten wichtigen Anstofs haben diese Bestrebungen durch die Chicagoer Ausstellung erfahren, die für viele deutsche Ingenieure die Gelegenheit abgegeben hat, das gerade in dieser Richtung besonders entwickelte amerikanische Unterrichtswesen an Ort und Stelle kennen zu lernen. Wer wollte die hiermit bezeichnete Tendenz tadeln, die vielleicht umgekehrt noch sehr viel weiter verfolgt werden sollte? Der Naturforscher und der Mediciner am wenigsten, denn bei ihnen ist der Grundsatz, dafs alles Unterrichten von der Anschauung der Dinge selbst ausgehen solle, längst zur Geltung gelangt. Aber mit dieser positiven Wendung Hand in Hand ging eine negirende Tendenz, die Zurückdrängung der allgemeinen Vorbereitungsstudien. Was lange unter der Oberfläche geschlummert hatte, das brach mit elementarer Gewalt hervor, der Gegensatz zwischen den Ingenieuren und den Mathematikern über das Mafs und die Art der für den Ingenieur erforderlichen mathematischen Vorbildung. Wir haben hierüber, wie ich schon andeutete, in Braunschweig eine allerdings nicht formelle, wohl aber thatsächliche Übereinstimmung erzielt. Ich möchte dieselbe in den folgenden beiden Sätzen resumiren: erstlich, dafs der mathematische Unterricht an der Technischen Hochschule nicht abstract erteilt werden soll, sondern den Bedürfnissen und dem Ideenkreise des Lernenden angepafst werden mufs, dann aber, dafs die Studien der Technischen Hochschule ohne eine breite

mathematische Grundlegung unmöglich gedeihen können, und Mathematik niemals ohne Anstrengung gelernt werden kann. Ich meine wohl, dafs diese beiden Sätze, die ja ziemlich selbstverständlich klingen, den Streit principiell regeln, und ich kann auch zufügen, dafs auf Grund derselben an verschiedenen Stellen eine gedeihliche Weiterarbeit begonnen hat. Jedenfalls hat der Kampf überall seinen Höhepunkt überschritten. Um so lebhafter aber treten nun zwei weitere Fragen in den Vordergrund, bei deren Erledigung Mathematiker und Ingenieure einträchtig zusammengehen können, die Abgrenzung der Hochschulen nach unten hin und ihre Entwickelung nach oben. Über beide hier einige Bemerkungen!

Die Technik gebraucht zweifellos eine grofse Zahl von praktisch erzogenen Ingenieuren ohne weitgehende wissenschaftliche Ausbildung. Aber die Candidaten für derartige Stellungen drängen sich doch gern auf die Technische Hochschule, weil es vornehmer aussieht und nach einer ziemlich verbreiteten Meinung die spätere Carrière erleichtert. Ihnen kommt das Verhalten zahlreicher Kreise entgegen, die an einer unterschiedslosen Vermehrung der Frequenz der Technischen Hochschule interressirt sind. Diese Momente wirken dahin oder drohen dahin zu wirken, den Hochschulunterricht unter Verkennung seiner eigentlichen Aufgaben auf ein niederes Niveau herabzudrücken. Hier hat eine entschiedene Reform einzusetzen, und es besteht auch alle Hoffnung, dafs es geschieht. Dieselbe darf sich aber nicht darauf beschränken, dafs die Hochschule verschärfte Aufnahmebedingungen stellt, vielmehr ist die Forderung hinzuzufügen, dafs der Staat der Entwickelung mittlerer technischer Fachschulen (also der Technica, wie sie wohl genannt werden) noch viel mehr Aufmerksamkeit schenkt als bisher. Es handelt sich hier, wie wohl ohne besondere Ausführung ersichtlich ist, nicht nur um eine Lebensfrage der Hochschulen als solcher, sondern ebenso sehr um die gesunde Entwickelung der Industrie selbst.

Unter denselben Gesichtspunkten stellen wir dann noch die zweite, sozusagen complementäre Forderung, dafs nämlich aus dem immer noch grofsen Kreise derjenigen, welche die Technische Hochschule mit Fug und Recht besuchen, eine kleinere Zahl wesentlich weiter zu fördern ist als die Gesamtheit, damit sie Führer auf dem Gebiete wissenschaftlichen Fortschritts werde. Es ist das so zu sagen, die Wiederaufnahme des Pariser Ideals in einer unseren heimischen Verhältnissen angepafsten Form. Beispielsweise wird hier eine weit entwickelte Mathematik am Platze sein, die sich allerdings nur nach Seiten der Anwendungen, nicht in abstracter Richtung erstrecken soll. Wie notwendig diese ganze Forderung ist, mag daraus hervorgehen, dafs dieselbe, soviel zu sehen, von allen in Betracht kom-

menden Ingenieurkreisen erhoben wird. Aber es stellt sich ihr allerdings eine doppelte Schwierigkeit entgegen. Zunächt müfste eine Reihe neuer Lehrstellen geschaffen und mit geeigneten Kräften besetzt werden. Denn die jetzt vorhandenen Docenten sind durch die aufserordentliche quantitative Entwickelung der Hochschule so überlastet, dafs ihnen für einen weitgehenden Specialunterricht thatsächlich keine Zeit bleibt. Ferner aber wird es möglicherweise schwer halten, bei den Zuhörern gegenüber dem mächtig entwickelten Streben ihrer Umgebung nach praktischer Bethätigung für die stillere und zunächst entsagungsvollere Thätigkeit eingehender wissenschaftlicher Untersuchungen viel Raum zu gewinnen. Es ist daher die Frage aufgeworfen worden, ob man diesen Teil der Ingenieurbildung nicht lieber den Universitäten überweisen solle. Es ist dies dann so verstanden worden, als ob die Universitäten eine Entwickelung der Technischen Hochschulen in dem besagten Sinne mit Mifsgunst aufnehmen würden, als wenn sie jede Art der höchsten wissenschaftlichen Ausbildung sich als Monopol sichern wollten. Da mein Name mit diesen Erörterungen einmal verbunden ist, so will ich doch hier in unzweideutiger Weise die Erklärung wiederholen, die ich schon öfters bei anderen Gelegenheiten abgab, dafs ich auch bei dieser Frage für die Entwickelung der Technischen Hochschule eintrete. Unbeschadet aller Verbindungen, die man zwischen Universität und Technischer Hochschule in Zukunft möglicherweise wird herstellen wollen, empfehle ich den Angehörigen der Universität fürs erste, dahin zu arbeiten, dafs die Wissenschaft überall da, wo sie hingehört, auch voll zur Geltung kommt, dafs der Gegensatz zwischen Theorie und Praxis, den man ja nie völlig aus der Welt schaffen wird, und die beide einander doch so nötig haben, nicht zu einer Zerreifsung unseres höheren Unterrichtes führt. Ein Betonen dieses Grundsatzes von Seiten der Universität erscheint mir viel wichtiger als die Verteidigung sogenannter Vorrechte. Übrigens gehe ich so weit, mir von Einrichtungen der geplanten Art an der Technischen Hochschule eine wohlthätige Rückwirkung auf die Universität selbst zu versprechen; pflegt doch in menschlichen Dingen etwas Concurrenz allemal nützlich zu sein. Die Technischen Hochschulen werden allerdings einige Energie einsetzen müssen, um hier durchzudringen. Denn es handelt sich um eine Forderung, deren hohe Bedeutung für die Qualität unserer industriellen Leistung schliefslich nur derjenige voll ermessen kann, dem eine gewisse Reife des wissenschaftlichen Urteils zukommt, eine Forderung also, die nicht eigentlich populär verständlich ist.

Indem ich mich nun zur Universität wende, lade ich Sie zunächst ein, den Vergleich der Technischen Hochschule mit der medicinischen Facultät zu machen. Sie haben bei letzterer alles das,

was wir bei der Technischen Hochschule vermifsten, vor allen Dingen eine genaue, vielleicht übertriebene strenge Abgrenzung nach aufsen hin. Hierin drückt sich in charakteristischer Weise das höhere Alter der Institution aus. Im übrigen aber ist unverkennbar, dafs bei der medicinischen Facultät hinsichtlich der centralen Aufgabe ein weitgehender Parallelismus mit derjenigen der Technischen Hochschule besteht: hier wie dort soll eine gröfsere Zahl junger Männer in relativ kurzer Zeit so weit durchgebildet werden, dafs sie später in der Lage sind, einen verantwortungsvollen Beruf selbständig auszuüben. Es wäre interessant, diesen Vergleich ins einzelne zu verfolgen und zu sehen, wie analoge Ursachen bei aller äufseren Verschiedenheit analoge Wirkungen hervorrufen. Ich rechne dahin den fest geregelten Studienplan, welcher der Individualität des Studirenden in den ersten Semestern nur wenig Freiheit läfst, das Zwischenexamen und anderes mehr. Ich meine, die Gegenüberstellung mufs jedem deutlich machen, dafs zwischen den Aufgaben der Technischen Hochschule und denjenigen der Universität in keiner Weise eine solche principielle Verschiedenheit besteht, wie oft gemeint wird. Nicht viel anders wird das Resultat herauskommen, wenn wir die juristische, die theologische Facultät zum Vergleich heranziehen. Es ist nicht so, dafs die eine Anstalt schlechtweg für die Praxis vorbereitet und die andere die reine Wissenschaft lehrt, sondern beide haben ganz allgemein die Aufgabe, durch wissenschaftliche Studien die Grundlage für die spätere höhere Berufsthätigkeit zu schaffen. Einzig die philosophische Facultät scheint mit dem so formulirten Satze nicht recht übereinzustimmen. Es ist eine merkwürdige Fügung, dafs die Technische Hochschule mit keinem anderen Teile der Universität in unmittelbaren Contact kommt, als gerade mit der philosophischen Facultät. Ich möchte Sie bitten, mit mir jetzt speciell diejenigen Studien der philosophischen Facultät ins Auge zu fassen, welche am weitesten nach der rein akademischen Seite verschoben sind, nämlich die Studien unserer Lehramtscandidaten.

Wir haben da zunächst wieder einer wichtigen äufseren Entwickelung der letzten Decennien zu gedenken, ich meine die Entstehung unserer heutigen Praktica und Seminare. Der traditionelle Bann des geschriebenen und einfach vorzulesenden Collegheftes ist längst gebrochen und an die Seite des freien Lehrvortrages ist der persönliche Gedankenaustausch von Docent und Student getreten, durch welchen der letztere zum selbständigen Denken und womöglich zum selbständigen Arbeiten angeleitet werden soll. Wer längere Jahre hindurch die Universität nicht besucht hat, wird erstaunt sein, zu sehen, wie weit dieser Umwandelungsprocefs vorgedrungen ist. Wir haben jetzt an zahlreichen Universitäten z. B. für Mathematik, für classische Philologie, für die verschiedenen neueren Sprachen,

Geschichte u. s. w. nicht nur Seminarbibliotheken, sondern Seminararbeitsräume, in welchen den reiferen Studenten alles für sie wichtige Material in liberalster Weise zur Verfügung gestellt wird (von der Ausstattung der hier in Betracht kommenden naturwissenschaftlichen Institute ganz zu schweigen).

Die Absicht bei Gründung der Seminare ist ursprünglich jedenfalls gewesen, den späteren Lehrer unmittelbar für seinen Beruf besser vorzubereiten. Inzwischen hat die Entwickelung einen anderen Verlauf genommen, sie ist ganz wesentlich der Steigerung der rein wissenschaftlichen Studien zu gute gekommen. Eine früher unbekannte Energie des Unterrichtsbetriebes hat Platz gegriffen, verbunden mit weitgehender Specialisirung und Individualisirung. Es ist fast so, als sollten die sämtlichen Studenten zu wissenschaftlichen Forschern von selbständiger Bedeutung ausgebildet werden!

Wollen wir diese Erscheinung richtig beurteilen, so müssen wir uns über ihre eigentliche Wurzel klar sein. Nicht das Andrängen irgend welcher äufserer Forderungen, sondern der wissenschaftliche Enthusiasmus hat dieselbe geschaffen und hält sie aufrecht. Bemerken Sie, dafs die Wirksamkeit des Docenten dabei in keiner Weise controlirt oder honorirt wird, sondern gänzlich seiner persönlichen Initiative überlassen ist. In diesem Hervortreten ausschliefslich idealer Momente liegt eine Stärke und eine Bedeutung der Institution, die nicht überschätzt werden können. Aber allerdings hat sich die Institution zu einseitig entwickelt. Man mufs fragen, ob nicht das mittlere Unterrichtsbedürfnis der Mehrzahl unserer Studenten zu Gunsten der höheren Leistung einer Minderzahl zu sehr zurückgedrängt wird, ob die frühzeitige Specialisirung nicht gelegentlich der allgemeinen Grundlegung, ob die einseitige Betonung der wissenschaftlichen Forschung nicht der Freude am späteren Lehrberuf schadet. Sie haben hier, wie ich kaum hervorzuheben brauche, das genaue Gegenbild zum Betrieb der Technischen Hochschule. Während wir bei letzterer die Einführung eines Specialunterrichts, also, um es prägnant auszudrücken, gerade des Seminarwesens in einem gewissen Umfange postuliren mufsten, handelt es sich hier darum, dafs die Specialcurse nicht andere wichtige Seiten des Unterrichtes ersticken und damit schliefslich (wegen ungeeigneter Ausbildung zahlreicher Candidaten) ihre eigene Wirksamkeit in Frage stellen.

Wie sollen wir ändern? Vielleicht, dafs eine bemerkenswerte Einrichtung, die man in den letzten Jahren geschaffen hat, von selbst eine gewisse Besserung herbeiführt. Nach dem Vorbilde der Mediciner und Theologen etc. finden jetzt auch die Gymnasiallehrer alljährlich Gelegenheit, in geeigneten Feriencursen die Beziehung zur Universität und zur Wissenschaft wieder aufzufrischen. Die Universitätsprofessoren sind in diese Entwicklung bereitwillig eingetreten, weil in ihnen der lebhafte Wunsch besteht, den wissen-

schaftlichen Gedanken, mit denen sie sich beschäftigen, nach aufsen hin, in das praktische Leben hinein, eine mehr unmittelbare Wirksamkeit zu verschaffen, als augenblicklich statt hat. Aber die Einrichtung kann nicht ohne Rückwirkung auf die Docenten selbst bleiben, indem sie denselben greifbar vor Augen stellt, wie weit sich der Universitätsunterricht, den die Teilnehmer der Curse genossen haben, bewährt hat, und ob derselbe nicht vielfach ganz anders gefafst werden mufs, wenn er im späteren Berufsleben auf die Dauer wirksam sein soll, wie wir es doch alle anstreben.

Also eine Correctur durch Bezugnahme auf den Schulbetrieb, wie sich derselbe in Wirklichkeit gestaltet! Aber allerdings genügt mir dieselbe noch nicht; ich wünsche, dafs unsere Docenten weiter blicken und sich die Frage vorlegen, welches die voraussichtliche Entwicklung unserer höheren Schulen in den kommenden Decennien sein wird, und ob sie den Studirenden das Rüstzeug, dessen diese im Hinblick hierauf bedürfen, wirklich in die Hand geben. Ich möchte die Überlegungen, die hier entstehen, sofort sehr verallgemeinern und für die Entwicklung unserer Universitäten hier um so mehr eine grofse, weittragende Forderung aufstellen, als diese durch den Vergleich mit den Technischen Hochschulen, der uns heute beschäftigt, besonders nahe gelegt wird. Indem die Universitäten den wissenschaftlichen Betrieb auf den überkommenen Gebieten steigerten, haben sie zu wenig Ausschau nach neuen Gebieten gehalten, die der Fortschritt unserer allgemeinen Cultur in den Vordergrund gerückt hat. Ich verlange eine durchgreifende Erweiterung der Universitäten nach der modernen Seite hin, eine volle wissenschaftliche Berücksichtigung aller Momente, die in dem hochgesteigerten Leben der Neuzeit als mafsgebend hervortreten.

Die so formulirte Forderung kann des Beifalls gerade der Fernerstehenden von vornherein ziemlich sicher sein, und es wird genügen, dass ich auf ein, zwei Beispiele exemplificire. Betrachten Sie etwa die Entwicklung des modernen Verkehrs, durch die uns fremde Völker, fremde Verhältnisse in unmittelbare Nähe gerückt sind, die uns früher gewissermafsen nur dem Namen nach bekannt waren. Soll das auf unsere sprachlichen, auf unsere historischen, auf unsere juristischen Studien ohne Einflufs bleiben? Man sagt, dafs unsere Officiere nach dem Kriege von 1870/71 eifrig begonnen haben, russisch zu lernen. Warum sind die Universitäten nur erst so wenig in die entsprechende Bahn eingelenkt? Oder nehmen Sie andererseits und ganz besonders den Aufschwung unserer Technik. Mögen sich die Universitäten immerhin um die Ausbildung der Ingenieure keine Sorge machen, weil diese den Technischen Hochschulen anheim gegeben ist, sollen aber darum unsere Mathematiker (insbesondere diejenigen, die berufen sein werden, an technischen

Anstalten zu wirken), unsere späteren Beamten, welche ihre Stellung im öffentlichen Leben doch nach allen Richtungen ausführen sollen, während ihrer Universitätszeit hiervon gar nichts erfahren? Die Antwort auf diese Fragen liegt in der That auf der Hand, soweit es sich um das allgemeine Princip handelt. Die Schwierigkeiten beginnen aber in dem Augenblick, wo man versucht, der Ausführung näher zu treten. Dies Eine ist jedenfalls klar, dafs es sich um eine aufserordentliche Erweiterung des Lehrgebietes der Universität und dementsprechend um eine weitergehende Specialisirung oder Gliederung der Universitätsstudien handelt. Aber die Anforderungen, welche entstehen, sind so zahlreich, die Verhältnisse, um die es sich handelt, noch so wenig methodisch geklärt, der Kreis der Lehrenden wie der Lernenden noch so wenig vorbereitet, dafs es ganz unmöglich scheint, ohne weiteres einen allgemeinen Organisationsplan aufzustellen. Es wird darauf ankommen, dafs wir in ein Versuchsstadium eintreten, dafs wir von vielen Punkten aus, hier von der einen, dort von der anderen Seite aus, wie gerade die Gelegenheit gegeben sein mag, die Inangriffnahme des Programms beginnen.

Es gereicht mir zu besonderer Befriedigung, hier mitteilen zu können, dafs meine Universität Göttingen seit einigen Jahren in diese Bewegung eingetreten ist. Um nur eins zu nennen, so ist es jetzt gelungen, beim physikalischen Institute Laboratoriumseinrichtungen zu schaffen, vermöge deren unsere Studirenden der Mathematik und Naturwissenschaft in der Lage sind, die grofsartigen physikalischen Processe, welche sich in unseren Wärmemotoren und unseren Dynamomaschinen abspielen, eingehend kennen zu lernen und messend zu verfolgen. Ich erwähne dieses Beispiel aus doppeltem Grunde. Zunächst, weil es ein positiver Schritt ist, durch den wir eine nähere Beziehung der Universität zum Ingenieurwesen anbahnen, dann aber, weil wir diesen Fortschritt, wie wir dankbar und rühmend anerkennen müssen, der privaten Initiative verdanken. Eine Anzahl hervorragendster Ingenieure und Firmen ersten Ranges hat sich zu einer Gesellschaft vereinigt, die uns nicht nur die erforderlichen Mittel gewährt, sondern uns auch mit ihrem Rate unterstützt. Da haben Sie den gewünschten Contact mit dem heutigen Leben in voller, ich möchte sagen, in idealer Gestalt. Vielleicht wird Sie noch besonders interessiren, wenn ich zufüge, dafs das Unternehmen ursprünglich von Düsseldorf aus in die Wege geleitet wurde. Möge dasselbe zahlreiche, glänzende Nachfolge finden! Die höheren Unterrichtsanstalten sind in Deutschland ja zunächst Staatsanstalten, und wir wissen den aufserordentlichen Vorteil, der hierin für die Sicherheit und die Ordnung des Betriebes und die gleichförmige Berücksichtigung aller anerkannten Bedürfnisse liegt, voll zu schätzen. Aber das schliefst nicht aus, dafs auch bei uns für das opferwillige Eintreten einzelner Raum genug ist, nämlich überall da, wo es sich,

wie im vorliegenden Falle, um Neubildungen handelt, bei denen der Staat mit einer endgültigen Beschlufsfassung noch zurückhalten mufs.

Sie haben nun alle die Einzelheiten vor sich, hochgeehrte Anwesende, die ich Ihnen heute vorlegen wollte, und es erübrigt, dafs ich Ihnen einiges Wenige über die Beziehung der beiden Anstalten, der Technischen Hochschule und der Universität, zu einander sage. Directe Verbindungen haben in vergangenen Jahren nur in sehr geringem Mafse bestanden, soweit etwa, als sich aus dem Umstande ergab, dafs die Professoren der Mathematik, der Physik und der Chemie zwischen beiden Anstalten gelegentlich wechselten. Ob die Gesinnungen, welche die Anstalten dabei gegen einander hegten, besonders freundliche waren, kann bezweifelt werden: die Universität war geneigt, in der jüngeren Schwester einen Emporkömmling zu erblicken, und diese wieder empfand mit einiger Erregung die historische Vorrechtsstellung der älteren Anstalt. Es scheint mir unzweifelhaft, dafs es bei einem solchen negativen Verhalten fortan nicht sein Bewenden haben darf. Ich hoffe, Ihnen nachgewiesen zu haben, dafs die beiden Anstalten nicht nur zusammengehörige Zielpunkte verfolgen, sondern dafs sie, wenn sie ihre Interessen richtig verstehen, sich immer mehr auf einander angewiesen sehen; sie müssen um ihrer selbst willen daran gehen, Arbeitsmethoden, Auffassungen, Kenntnisse, schliefslich auch Persönlichkeiten von einander zu entlehnen. Um noch einmal das Wichtigste zu wiederholen: die Technischen Hochschulen brauchen zur Entwicklung ihres Specialunterrichts Einrichtungen nach Art der Universitäten, diese letzteren wieder dürfen gegenüber den Fortschritten des Ingenieurwesens nicht länger die unbeteiligten Zuschauer spielen. Als man vor Decennien unternahm, die bis dahin bestehenden Gewerbeschulen zu Technischen Hochschulen zu entwickeln, da hat man die letzteren nach einigem Schwanken nicht an die Universitäten angeschlossen und die technischen Unterrichtseinrichtungen, welche bis dahin in ziemlich grofser Zahl an den Universitäten bestanden, verkümmern lassen. Es war ein verhängnisvoller Schritt, der ja der kräftigeren Entwicklung des technischen Unterrichtswesens zeitweise zu gute gekommen sein mag, der aber auch ein gut Teil all' der Mifsstände und Schwierigkeiten zur Folge gehabt hat, unter denen wir heute leiden. Jedenfalls scheint jetzt, wenn nicht alle Zeichen trügen, die Zeit gekommen, um die Kluft, die man damals geschaffen, wieder zu überbrücken! Das Erste, auf alle Fälle Erwünschte und auch Erreichbare dürfte sein, dafs jede Anstalt bemüht sein soll, unbeschadet ihrer eigenen Zweckbestimmung sich der anderen anzunähern. Aber man kann fragen, ob man nicht weiter gehen soll, ob es wirklich auf die Dauer unmöglich sein wird, die Technischen Hochschulen doch noch, wenn auch nur organisatorisch, als technische Facultäten an die Universitäten anzuschliefsen. Es ist auch viel davon die

Rede, an einer Universität, welche von allen bestehenden Technischen Hochschulen abgetrennt liegt, und bei der die Vorbedingungen gegeben scheinen, versuchsweise eine technische Facultät zu begründen. Ich betrachte es bei der heutigen Gelegenheit nicht als meine Aufgabe, zu derartigen Vorschlägen, welche neuerdings von sehr bemerkenswerten Seiten gemacht werden, Stellung zu nehmen. Mir genügt, den Gedanken von der inneren Zusammengehörigkeit, von der Solidarität der beiden Anstalten hier vertreten zu haben. Möge dieser Gedanke in der Öffentlichkeit seinen Weg machen; dann haben wir die gesunde Grundlage für alle Organisationen, welche die Zukunft bringen wird.

Der Begriff der n-fachen stetigen Mannigfaltigkeit.

Von **E. Jürgens** in Aachen.

Bekanntlich stellt Riemann in seinem aus dem Jahre 1854 stammenden Habilitationsvortrage als wesentliches Kennzeichen einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auf, dafs sich die Ortsbestimmung in derselben auf n Gröfsenbestimmungen zurückführen lasse. Diese Begriffserklärung fand zwar zunächst allgemeine Aufnahme, fiel aber in sich zusammen, als Georg Cantor im Jahre 1877 (Borchardt's Journal, Bd. 84, pag. 242) die Möglichkeit zeigte, die Punkte eines Quadrates oder Würfels zu numeriren, ihre Lage durch eine einzige reelle Zahl auszudrücken. Aus der Cantor'schen Abhandlung folgte die Notwendigkeit einer genaueren, sorgsameren Fassung des Dimensionsbegriffes, etwa einer Ergänzung der Riemann'schen Erklärung durch Hinzunahme einer weiteren Forderung. Letzteren Weg zu betreten lag nahe; auch war es kaum fraglich, wie die Ergänzung zu lauten haben werde; man brauchte nur noch eine Voraussetzung ausdrücklich hinzuzunehmen, welche so nahe lag, dafs sie schon stillschweigend wiederholt in Anwendung gekommen war; nämlich man brauchte nur noch zu fordern, dafs der Ortsbestimmung durch n Coordinaten der Charakter der Stetigkeit anhaften müsse; und es ist möglich, dafs auch Riemann dieses als etwas Selbstverständliches angenommen hat, um so mehr, als er bei den einleitenden Betrachtungen, welche ihn zur Aufstellung seiner Definition führen, die n-fache Mannigfaltigkeit aus der $(n-1)$-fachen durch einen stetigen Übergang hervorgehen läfst. Indessen die ganze Bedeutung und Notwendigkeit dieser Forderung ist Riemann zweifelsohne nicht klar gewesen, sonst hätte er es sicherlich nicht unterlassen, sie in seine Erklärung ausdrücklich mit hineinzunehmen. Auch brachte die Cantor'sche Abhandlung jedenfalls vielen Mathematikern eine grofse und hochinteressante Überraschung.

Durch die Aufnahme der Stetigkeitsbedingung wird nun aber der Begriff einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit erheblich verwickelter, als es sonst der Fall wäre; denn die Eigenschaft der Stetigkeit ist keineswegs von so einfacher Art wie die der Eindeutigkeit. Bei den Punkten des Quadrates und des Würfels kommt uns freilich die geometrische Anschauung zu Hülfe und lehrt in allgemein verständlicher Weise, was unter einem stetigen Zusammenhange und einer kleinen Verschiebung des Punktes in seinem Gebiete zu verstehen ist. Wäre dem nicht so, dann könnte man leicht etwa auf folgende Definition verfallen: der Quadratpunkt werde in Cantor'scher Weise numerirt und durch eine Zahl λ bestimmt, in gleicher Weise der Würfelpunkt durch eine Zahl μ; man könnte nun für den Quadratpunkt wie für den Würfelpunkt eine Verschiebung klein nennen, wenn dabei die Änderung von λ, bezw. μ klein ist; bei dieser unserer geometrischen Anschauung freilich widersprechenden Definition würden dann die Punkte des Quadrats und die Punkte des Würfels in eine gegenseitig eindeutige und zugleich stetige Zuordnung gebracht werden können. Aus dieser Betrachtung erhellt nun so viel: soll überhaupt bei einer Mannigfaltigkeit von Dingen, seien es Punkte, Farben, Functionsverhältnisse oder dergleichen, von einer n-fachen Ausdehnung nach Art der Riemann'schen Auffassung die Rede sein, so mufs für die betreffende Mannigfaltigkeit der Begriff des stetigen Zusammenhanges und damit zugleich auch der Begriff einer kleinen Verschiebung der in ihr vorkommenden Elemente bereits feststehen oder doch in einer naturgemäfsen und anschaulichen Weise festgestellt werden können.

Für solche und nur für solche stetig zusammenhängende Mannigfaltigkeiten möge nun als Merkmal der n-fachen Ausdehnung die Forderung aufgestellt werden: zwischen den Elementen derselben und n reellen Zahlen $x_1, x_2, \dots x_n$ läfst sich eine auf Gegenseitigkeit beruhende sowohl eindeutige wie stetige Zuordnung treffen.

Diese Erklärung hat jedenfalls nur dann einen Sinn, wenn für eine gegebene stetig zusammenhängende Mannigfaltigkeit von Dingen die Zahl n nur einmal auftreten kann; es mufs also, soll überhaupt die Erklärung als zuverlässig und in sich gefestigt gelten, erst der Beweis geführt werden, dafs nicht etwa gleichzeitig verschiedene Werte von n vorhanden sein können; es mufs gezeigt werden, dafs zwei Gebilde, deren Elemente beziehentlich durch n reelle Coordinaten $x_1, x_2, \dots x_n$ und durch m reelle Coordinaten $y_1, y_2, \dots y_m$ in eindeutiger und stetiger Weise bestimmt werden, unter sich, falls die Zahlen m und n von einander verschieden sind, keine eindeutige und stetige Zuordnung zulassen, oder, was dasselbe ist, es mufs gezeigt werden, dafs zwischen n reellen Zahlen $x_1, x_2, \dots x_n$ und m reellen Zahlen $y_1, y_2, \dots y_m$ keine auf Gegenseitigkeit beruhende zugleich eindeutige und stetige Beziehung stattfinden kann.

So viel ich weifs, ist der allgemeine Beweis hierfür noch nicht erbracht worden. Wohl haben schon gleich in den Jahren 1878 und 1879 Thomae (Göttinger Nachrichten 1878, pag. 466), Netto (Borchardt's Journal, Bd. 86, pag. 263) und G. Cantor (Göttinger Nachrichten 1879, pag. 127) Beweise veröffentlicht; und da auch in der Mathematik das gedruckte Wort, zumal wenn es von angesehenen Autoren herrührt, gern gläubige Aufnahme findet, so ist es erklärlich, dafs seitdem die ganze Frage als bereits erledigt gegolten hat, und dafs hervorragende Mathematiker jene Arbeiten noch neuerdings einfach citiren. Um so mehr aber ist es an der Zeit, dem entgegenzutreten und es gerade hier in der Deutschen Mathematiker-Vereinigung auszusprechen, dafs mit jenen Beweisen die Sache keineswegs ihren Abschlufs gefunden hat.

Auf die Hinfälligkeit des von Thomae gegebenen allgemeinen Beweises hat schon Lüroth 1878 auf der Naturforscherversammlung zu Cassel (s. das Tageblatt dieser Versammlung 1878) hingewiesen. Um aber zu erkennen, dafs auch die Beweise von Netto und von Cantor nicht stichhaltig sind, mufs man sich die eigenartigen Schwierigkeiten, welche bei dem allgemeinen Beweise des Satzes zu überwinden sind, vergegenwärtigen.

Zwei Umstände erschweren hauptsächlich die Untersuchung.

Liegt eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit vor, und werden nach irgend einem Gesetze Elemente in ihr bestimmt, so ist es fraglich, welcher Art das durch diese Elemente gebildete Teilgebiet ist, ob demselben überhaupt eine bestimmte Ausdehnung zuzuschreiben ist, deren Ordnungszahl dann vermutlich nur von Eins bis n gehen könnte, oder ob nicht vielmehr der Ausdehnungsbegriff auf das Teilgebiet unanwendbar ist, so dafs es lediglich nur als ein unendliches System von Einzelelementen, sagen wir etwa als ein System von unzählig vielen Punkten oder auch als ein System von unendlich vielen Linien oder Flächenstücken aufgefafst werden kann. Vielleicht erscheint das Teilgebiet als eine Combination von Punkten und geschlossenen oder nicht geschlossenen Linien. Ob nun bei einer solchen Mannigfaltigkeit von einer stetigen Ausdehnung die Rede sein kann, ist im gegebenen Falle erst näher zu prüfen. Es genügt also nicht, wenn das betrachtete Teilgebiet etwa aus einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit herausgegriffen ist, blofs auf die beiden Möglichkeiten, das System habe die gleiche Ausdehnung wie die Punkte einer Linie oder wie die Punkte einer Fläche, Rücksicht zu nehmen; vielmehr bleibt noch die dritte Möglichkeit offen, dafs das Gebilde gar keine bestimmte stetige Ausdehnung hat; es könnte etwa ein ausdehnungsloser Teil einer Fläche sein. Da dann drei Möglichkeiten vorliegen, so folgt aus dem Beweise, dafs die erste Möglichkeit auszuschliefsen sei, noch nicht das Eintreten der zweiten Möglichkeit; vielmehr müfste noch das Nichteintreten der dritten

gezeigt werden, und eben diese letzte Möglichkeit auszuschliefsen ist die Hauptschwierigkeit, insbesondere auch dann, wenn es sich um die Grenzpunkte eines Teilgebietes handelt.

Eine weitere Schwierigkeit liegt in dem Auftreten unendlich vieldeutiger Functionen. Wann ist solchen Functionen Stetigkeit zuzusprechen, und wann gilt für sie der für eindeutige stetige Functionen fundamentale Satz über die Annahme eines jeden Zwischenwertes zwischen irgend zwei von der Function angenommenen Werten? Sicher gilt dieser Satz nicht ohne weiteres, wie folgendes Beispiel darthut.

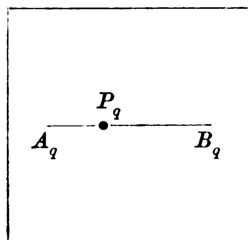
Die unabhängige Veränderliche x möge alle Werte annehmen, für welche die Bedingung $1 < x < 2$ erfüllt ist; und zu einem Werte der Veränderlichen x seien als Werte der Function y alle irrationalen Zahlen, welche zwischen $\frac{3}{8}x$ und $\frac{5}{8}x$ liegen, zugeordnet. Dieser Function kommt Stetigkeit zu, wenn man die Stetigkeit einer vieldeutigen Function dadurch definirt, dafs bei genügend kleiner Änderung der unabhängigen Veränderlichen die neuen Werte der Function in beliebig vorgeschriebener Nähe der Gesamtheit der ursprünglichen Werte liegen. Auch liegt hier in der vorgeschriebenen Nähe eines jeden ursprünglichen Wertes der Function ein neuer Wert derselben, und zwar sowohl für vorangehende wie für nachfolgende Werte von x. Dennoch findet der Zwischenwertsatz nicht statt, weil rationale Zahlenwerte von der Function überhaupt nicht angenommen werden. Auch lehrt, nebenbei bemerkt, dieses Beispiel, dafs bei vieldeutigen stetigen Functionen es nicht immer möglich ist, aus den Werten der Function einen so auszusondern, dafs derselbe ein eindeutiger und stetiger Zweig der Function wird.

Mit den hervorgehobenen beiden Umständen hängen die Bedenken, welche gegen die Beweise von Cantor und Netto zu erheben sind, eng zusammen. Bei der Netto'schen Beweisführung wird auf die dritte Möglichkeit der Ausdehnungslosigkeit der auftretenden Teilgebiete zu wenig Rücksicht genommen; und was den von G. Cantor gegebenen Beweis betrifft, so ist in demselben eine schwer auszufüllende Lücke; es fehlt der Nachweis, dafs bei der Beziehung zwischen den beiden Gröfsen z' und Z' letztere stetig von der ersteren abhängt, welcher Nachweis um so gröfsere Schwierigkeiten bieten dürfte, als Z' eine vieldeutige Function von z' ist.

Das Fehlen des allgemeinen Beweises verleiht den Beweisen für die zuerst in Betracht kommenden Einzelfälle ein erhöhtes Interesse.

Die uns zuerst entgegentretende Frage ist: Kann zwischen den Cartesischen Coordinaten der Punkte einer Geraden und der Punkte eines Quadrates eine eindeutige und stetige Beziehung bestehen? Diese Frage ist nun sofort, und zwar mit Nein zu beantworten.

Dies kann in verschiedener Weise bewiesen werden; doch stützt sich der Beweis wohl meist auf den genannten Zwischenwertsatz, welcher überhaupt von fundamentaler Bedeutung ist. Entsprechen einander die Punkte P_q und P_l, so wird, wie aus dem Zwischenwertsatze folgt, der Linie $A_q B_q$ (vgl. die Figur) eine ganze, den Punkt P_l enthaltende, zusammenhängende Strecke auf der Linie entsprechen müssen; es können also wegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit den übrigen Quadratpunkten in der Nähe von P_q keine Punkte der Linie in der Nähe von P_l mehr entsprechen, woraus die Unmöglichkeit einer eindeutigen und stetigen Abbildung zwischen den Punkten der Linie und des Quadrates klar und deutlich hervorgeht.





Es ist von Interesse, an dieser Stelle die Peano-Hilbert'sche Abbildung (mathematische Annalen Bd. 36 und 38) zum Vergleich herbeizuziehen. Bei derselben ist die Abhängigkeit des Quadratpunktes vom Geradenpunkte bekanntlich eine eindeutige und stetige; bei der Umkehrung jedoch entsprechen einem Quadratpunkte entweder ein Punkt der Geraden oder aber zwei Punkte der Geraden oder endlich deren vier; obwohl nun, oder, besser gesagt, gerade weil diese Mehrdeutigkeit eine beschränkte ist, indem sie sich nämlich auf solche Quadratpunkte, deren Coordinaten durch Brüche mit einer Potenz von Zwei im Nenner dargestellt werden, beschränkt, kann von Stetigkeit keine Rede sein; denn bei einer Vierwertigkeitsstelle der Function liegen zwar die neuen Functionswerte in beliebiger Nähe der Gesamtheit der alten Werte, sobald der Quadratpunkt nur hinreichend wenig verschoben wird, nicht aber findet dieses an einer Stelle des Quadrates statt, zu der bloſs ein oder zwei Punkte gehören. Der Zwischenwertsatz braucht darum hier nicht zu gelten; und in der That sieht man sofort, daſs er unmöglich für eine im Quadrat gezogene Linie Geltung haben kann, weil sonst ein ähnlicher Schluſs wie vorhin möglich wäre.

Mit der fest gegründeten Erkenntnis, daſs zwischen den Punkten einer Linie und einer Fläche keine eindeutige und stetige Beziehung stattfinden kann, tritt eine gewisse Beruhigung, wohl auch Ernüchterung der ganzen Frage gegenüber ein, indem man nun ohne weiteres gerne geneigt ist, auf eine allgemeine Unmöglichkeit derartiger Beziehungen zu schlieſsen.

Daſs diese Vermutung für die Fläche eines Kreises und den Körper einer Kugel zutrifft, dafür sind schon im Jahre 1878 von

Lüroth (Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät in Erlangen vom 8. Juli 1878) und von mir (siehe das Tageblatt der Naturforscherversammlung zu Cassel 1878 und meine bei Teubner 1879 gedruckte Abhandlung: Allgemeine Sätze über Systeme von zwei eindeutigen und stetigen reellen Functionen von zwei reellen Veränderlichen) Beweise gegeben worden, welche strenge sein dürften. Sie sind aber keineswegs so einfach, wie man von vornherein erwarten sollte. Sie bedienen sich beide eines ähnlichen Verfahrens, als es für die Herleitung des Zwischenwertsatzes gebraucht wird. Wie bei diesem die Linie in viele Teile von unbeschränkt wachsender Anzahl zerlegt wird, so wird auch die Fläche in unzählige Elemente von gegebener, übersichtlicher Gestalt zerlegt, und diese Flächenelemente werden in gewisser Weise aneinandergesetzt und ihre Begrenzung, deren Gestalt von übersichtlicher Art ist, insofern sie aus einfach verlaufenden Linienteilen besteht, in Betracht gezogen. Da zeigt dann eine genauere Untersuchung, dafs bei der vorausgesetzten eindeutigen und stetigen Abbildung einem ebenen in der Kugel liegenden Flächenstücke bereits ein Teil der Kreisfläche entsprechen würde, der ein zweifach ausgedehntes Stück ganz in sich enthält, was offenbar nicht angeht, indem ja dann für die Bilder derjenigen Punkte der Kugel, welche in unmittelbarer Nähe jenes Flächenstückes liegen, der erforderliche Platz fehlen würde.

Weitere Einzelfälle sind seitdem anscheinend nicht behandelt worden; wenigstens ist mir nichts davon bekannt.

Über eine einfache Gruppe von 504 Operationen.

Von **Robert Fricke** in Braunschweig.

Der Vortrag entwickelte eine concrete Bedeutung derjenigen einfachen Gruppe G_{504}, welche vor fünf Jahren durch Cole aufgefunden wurde, und die übrigens auch bereits in gruppentheoretischen Untersuchungen Mathieu's aus dem Jahre 1861 auftritt.

Man gelangt zur G_{504} von Seiten der arithmetischen Definition der Gruppe der Dreiecksfunction $s\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}; J\right)$, welche vom Vortragenden in Bd. 41 der Math. Annalen entwickelt wurde. Innerhalb dieser Gruppe giebt es nämlich eine ausgezeichnete Congruenzuntergruppe zweiter Stufe Γ_{504} des Index 504, deren complementäre G_{504} eben unsere obige Gruppe ist. Vom Discontinuitätsbereich der Γ_{504} aus gelangt man daraufhin (wie der Vortrag näher ausführte) in besonders durchsichtiger Weise zu allen wesentlichen Sätzen über Structur und Erzeugung der G_{504}.

Andererseits ergab der gedachte Discontinuitätsbereich, als Riemann'sche Fläche aufgefafst, eine algebraische Bedeutung der G_{504}. Als niederste Resolvente des Galois'schen Problems vom Grade 504 fand sich die nachfolgende Gleichung neunten Grades:

$$J : J-1 : 1 = 16(3u^3 + 10u^2 + 8u + 4)^3 \\ : (63u^4 + 140u^3 + 168u^2 + 96u + 32)^2 \\ : 9u^7(48u^2 + 39u + 24),$$

zu welcher bereits 1888 E. Goursat von anderer Seite, nämlich von der Transformationstheorie der Dreiecksfunctionen geführt wurde (in den Acten der Finnischen Akademie Bd. 15).

Der Structur der G_{504} würde es alsdann entsprechen, wenn wir in folgender Art zu einem Functionensystem der G_{504} aufsteigen. Unter u eine einzelne Lösung der genannten Gleichung verstanden, ziehe man zuvörderst die 7te Wurzel:

$$\tau = \sqrt[7]{\frac{32u + 13 - i7\sqrt{7}}{32u + 13 + i7\sqrt{7}}}.$$

Neben τ sind alsdann noch drei Quadratwurzeln zu stellen, wozu man z. B. die folgenden benutzen kann:

$$\sqrt{\tau^4 - \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}\tau^3 - \tau^2 - \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}\tau + 1},$$

$$\sqrt{\varepsilon^4\tau^4 - \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}\varepsilon^3\tau^3 - \varepsilon^2\tau^2 - \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}\varepsilon\tau + 1},$$

$$\sqrt{\varepsilon\tau^4 - \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}\varepsilon^6\tau^3 - \varepsilon^4\tau^2 - \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}\varepsilon^2\tau + 1};$$

hierbei bedeutet ε die siebente Einheitswurzel $e^{\frac{2i\pi}{7}}$. Alle diese Wurzeln sind in der Dreiecksfunction $s\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}; J\right)$ eindeutig und setzen ein volles Functionensystem der Untergruppe Γ_{504} zusammen.

Über die Differentialgleichungen des Abel'schen Theoremes.

Von **Georg Landsberg** in Heidelberg.

Auf einer Riemann'schen Fläche vom Geschlechte p, welche über der z-Ebene ausgebreitet ist, seien

$$\varphi_1(z),\ \varphi_2(z),\ \cdots\ \varphi_p(z)$$

die Integranden der p linear unabhängigen Integrale erster Gattung. Dann besagt das Abel'sche Theorem für Differentiale erster Gattung, dafs die Summen

$$\text{(I)} \qquad \varphi_h(z_1)\, dz_1 + \varphi_h(z_2)\, dz_2 + \cdots + \varphi_h(z_n)\, dz_n = 0$$
$$(h = 1, 2, \cdots p)$$

sind, wenn man von einem beliebigen Polygon von n Punkten der Riemann'schen Fläche $z_1, z_2, \cdots z_n$ zu einem benachbarten Polygone $z_1 + dz_1, \cdots z_n + dz_n$ fortschreitet, welches dem ersten äquivalent ist; zwei Polygone heifsen äquivalent (oder corresidual), wenn es eine auf der Riemann'schen Fläche rationale Function x giebt, welche in allen n Punkten des ersten Polygones den gleichen Wert x_0, in allen n Punkten des zweiten den gleichen Wert x_1 empfängt. Die Wichtigkeit des Abel'schen Theoremes besteht nun aber bekanntlich darin, dafs die angegebene Beziehung umkehrbar ist: Bestehen die p Gleichungen (I) für zwei benachbarte Polygone von je n Punkten, so sind die Polygone äquivalent, und die Integralgleichungen des Systemes (I) geben hiernach die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Äquivalenz zweier Polygone der Riemann'schen Fläche.

Diese Sätze lassen sich nun in folgender Weise von Abel'schen Differentialen erster Gattung auf beliebige Abel'sche Differentiale übertragen. Es sei $\mathfrak{G}$ ein beliebig auf der Riemann'schen Fläche vorgegebenes Polygon von m Punkten, und es sei

$$\psi_1(z)\, dz, \; \psi_2(z)\, dz, \; \cdots \; \psi_q(z)\, dz$$

ein vollständiges System von Abel'schen Differentialen, welche nirgends aufser in dem Polygone $\mathfrak{G}$ unendlich werden, derart, dafs jedes derartige Differential auf eine und nur eine Weise auf die Form $(c_1\psi_1(z) + c_2\psi_2(z) + \cdots + c_q\psi_q(z))\, dz$ gebracht werden kann; dabei ist die Zahl $q = m + p - 1$. Bilden wir nun die q Differentialgleichungen:

$$\text{(II)} \qquad \psi_h(z_1)\, dz_1 + \psi_h(z_2)\, dz_2 + \cdots + \psi_h(z_n)\, dz_n = 0$$
$$(h = 1, 2, \cdots q),$$

so kann man zeigen, dafs dieselben befriedigt werden, wenn man von einem Polygone von n Punkten zu einem benachbarten und äquivalenten Polygone fortschreitet, und wenn überdies die Function x, welche die Äquivalenz vermittelt, die Eigenschaft hat, dafs ihr Zählerpolygon durch das gegebene Polygon $\mathfrak{G}$ teilbar ist. (Dieser Satz ist bereits gelegentlich von Herrn M. Noether, Math. Ann. Bd. 37, S. 475, (1890) aufgestellt worden.) Zwei äquivalente Polygone $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ von der besonderen Art, dafs

in der Schar der Polygone, die man erhält, indem man die Function $x = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}}$ einer wechselnden Gröſse x_0 gleich setzt, ein Polygon durch $\mathfrak{G}$ teilbar ist, mögen äquivalent im engeren Sinne genannt werden. Dann geben also die Differentialgleichungen (II) eine notwendige Bedingung für die engere Äquivalenz benachbarter Polygone. Dieser Satz läſst sich aber auch hier wieder umkehren; d. h.: Bestehen die Differentialgleichungen (II) für zwei benachbarte Polygone, so sind dieselben äquivalent im engeren Sinne des Wortes. Die Integralgleichungen des Systemes (II) geben hiernach die notwendige und hinreichende Bedingung für die engere Äquivalenz irgend zweier Polygone von je n Punkten, und die Gleichungen (II) lassen daher, ebenso wie die Gleichungen (I), bei beliebig vorgegebenen Anfangsbedingungen eine vollständige Integration durch algebraische Functionen zu.

Über die Theorie der algebraischen Functionen zweier Variablen.

Von **K. Hensel** in Berlin.

Während man bei der Entwickelung der analytischen Functionen einer Variablen x in der Umgebung einer beliebigen Stelle a als Entwickelungselement für die zugehörige Potenzreihe den Linearfactor $x - a$ $\left(\text{oder für } a = \infty \text{ den Factor } \frac{1}{x}\right)$ benutzt, d. h. diejenige rationale Function von x, welche in jener Stelle von möglichst niedriger Ordnung verschwindet, kann man für die analogen Entwickelungen der Functionen von zwei unabhängigen Variablen x, y als Entwickelungselement irgend eine irreductible Function $P(x, y)$ (z. B. $x^2 + y^2 - 1$) benutzen, welche also gleich Null gesetzt eine irreductible algebraische Curve $\mathfrak{P}$ definirt. Für alle Punkte jener Curve $\mathfrak{P}$ ist nämlich $P(x, y)$ die rationale Function niedrigster Ordnung, welche hier verschwindet. Von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet wird die Theorie der analytischen Functionen zweier Variablen genau so einfach und übersichtlich wie die von einer Veränderlichen; dies soll an dem Beispiele der rationalen und algebraischen Functionen zweier Variablen kurz dargelegt werden.

Es sei $P(x, y)$ irgend eine irreductible Function von x und y, und ν sei ihr Grad in y; dann kann zunächst jede rationale Function Z von x und y auf eine und nur eine Weise in eine Potenzreihe

(1) $$Z = P^{\varrho}(E_0 + E_1 P + E_2 P^2 + \cdots)$$

entwickelt werden, deren Coefficienten $E_0, E_1, \cdots$ ganze Functionen von niedrigerem als dem ν^{ten} Grade von y sind, so dafs allgemein:

$$E_i = a_0^{(i)} + a_1^{(i)} y + \cdots + a_{\nu-1}^{(i)} y^{\nu-1}$$

ist, und die Coefficienten $a_k^{(i)}$ rationale (ganze oder gebrochene) Functionen von x bedeuten. Eine solche Function E soll eine modulo $P(x, y)$ reducirte rationale Function von y und x genannt werden. Die ganze Zahl ϱ, welche positiv, negativ oder Null sein kann, heifst die Ordnungszahl von Z in Bezug auf P. P^ϱ ist dann einfach die höchste Potenz von P, welche in Z enthalten ist; es ist also

$$Z = P^\varrho \cdot \frac{f(x, y)}{g(x, y)},$$

wo f und g ganze Functionen von x und y sind, welche beide durch P nicht mehr teilbar sind.

Ist nun $\mathfrak{P}$ die Curve, deren Gleichung $P(x, y) = 0$ ist, so convergirt in der zu P gehörigen Entwickelung (1) die Reihe $E_0 + E_1 P + E_2 P^2 + \cdots$ von Z gleichmäfsig für alle Stellen (x, y) innerhalb einer endlichen Umgebung der Curve $\mathfrak{P}$, nämlich für alle diejenigen Punkte, für welche $|P(x, y)| < \delta$ ist, und δ eine endliche Gröfse bedeutet, welche sich beim Fortgange von einem Punkte zum anderen zwar ändert, aber stets oberhalb einer endlichen Grenze bleibt. Geometrisch gesprochen ist jener Convergenzbereich ein die Curve $\mathfrak{P}$ einhüllendes röhrenartiges Gebiet von allenthalben endlichem Querschnitte. Nur für eine endliche Anzahl von Punkten der Curve $\mathfrak{P}$ convergirt jene Entwickelung nicht, nämlich für alle diejenigen Stellen, für die die Coefficienten $a_i(x)$ unendlich grofs werden. Denkt man sich Z wieder in der Form $P^\varrho \cdot \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ geschrieben, so sind jene Ausnahmepunkte einfach die Schnittpunkte der Curven $g(x, y) = 0$ und $P(x, y) = 0$.

Es sei nun zweitens Z eine **algebraische** Function von x und y, also die Wurzel einer beliebigen Gleichung:

$$F(Z, x, y) = A_n(x, y) Z^n + A_{n-1}(x, y) Z^{n-1} + \cdots + A_0(x, y) = 0,$$

deren Coefficienten beliebige rationale Functionen von x und y sind. Ist dann wieder P eine beliebige irreductible rationale Function von x und y, so erhält man durch ein einfaches eindeutig bestimmtes Verfahren für Z eine Reihe:

$$(2) \qquad Z = P^{\frac{\varrho}{\alpha}} (E_0 + E_1 P^{\frac{1}{\alpha}} + E_2 P^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots),$$

welche im allgemeinen nach ganzen Potenzen von P fortschreitet ($\alpha = 1$). Nur für eine endliche Anzahl direct bestimmbarer Curven,

der sogenannten Verzweigungscurven, schreitet jene Entwickelung nach ganzen Potenzen von $P^{\frac{1}{\alpha}}$ fort, wo α eine der Zahlen 2, 3, $\cdots$ n bedeutet.

Die Coefficienten E_0, E_1, $\cdots$ sind hier sämtlich algebraische Functionen eines und desselben Körpers $K(\eta)$; sie haben nämlich die Form:

$$E_i = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}\eta + \cdots + a_{\sigma-1}^{(i)}\eta^{\sigma-1},$$

wo die Coefficienten $a_k^{(i)}$ modulo $P(x, y)$ reducirte rationale Functionen von x und y sind, und wo η einer irreductiblen Gleichung

$$\psi(\eta) = \eta^\sigma + B_1\eta^{\sigma-1} + \cdots + B_\sigma = 0$$

genügt, deren Coefficienten ebenfalls modulo $P(x, y)$ reducirte ganze Functionen von y bedeuten.

Für eine jede Primfunction $P(x, y)$ findet man so genau n solche conjugirte Entwickelungen Z_1, Z_2, $\cdots$ Z_n in der Weise, dafs man mit jeder vorgegebenen Genauigkeit die Gleichung erhält:

$$F(Z, x, y) = A_n(Z - Z_1)(Z - Z_2)\cdots(Z - Z_n).$$

Ist $P(x, y) = 0$ oder $\mathfrak{P}$ eine Verzweigungscurve der Ordnung α, und ist Z_1 die Entwickelung der einen Gleichungswurzel, welche nach Potenzen von $P^{\frac{1}{\alpha}}$ fortschreitet, so erhält man α conjugirte Wurzeln Z_1, Z_2, $\cdots$ Z_n aus dieser, indem man in der Entwickelung (2) die gebrochene Potenz $P^{\frac{1}{\alpha}}$ durch ihre α conjugirten Werte:

$$P^{\frac{1}{\alpha}},\ \omega P^{\frac{1}{\alpha}},\ \omega^2 P^{\frac{1}{\alpha}},\ \cdots\ \omega^{\alpha-1} P^{\frac{1}{\alpha}}$$

ersetzt, wo $\omega = \cos\frac{2\pi}{\alpha} + i\sin\frac{2\pi}{\alpha}$ eine primitive α^{te} Wurzel der Einheit bedeutet. Jene Reihen hängen also in der Umgebung der Verzweigungscurve $\mathfrak{P}$ genau ebenso unter einander zusammen wie die α Zweige einer algebraischen Function einer Variablen in der Umgebung eines α-blättrigen Verzweigungspunktes.

Sind aber weiter Z_1, Z_2, $\cdots$ Z_α die α zu einer Verzweigungscurve gehörigen Entwickelungen

$$P^\varrho\left(E_0(\eta) + E_1(\eta)P^{\frac{1}{\alpha}} + E_2(\eta)P^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots\right),$$

und ersetzt man in ihren Coefficienten $E_h(\eta)$ die algebraische Function η durch ihre σ conjugirten Werte η, η_1, $\cdots$ $\eta_{\sigma-1}$, so erhält man zu jeder dieser α Wurzeln σ conjugirte, also im ganzen $\sigma\alpha$ Wurzeln

$$Z_1^{(h)},\ Z_2^{(h)},\ \cdots\ Z_\alpha^{(h)}, \qquad (h = 0, 1, 2, \cdots \sigma - 1),$$

deren Entwickelungen die folgende Form haben:

$$Z_k^{(h)} = \omega^{k\varrho} P^{\varrho}\left(E_0(\eta_h) + E_1(\eta_h)\,\omega^k P^{\frac{1}{\alpha}} + E_2(\eta_h)\,\omega^{2k} P^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots\right),$$

welche also einfach aus der ersten Z_1 dadurch hervorgehen, daſs man die in ihr auftretenden algebraischen Gröſsen η und $P^{\frac{1}{\alpha}}$ unabhängig von einander durch ihre conjugirten ersetzt. Während also in der entsprechenden Theorie für eine Variable in der Umgebung eines α-blättrigen Verzweigungspunktes α Entwickelungen durch eine von ihnen mitbestimmt sind, sind hier $\sigma\alpha$ solche Entwickelungen zu einer unter ihnen conjugirt.

Ebenso wie die Entwickelungen der rationalen Functionen convergiren auch diese Reihen gleichmäſsig für alle Punkte in einer endlichen Umgebung der zugehörigen Curve $\mathfrak{P}$; aber auch hier ist eine endliche Anzahl von Ausnahmepunkten vorhanden, und zwar treten hier zu den schon in jenem Falle betrachteten Punkten noch diejenigen hinzu, wo die zu P gehörige Curve $\mathfrak{P}$ die Verzweigungscurven $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots \mathfrak{P}_\lambda$ des algebraischen Gebildes schneidet. Diese Stellen müssen für sich behandelt werden, worauf ich an anderer Stelle ausführlich eingehen werde.

Ich bemerke noch, daſs dieselben Betrachtungen unmittelbar auch auf algebraische Functionen beliebig vieler Variablen und auch auf die algebraischen Zahlen angewendet werden können, und daſs sie in diesem letzten Falle auf die neue Theorie jener Zahlen führen, auf die ich in der Braunschweiger Versammlung bereits hingewiesen hatte.

Über die Anwendung der Caporali'schen Abbildung des Strahlencomplexes zweiten Grades auf die Bewegung eines starren Körpers mit Freiheit vierten Grades.

Von **J. Cardinaal** in Delft (Holland).

1. Diejenigen von Ihnen, meine Herren, die im vorigen Jahre den Vortrag des Herrn Th. Reye auf dem internationalen Mathematiker-Congreſs in Zürich (Einige neue Eigenschaften des quadratischen Strahlencomplexes) angehört haben, haben die Bemerkung machen können, daſs das Studium dieser Complexe, trotz der Forschungen vieler hervorragender Mathematiker, doch noch nicht erschöpft ist. Herr Reye lenkte die Aufmerksamkeit auf die Beziehungen des Complexes zu Flächen zweiten Grades und Complextetraedern; ich möchte nun betonen, daſs auch in dem Gebiete der angewandten Mathematik die Complexe eine ausgedehnte Rolle spielen. Das

Studium dieser Anwendungen ist sehr erleichtert, seitdem R. Sturm in seinem grofsen Werke über Strahlengeometrie die Strahlencongruenzen und Complexe systematisch gegliedert hat. Es sei mir nun erlaubt, auf eine dieser Anwendungen näher einzugehen.

2. Bekanntlich haben die Arbeiten Sir R. St. Ball's über die Theory of Screws viele Berührungspunkte mit der Strahlengeometrie; so weit es den Strahlencomplex zweiten Grades betrifft, gilt dies vornehmlich von der Theorie der Bewegung mit Freiheit vierten Grades, d. h. der Bewegung, welche ein starrer Körper ausführen kann, wenn er sich um vier von einander unabhängige Schrauben bewegen kann. Alsdann ist Bewegung möglich um alle Schrauben des durch diese vier Schrauben bestimmten Systems vierter Stufe; das System ist ein Complex zweiten Grades. Zur genauen Kenntnis dieses Complexes gehört an erster Stelle die Kenntnis der singulären Fläche; den Untersuchungen Ball's zufolge ist dies das Cylindroid, dessen Erzeugende den Schrauben des Complexes reciprok sind. Ersichtlich haben wir also einen Complex, dessen singuläre Fläche, welche vierter Ordnung sein mufs, in eine Regelfläche dritter Ordnung und eine Ebene zerfällt; bei den Aufzählungen Weiler's und Sturm's ist dieser Complex aufgenommen und analysirt, nur dafs hier noch der besondere Fall eintritt, dafs die Regelfläche in ein Cylindroid übergegangen und die Ebene die unendlich entfernte Ebene ist.

3. Auch die Caporali'sche Abbildungsmethode des Complexes darf als bekannt angenommen werden, nur dafs bei der Anwendung auf diesen Fall auf einen besonderen Umstand Rücksicht genommen werden mufs. Dieser Umstand ist, dafs hier metrische Beziehungen zu beachten sind, die sonst nicht auftreten. Bei der Ball'schen Theorie bildet ja die Verteilung der Parameter der Schrauben über das Cylindroid einen Hauptpunkt der ganzen Untersuchung. Es ist nun meine Absicht, von diesem Standpunkte aus die Abbildungsmethode zu betrachten. Leider gestattet die beschränkte Zeit mir nur die Mitteilung einzelner Anwendungen; ich werde die Wahl so treffen, dafs die Abbildung der Schrauben, deren Parameter gegeben ist, in den Vordergrund tritt. Als einleitende Construction des Cylindroids bedarf es hier einer Construction, die zugleich die Parameter der Erzeugenden giebt.

4. Man denke sich demzufolge das Cylindroid construirt nach der Methode von Lewis, die hier in Kürze angedeutet werden möge.

Es seien [Fig. 1] d' die Doppelgerade; OG, OK die Schrauben mit dem gröfsten und kleinsten Parameter. Der Kreis (M) sei über GK als Durchmesser beschrieben. Nun gebe man der Ebene des Kreises eine Rotation um d' von der in der Figur gegebenen Stellung aus. Ist γ der Winkel, den die Ebenen in der zweiten und ersten Lage mit einander einschliefsen, so ziehe man aus K die Sehne KB, die mit KG den Winkel γ einschliefst, und aus B die Senkrechte BP

auf d'. Nun ist PB in der zweiten Lage die Erzeugende des Cylindroids, das φ^3 heifsen soll; zugleich giebt die Länge PB den Parameter für diese Erzeugende. Die zweite Leitgerade des Cylindroids ist die unendlich ferne Gerade d einer Ebene senkrecht auf d'. Die unendlich ferne Ebene U, die sich zu φ^3 als singuläre Fläche gesellt, wird von φ^3 in zwei conjugirten imaginären Erzeugenden geschnitten.

5. Da ich mich auf die Abbildung der Schrauben von gegebenem Parameter beschränken will, so genügt es, den Zusammenhang der Erzeugenden mit unter einander gleichen Parametern zu betrachten.

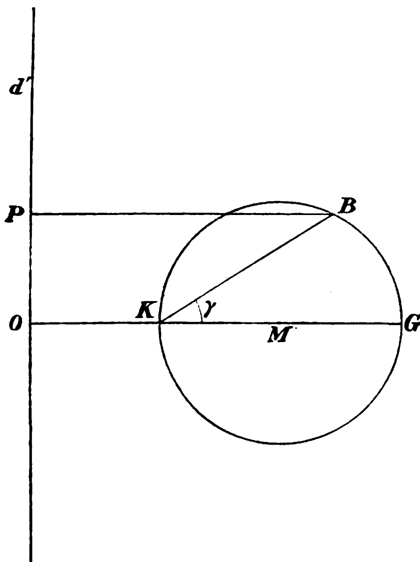


Fig. 1.

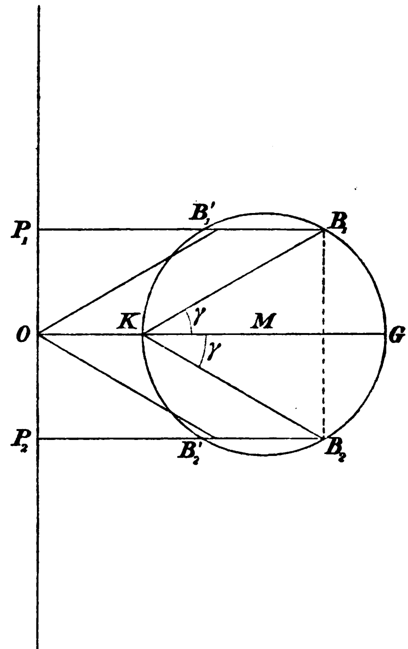


Fig. 2.

Jede zu dem Cylindroid reciproke Schraube mufs zwei solche Erzeugende schneiden, sie sind also die Axen eines Strahlennetzes, deren Strahlen aus Schrauben von unter einander gleichen Parametern bestehen. Der Parameter dieser Schrauben besitzt einen Wert, der dem der beiden Axen gleich und entgegengesetzt ist.

Von diesen Axenpaaren macht man sich auf folgende Weise eine geometrische Vorstellung [Fig. 2]. Man bringe durch O eine Ebene senkrecht zu d' und projicire darauf die Erzeugenden des Cylindroids. Der Kreis (M) giebt ein Bild dieser Projection. Man ziehe durch K zwei Sehnen KB_1 und KB_2 so, dafs $\angle B_1KM = \angle B_2KM = \gamma$

ist, und ziehe weiter $OB_1' \parallel KB_1$, $OB_2' \parallel KB_2$. Dreht man nun die Ebene des Kreises (M) um 90^0 um die Gerade OM als Axe, so sind OB_1' und OB_2' in der zweiten Lage die Projectionen von zwei Erzeugenden von φ^3, die zum Parameter $P_1B_1 = P_2B_2$ gehören, also von einem Axenpaar der jetzt betrachteten Strahlennetze.

Projicirt man auf diese Weise alle Erzeugenden von φ^3, so entsteht eine Strahleninvolution, deren conjugirte Strahlen Projectionen von je einem Axenpaare sind. Die Involution ist hyperbolisch, ein Doppelstrahl fällt längs OM, der andere steht senkrecht darauf.

Auf dem Kreise werden die conjugirten Punkte B_1, B_2 u. s. w. gefunden, wenn man eine Gerade $\parallel d'$ bewegen läſst. Da diese Gerade den Kreis nicht zu schneiden braucht, so bekommt man zugleich eine Vorstellung der conjugirt-imaginären Axenpaare.

6. Wir können jetzt die Caporali'sche Abbildungsmethode anwenden. In dem Raume Σ des Schraubencomplexes nehme man eines der betrachteten Axenpaare von φ^3, a und a' an; auf a nehme man einen Punkt A als Nullpunkt der Ebene $Aa' \equiv \alpha$. Durch A in α ist nun ein Gebüsch von Strahlengewinden bestimmt, jedem Gewinde entspricht eine Ebene in dem Raume Σ_1, einer Schraube entspricht ein Punkt. Die Einteilung der Schrauben in Σ, und demzufolge der Punkte in Σ_1, wird jedoch nur dann übersichtlich, wenn man die Hauptcurve der Abbildung näher betrachtet. Sie besteht, wie bei dem Falle einer beliebigen Regelfläche dritten Grades und beliebiger Ebene, aus drei Teilen, und zwar aus zwei Kegelschnitten K_d^2 und K_u^2, die zwei (in diesem Falle imaginäre) Punkte mit einander gemein haben, und einer Geraden l_1, die beide schneidet.

7. Die Bedeutung dieser Kegelschnitte und ihrer Ebenen zeigt sich aus der folgenden Betrachtung:

Jede Schraube der unendlich fernen Ebene U gehört zu einem Gewinde durch (A, α); es giebt deren ∞^2; also entspricht in Σ_1 den Schrauben von U eine Ebene, die Ebene des Kegelschnitts K_u^2.

Auf gleiche Weise entsprechen den zu d' parallelen Schrauben ∞^2 Punkte in Σ_1; da jedes Strahlennetz durch (A, α) eine Schraube parallel d' besitzt, so entsprechen diesen Schrauben die Punkte einer Ebene, der Ebene von K_d^2. Die Schnittlinie der beiden Ebenen entspricht dem Schraubenbüschel in U, dessen Scheitel der unendlich ferne Punkt D von d' ist.

Die Punkte der Hauptcurve entsprechen bekanntlich den Schraubenbüscheln von Σ, die mit dem Hauptbüschel (A, α) eine Schraube gemein haben. Die drei Teile der Hauptcurve entsprechen nun drei Hauptarten von Schraubenbüscheln in Σ. Man findet sie leicht durch die Bemerkung, daſs eine zu φ^3 reciproke Schraube zwei Erzeugende von unter einander gleichen Parametern schneidet und eine dritte senkrecht schneidet. Betrachtet man nun die Arten

der Schraubenbüschel, so ergiebt sich: K_u^2 enthält die Punkte, die den Schraubenbüscheln entsprechen, welche mit (A, α) eine Schraube gemein haben und aus parallelen Strahlen bestehen. K_d^2 enthält die Punkte, die den Büscheln entsprechen, die mit (A, α) eine Schraube gemein haben, und deren Ebenen parallel d' sind. l_1 endlich enthält die Punkte, die den Büscheln entsprechen, deren Scheitel sich auf a' befinden, und deren Ebenen folglich durch a gehen.

Die Schnittpunkte von K_u^2 und K_d^2 entsprechen den beiden Schrauben, in denen φ^3 die Ebene U schneidet, sie sind also imaginär, wenn bei der Abbildung reelle Punkte reellen Schrauben entsprechen sollen, und ebenso imaginäre Punkte imaginären Schrauben. (Der Schnittpunkt $\overline{l_1 K_u^2}$ entspricht der unendlich entfernten Geraden einer Ebene, die senkrecht d' ist, der Schnittpunkt $\overline{l_1 K_d^2}$ der Geraden d'.)

8. Bei den vorigen Betrachtungen ist es meine Absicht gewesen, Ihnen den Zusammenhang zwischen der allgemeinen Abbildungsmethode von Caporali und der Anwendung auf diesen Fall zu zeigen. Dem Zweck dieser Mitteilung gemäfs werde ich jetzt die Abbildung von Schrauben von gegebenem Parameter p betrachten. Diese Schrauben gehören zu einem Schraubennetz, dessen Axen diejenigen zwei Erzeugenden von φ^3 sind, deren Parameter gleichfalls den absoluten Wert p haben. Sie sind nach der mitgeteilten Methode zu finden. Die beiden Axen werden vorläufig reell angenommen.

Die ∞^2 p-Schrauben bilden ein Netz; ihnen müssen in Σ_1 ∞^2 Punkte entsprechen; jedes Schraubennetz hat weiter zwei Strahlen gemein mit einem Strahlennetz des Gebüsches (A, α); hieraus folgt:

Den p-Schrauben entsprechen in Σ_1 die Punkte einer Fläche zweiten Grades F_p^2.

9. Wir untersuchen jetzt, welchen Bedingungen F_p^2 unterworfen ist.

Wenn die Axen reell sind, so hat das Netz reelle Schraubenbüschel; jeder Strahlenbüschel hat mit einem Strahlengewinde (A, α) einen Strahl gemein, also entspricht dem Büschel eine Gerade g_1 in Σ_1; hieraus ergiebt sich:

Wenn das Netz der p-Schrauben reelle Axen besitzt, ist F_p^2 eine Regelfläche.

Auch die Gerade g_1 ist Bedingungen unterworfen; sie sind auf die folgende Weise zu finden:

Es sei P der Mittelpunkt des Büschels auf der Erzeugenden p, p' die Erzeugende, die mit p ein Axenpaar bildet; also ist

die Ebene des Büschels Pp'. Man ziehe die Gerade AP, sie schneide φ^3 noch in einem Punkte B auf einer Erzeugenden b. In der Ebene $APBb$ befindet sich ein Büschel paralleler Schrauben, zu dem eine Schraube des Büschels Pp', d. h. die senkrechte von P auf b, gehört. Die dem Büschel Pp' entsprechende Gerade g_1 schneidet also den Kegelschnitt K_u^2.

Man bestimme weiter die Schnittlinie q der Ebenen Pp' und α; q schneidet φ^3 in zwei Punkten je von a' und von p' und in einem dritten Punkte Q. Q ist der Scheitel eines Büschels, der einen Strahl mit (A, α) gemein hat; zu ihm gehört auch eine Schraube des Büschels Pp'. Die Gerade g_1 schneidet also auch den Kegelschnitt K_d^2.

Jetzt ist die Erzeugung der Fläche F_p^2 einleuchtend. F_p^2 ist eine Regelfläche, welche erzeugt wird von der Geraden, die sich so bewegt, dafs sie stets einen Punkt je mit K_u^2 und K_d^2 gemein hat.

10. Ist einmal die Erzeugung der Fläche F_p^2 gefunden, so sieht man nun leicht, dafs es für jeden Parameterwert eine Fläche zweiten Grades geben mufs; die Flächen bilden einen F^2-Büschel, dessen Grundcurve in die Kegelschnitte K_u^2 und K_d^2 zerfällt.

Es lassen sich nun leicht einige Eigenschaften dieses F^2-Büschels angeben, sie mögen hier mitgeteilt werden.

Der F^2-Büschel giebt eine Übersicht der Verteilung der Punkte im Raume Σ_1 und also der Schrauben von gegebenem Parameter im Raume Σ. Jede Fläche entspricht Schrauben von bestimmtem Parameter.

Ist die Fläche eine Regelfläche, so entsprechen die ihr gehörenden Geradenscharen den beiden Scharen von Schraubenbüscheln in Σ, deren Scheitel je auf einer Erzeugenden oder auf der ihr conjugirten von φ^3 sich befinden.

Auch giebt der F^2-Büschel ein Bild der Verteilung der reellen und conjugirt-imaginären Axenpaare. Wenn die Basiscurve eines F^2-Büschels in zwei Kegelschnitte entartet ist, so gehören zu ihm bekanntlich zwei Kegelflächen, die den Übergang bilden zwischen Regelflächen und Nicht-Regelflächen. Die ersten entsprechen den Schraubennetzen mit zwei reellen Axen, die zweiten den Netzen mit zwei conjugirt-imaginären Axen, die Kegelflächen den Schraubennetzen, deren Axen zusammenfallen. Die Punkte dieser letzteren entsprechen den Schrauben mit dem gröfsten oder kleinsten Parameter, die Punkte der Nicht-Regelflächen den Schrauben mit imaginären Parametern, die jedoch selbst reell sind.

11. Zu dem F^2-Büschel gehört auch die Fläche F_a^2, bestimmt durch K_d^2, K_u^2, l_1. Ihre Punkte entsprechen den Schrauben, deren Parameter a ist, ihre Geraden den Schraubenbüscheln des Netzes (a, a').

Diejenige Geradenschar von F_a^2, die aus Secanten von l_1 gebildet wird, entspricht den Schraubenbüscheln, deren Scheitel auf a' liegen. Alle Büschel haben einen Strahl mit dem Büschel (A, α) gemein, also werden die Strahlen des Hauptbüschels (A, α) durch die Geraden der genannten Schar abgebildet. Die Geraden von F_a^2, die mit l_1 zu derselben Schar gehören, entsprechen den Büscheln, deren Scheitel sich auf a befinden.

12. Sie werden die Bemerkung machen, meine Herren, dafs das, was ich Ihnen mitteilte, nur ein kleiner Teil der Abbildung eines Schraubensystems vierter Stufe ist. Es liegen viele Untersuchungen sehr nahe, von denen ich nur nenne die Untersuchung der weiteren in dem Schraubencomplex auftretenden Schraubennetze, der Regelscharen, die aus Schrauben gebildet werden, des Zusammenhanges mit anderen Abbildungsmethoden u. s. w. Die Mitteilung dieser Untersuchungen, mit denen ich mich zum Teil beschäftigt habe, zum Teil mich noch zu beschäftigen gedenke, würde mich hier aber zu weit führen.

Die Geometrie der Zwischenebene (und der Grenzfläche).

(Ein Beitrag zur elementaren Stereometrie der Lobatschewsky'schen Geometrie).

Von **Max Simon** in Strafsburg i. E.

Erklärung. Zwei Punkte A und B heifsen entsprechend in Bezug auf eine bestimmte Richtung, wenn $\overline{AB}$ die durch A und B zu dieser Richtung gezogenen Parallelen unter gleichen inneren Winkeln schneidet, oder was dasselbe ist, wenn die Symmetrieaxe des Punktepaares $A|B$ der Richtung parallel ist. Zeichen des Entsprechens: $A \sim B$.

1) Satz: Sind a, b, c drei zu je 2 Parallelen im Raume (d. h. liegt c aufserhalb der Ebene (ab)), und ist A auf $a \sim B$ auf b, und $B \sim C$ auf c, so ist $A \sim C$.

Beweis. Die Symmetrieaxen zu $A|B$ und $B|C$ in der Ebene ABC müssen sich schneiden. Nicht sich schneidend können sie nicht sein, da sonst ihr Abstand (Axe) auf den Symmetrieebenen von $A|B$ und $B|C$ zugleich senkrecht stünde. Wären sie parallel, so könnten a, b, c in einer Ebene liegen gegen die Voraussetzung, oder es müfsten die Symmetrieebenen von $A|B$ und $B|C$ sich als Ebenen von Winkeln mit parallelen Schenkeln schneiden, ihre Schnittlinie stünde aber auf ABC senkrecht, und ihr Fufspunkt wäre von ABC gleich weit entfernt, also müfsten die Axen von $A|B$ und $B|C$ sich dennoch schneiden, und ebenso die Symmetrieebenen von $A|B$, $B|C$

und $C|A$. Damit ist zugleich bewiesen, dafs die Punkte A, B, C stets auf Einem Kreise liegen, und dafs die 3 Symmetrieebenen sich in einer Geraden schneiden, der im Centrum auf ABC senkrechten, welche den Geraden a, b, c parallel ist.

Das Wesentliche des Beweises dieses Hauptsatzes fehlt bei Frischauf, der Beweis bei Lobatschewsky (geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien) ist fehlerlos, doch abhängig vom Parallelwinkel.

2) Sind A, B, C drei Punkte auf einem Kreise um M, so sind A, B, C paarweise entsprechend in Bezug auf jede der Richtungen des in M auf ABC errichteten Lotes. [Die 3 Symmetrieebenen schneiden sich in diesem Lot; zwei Gerade, welche derselben dritten in demselben Sinne parallel sind, sind es unter einander.]

Damit ist zugleich bewiesen:

Liegen A, B, C auf einer Abstandslinie, so sind die 3 Symmetrieebenen paarweise Nichtsichschneidende, deren gemeinsame Axe die Axe der Linien ist.

Liegen die drei Punkte auf einem Grenzkreis, so sind die drei Ebenen Zwischenebenen, d. h. sie haben nur den unendlich fernen Punkt in der Richtung der Radien gemeinsam.

3) Der Abstand zweier nichtsichschneidenden Geraden in zwei ebensolchen Ebenen liegt stets mit dem Abstand der beiden Ebenen in einer Ebene.

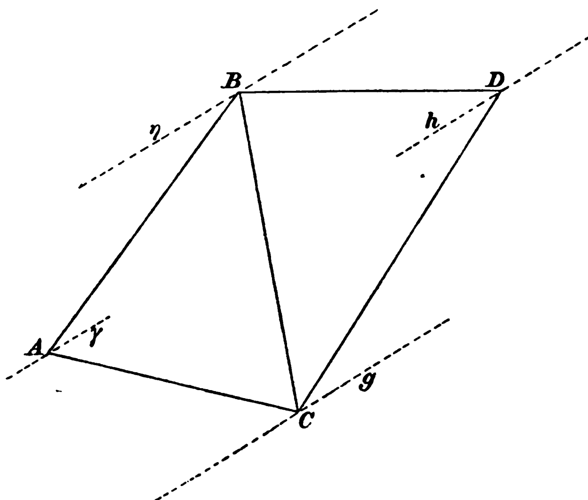


Fig. 1.

Sei Fig. 1 AB der Abstand beider Ebenen; g und h die Geraden. Fälle von A auf g das Lot AC und errichte auf AC in A das Lot γ in der Ebene (A, g), so steht γ auf der Ebene ABC senkrecht, und ebenso g. Das in B auf ABC errichtete Lot η liegt mit γ und mit g je in einer Ebene und als Lot auf AB in (B, h). Es sind η, γ, g drei paarweise Nichtsichschneidende (Insecanten), AB, AC, BC ihre Abstände. Ebenso sind

η, h, g drei paarweise Insecanten, BD, BC, DC ihre Abstände; es stehen also BA, BC, BD in B auf η senkrecht, also ist $ABCD$ ein ebenes Viereck.

Da alle zu derselben Geraden g einer von zwei insecanten Ebenen insecante in der anderen zu derselben Axe gehören, und diese durch den Fuſspunkt des Abstandes der Ebenen geht, wie eben bewiesen, so giebt Satz 3 eine Construction desselben.

Zusatz: Eine Ebene, welche zwei insecante Ebenen so schneidet, daſs die Summe der inneren Neigungswinkel zwei Rechte beträgt, geht durch die Mitte des Abstandes, und vice versa.

Die Zwischenebenen.

Die Ebenen aller Winkel mit paarweise parallelen Schenkeln schneiden sich in der Geraden, welche beiden Schenkelstrahlen zugleich parallel ist, und umgekehrt: Ebenen, welche sich schneiden, stimmen in den beiden Richtungen der Schnittgeraden überein; Ebenen, welche auf derselben Geraden senkrecht stehen, stimmen in keiner Richtung überein, sind nichtsichschneidend. Dazwischen giebt es Zwischenebenen, welche in einer Richtung übereinstimmen, wie man sofort sieht, wenn man dem Zusatz zu 2) die Fassung giebt:

4) Zwei Ebenen, welche auf derselben dritten senkrecht stehen und sie in Parallelen schneiden, sind Zwischenebenen.

Schnitten sie sich, so müſste ihre Schnittgerade auf der dritten senkrecht stehen und in ihrem Fuſspunkte die Parallelen sich schneiden.

5) Durch jeden Punkt auſserhalb einer Ebene giebt es zu ihr in jeder ihrer Richtungen eine und nur eine Zwischenebene (Abkürzung: Z.). Die Construction der einen ist nach Satz 4 evident. Wenn A der Punkt, ε die Ebene, fällt man von A auf ε das Lot AB, zieht durch B den Parallelstrahl BC, durch A zu BC den Parallelstrahl AD, errichtet in A auf BAD das Lot AX, so ist Ebene AXD nach 4) Z. von ε. Daſs sie die einzige ist, folgt unmittelbar daraus, daſs ABD auf ABX senkrecht steht, also die Projection von BA auf ADX in AD fällt; und daſs der Neigungswinkel der kleinste Winkel ist, den eine Gerade mit Linien der Ebene durch ihren Schnittpunkt bildet.

Folgerungen von 5): Sind zwei Ebenen Z. zur selben dritten in derselben Richtung, so sind sie untereinander Z. Durch jede einer Ebene parallele Gerade läſst sich zu ihr eine Z. legen.

Jede Ebene durch eine Gerade der gemeinsamen Richtung — Hauptgerade — auf der einen Z. schneidet die andere in einer Hauptgeraden. — Die Zwischenebenen vertreten völlig die Stelle der Parallelstrahlen in der Lobatschewsky'schen Planimetrie. —

In jedem Punkt der Z. zu einer Grundebene giebt es zwei

ausgezeichnete Richtungen: die gemeinsame oder Hauptrichtung und die auf ihr senkrechte, die Normale.

Jede Gerade ist entweder Hauptgerade oder nicht — Nebengerade —, und dann besitzt sie einen Punkt, den Hauptpunkt, für welchen sie selbst die normale Richtung ist.

(Dafs es nur einen Hauptpunkt giebt, folgt daraus, dafs nie zwei parallele Gerade auf derselben dritten senkrecht stehen.)

6) Wird eine Nebengerade einer von zwei Zwischenebenen auf die andere projicirt, so geht der Abstand der Geraden und ihrer Projection durch die Hauptpunkte beider Geraden.

Das vom Hauptpunkt A der Geraden n gefällte Projectionslot trifft ν in α (Fig. 2), dann steht nach 5) n auf der Ebene $(\alpha A, g)$ bezw. $(\alpha A, \gamma)$, wenn g und γ Hauptstrahlen sind, senkrecht, also auch ν.

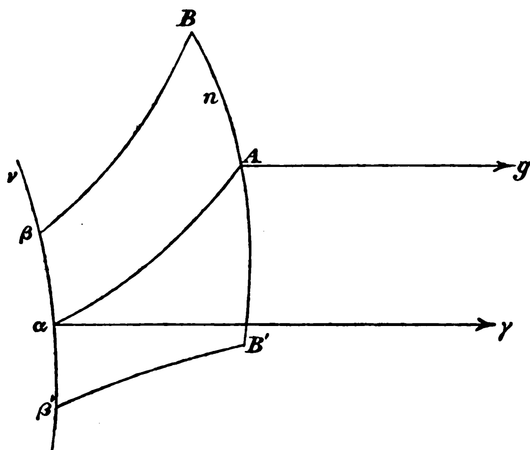


Fig. 2.

Dieser Satz führt die Aufgaben: „Zu einem gegebenen Winkel die Parallel-Distanz zu bestimmen“ und „zu zwei Insecanten den Abstand zu ermitteln“ auf einander zurück und löst die letztere ohne Hülfe der Abstandslinie. Die erstere wird räumlich ohne weiteres gelöst mit Hülfe des Satzes von den Ebenen der Winkel mit parallelen Schenkeln; die andere führt dann zur Aufgabe: „Durch zwei gegebene Insecanten n und ν die Zwischenebenen zu legen“. (Fig. 3.) Gegeben die Insecanten n und ν, construire die Ebene (n, ν), errichte auf sie in ν die auf (n, ν) senkrechte Ebene ε. Fälle von C, beliebig auf n, das Lot CD auf ν (welches zugleich Lot auf ε ist). Trage in C an CD den Parallelwinkel für die Distanz CD beliebig an, und fälle von D auf den freien Schenkel das Lot DF' und von F' auf CD das Lot $F'M$. Beschreibe um M mit $F'M$ in der auf CD senkrechten Ebene den Kreis M, fälle von D auf n die senkrechte Ebene, triff den Kreis in F bezw. φ, ziehe CF bezw. $C\varphi$, lege durch n und CF die Ebene, so ist dies die Zwischenebene; construire in (n, CF) die zu Winkel (n, CF) — $(n, C\varphi)$ — gehörige

Distanz auf n: CB; fälle von B auf ν das Lot $B\beta$, so ist $B\beta$ der Abstand.

Beweis: Es ist nur zu beweisen, dafs das in C auf der Ebene FCD errichtete Lot in die Ebene (n, CF) fällt. Errichtet man in dieser Ebene in C das Lot auf CF, so steht es auf DF senkrecht, weil DF auf der Ebene (n, CF) senkrecht steht, somit ist dieses Lot auch senkrecht auf FCD, also ist die Ebene (n, CF) Zwischenebene zu ε.

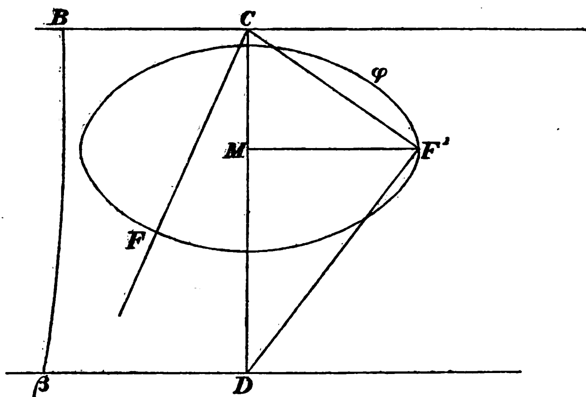


Fig. 3.

Hiermit ist zugleich die Aufgabe gelöst: „Den Abstand zweier insecanten Ebenen ohne Abstandslinie zu construiren“, und „die gemeinsame Richtung zweier Zwischenebenen zu finden.“

Werden zwei Z. von einer Ebene geschnitten, und ist eine der Schnittgeraden keine Axe, so sind die Schnittgeraden Insecanten.

7) Alle Geraden einer von zwei Z., welche Insecanten derselben Geraden der anderen sind, gehören zu derselben Axe, und diese Axe hat die Hauptrichtung.

Der Satz ist die Verallgemeinerung von 6) und kann auch lauten:

Construirt man zu zwei Insecanten zweier Z. den Abstand und errichtet in den Fufspunkten jeder Ebene das Lot auf der betreffenden Geraden, so haben diese Lote die Hauptrichtung, und die Ebene dieser Lote steht auf beiden Z. zugleich senkrecht (Normalschnitt).

Der Beweis folgt aus dem Satze über die drei Schnittgeraden dreier Ebenen und dem Satze: Steht eine von zwei Insecanten, deren Abstand in ε liegt, auf ε senkrecht, so auch die andere:

Jede Senkrechte auf einer der Axen in einer der Ebenen ist Insecante zu jeder Senkrechten auf der anderen Axe in der anderen Ebene.

8) Werden zwei Z. von einer Ebene nicht in Hauptlinien geschnitten, so ist die Summe der inneren Neigungs-

winkel nach der Seite des Parallelismus hin kleiner als zwei Rechte.

(Werden zwei parallele Geraden von einer dritten geschnitten etc.)

Seien (Fig. 2) n und ν zwei Insecanten zweier Z. ε und η; A und α ihre Hauptpunkte, also $A\alpha$ ihr Abstand; g und γ, die Hauptlinien in A und α, sind also auf n und ν senkrecht. Trägt man auf ν zu beiden Seiten von α gleiche Strecken ab bis β und β', so sind β und β' für die Hauptrichtung entsprechende Punkte (vgl. Erklärung). Errichtet man in β und β' Lote auf ν in der Ebene (ν, n), und schneiden sie n in B und B', so sind B und B' gleichweit entfernt von A, also auch entsprechend, und die Lote βB und $\beta' B'$ sind gleich lang.

Steht $A\alpha$ auf γ senkrecht, so ist ν die Projection von n auf η, und βB wie $\beta' B'$ sind ebenfalls Lote auf η; $g\gamma$ geht dann durch $A\alpha$ und ist Normalschnitt von ε und η.

9) Sind β und β' zwei entsprechende Punkte auf η, und errichtet man in ihnen die Lote auf η, und das in β schneidet ε in B, so schneidet das andere in B', und βB und $\beta' B'$ sind gleich.

10) Wenn zwei Lote auf einer von zwei Z. bis zur anderen gemessen gleich lang sind, so sind sowohl ihre Fufspunkte als auch ihre Endpunkte entsprechend.

Voraussetzung: βB und $\beta' B'$ senkrecht η und gleich lang; $\beta\beta'$ kann nicht die Hauptrichtung sein, weil sonst zwei Parallelen an zwei Stellen gleichen Abstand hätten. Sei β_2 der β entsprechende Punkt auf $\beta\beta'$, und $\beta_2 B_2$ das betreffende Lot, so müfste $\beta_2 B_2 = \beta B = \beta' B'$ sein, und es hätten drei Punkte einer Geraden von einer anderen gleichen Abstand, d. h. $\beta_2 \equiv \beta'$.

11) Errichtet man in zwei für irgend eine Richtung λ entsprechenden Punkten einer Ebene ε gleich lange Lote auf der Ebene (nach derselben Seite), und zieht durch ihre Endpunkte Parallelstrahlen zu λ, so ist die Ebene der Strahlen Z. zur Ebene ε in der Richtung λ.

12) Errichtet man auf drei Punkten eines Grenzkreises einer Ebene ε drei gleich lange Lote, so liegen ihre Enden auf einer Z. zu ε für die Axe des Grenzkreises.

(Grund: Satz 5.)

13) Die drei Endpunkte liegen wieder in einem Grenzkreis (S. 10).

14) Die Lote von zwei für die Hauptrichtung entsprechenden Punkten einer von zwei Z. auf die andere sind gleich lang, und ihre Fufspunkte sind entsprechend für die Hauptrichtung.

Sind (Fig. 4) α und $\beta \sim$ (stets gemeint: für die Hauptrichtung) in einer von zwei Z. η, und construirt man durch α und β die Normalschnitte mittelst der Lote αM und βN auf η, und in jedem zu α bezw. β den entsprechenden Punkt A bezw. B in ε, so sind A und $B \sim$ (entweder Congruenz der Streifen, oder Satz 1).

Man kann den Hauptsatz 1) hier direct beweisen für den Specialfall, dafs das Prisma rechtwinklig, und mittelst seiner allgemein.

15) Ein paar Normalschnitte eines Paares Z. bilden selbst wieder ein Paar Z. in gleicher Richtung.

(Ihre Schnittgerade müfste auf beiden ursprünglichen zugleich senkrecht stehen; auch direct S. 4.)

16) Das erste Paar ist wieder ein Paar Normalschnitte des zweiten (S. 5).

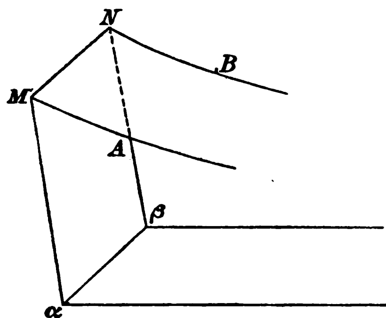


Fig. 4.

Folgerung: Auch $\alpha\beta$ und AB sind gleich, daher sind die Grenzbogen αA und βB, sowie die Bogen $\alpha\beta$ und AB einander gleich, und es stehen je zwei benachbarte auf einander senkrecht; danach ist die Existenz von Rechtecken auf der Grenzfläche nachgewiesen, und damit das Parallelenaxiom etc.

17) Das Viereck $\alpha AB\beta$ ist ein ebenes.

(Zusatz zu S. 7.) Im Viereck $\alpha AB\beta$ sind alle Winkel einander gleich, wegen der Doppelsymmetrie um die Axen je zweier gegenüberliegenden Seiten, welche von den Mittelschnitten ausgeschnitten werden; die Diagonalen sind gleich und halbiren einander. (Beweis wie in Simon, Elemente der Geometrie.) Ihr Schnittpunkt S ist der Mittelpunkt des dem Viereck umschriebenen Kreises, kurz: das ebene Viereck $\alpha AB\beta$, das dem Rechteck auf der Grenzfläche entspricht, hat alle Eigenschaften des euklidischen Rechtecks ohne die rechten Winkel.

Die Punkte über Kreuz A und β, B und α sind gleichfalls $\sim$. (Entweder nach 1), oder die Schnittgerade der beiden Mittelebenen geht durch S, hat die Hauptrichtung und steht auf $\alpha AB\beta$ senkrecht.) [Zwei Geraden zweier sich schneidender Ebenen, welche einander parallel sind, sind der Schnittgeraden parallel.]

18) Die Diagonalebenen ($A\,\infty$, $\beta\,\infty$) sowie ($B\,\infty$, $\alpha\,\infty$) bilden mit beiden Paaren Z. wechselweise gleiche Winkel.

19) Wird ein Paar Z. von einer Ebene in Hauptlinien geschnitten, so sind die Wechselwinkel gleich, oder was dasselbe ist, betragen die inneren Neigungswinkel zusammen zwei Rechte (Herstellung der Figur $\alpha AB\beta$).

20) Umkehrung des vorigen (Beweis: S. 8).

21) Legt man durch eine Hauptlinie a der einen von zwei Z. Schnittebenen, welche die andere in b und c schneiden, so ist die Summe der Neigungswinkel des Prisma (a, b, c) gleich zwei Rechten (S. 18).

22) In jedem dreiseitigen Prisma ist die Summe der drei Neigungswinkel der drei Seitenflächen gleich zwei Rechten. (Man lege durch a zu (bc) die Zwischenebene.)

23) Werden zwei Ebenen von einer dritten so geschnitten, dafs die Schnittlinien parallel und die Wechselwinkel gleich sind, so sind die geschnittenen Ebenen Z.

24) Schneiden sich drei Ebenen in drei Geraden, welche sich schneiden, so ist die Summe der drei inneren Neigungswinkel gröfser als zwei Rechte; schneiden sie sich in drei Insecanten, so ist diese Summe kleiner als zwei Rechte (drei zu je zwei Insecanten stehen auf derselben Ebene senkrecht). S. 22 und S. 24 zusammen umfassen alle Fälle und sind nach dem Drobisch-Möbius'schen Princip umkehrbar.

Man construirt ein paar Z. dadurch, dafs man in einer Ebene s zwei parallele Strahlen a und b zieht und durch a und b zu s die Lotgitterebenen $(l_a, a) \cdot (l_b, b)$ legt; diese beiden Zwischenebenen A und B begrenzen eine Configuration, welche man Raumstreifen nennen kann. Zieht man dann in s zum ebenen Streifen (ab) die Mittellinie m, welche a und b parallel ist, so ist die Lotgitterebene $(l_m, m) = M$ der Mittelschnitt des Raumstreifens, ist selbst zu A oder B eine Z. in gleicher Richtung, und der halbe Raumstreifen läfst sich mit dem ganzen zur Deckung bringen. Die Haupteigenschaft von M giebt der Satz:

Die Verbindungsstrecke zweier entsprechender Punkte in A und B wird von M halbirt.

25) M schneidet den zu zwei solchen Punkten gehörigen Streifen in der Streifenaxe.

Wird ein Paar Z. von einem in derselben Richtung parallelen zweiten Paar geschnitten, so lassen sich zu jedem Punkt α auf einer der vier Schnittparallelen die entsprechenden auf den drei anderen bestimmen. Diese vier Punkte α, A, β, B sind zu je zwei $\sim$, die vier Neigungswinkel betragen zusammen vier Rechte, die gegenüberliegenden Seiten und Winkel sind gleich, das Viereck hat alle wesentlichen Eigenschaften des Parallelogramms, aber es gilt der Satz:

26) Ausgenommen den Fall, dafs beide Paare sich rechtwinklig durchschneiden, sind alle entsprechenden Schnittvierecke windschief.

(Die Schnittlinie l der Mittelebenen geht durch die Mitte S_1 von αB und S_2 von $A\beta$ und steht auf beiden senkrecht; $S_1 S_2$ ist der Abstand von $A\beta$ und $B\alpha$.)

Die Sätze über die Zwischenebenen enthalten eigentlich die ganze Geometrie der Grenzfläche.

Die Grenzfläche (Horisphäre Lobatschewsky's, Fläche F Bolyai's) werde mit G bezeichnet.

S. 1[a]) Durch zwei Punkte einer Fläche G ist auf ihr nur ein Grenzkreis möglich (Satz 1).

S. 2[a]) Eine Ebene, welche mit G einen Punkt gemeinsam hat, schneidet G in einem Kreis bezw. Grenzkreis oder berührt sie.

Die Ebene ε gehe durch A auf G und nicht durch die zu A gehörige Axe a, dann läfst sich a auf ε projiciren in p, aufser wenn ε in A auf a senkrecht; dann liegt auf p noch ein Punkt B von G, denn wenn der Winkel zwischen p und a gleich φ, so ist $AB = 2\,d\varphi$ ($d\varphi$ Paralleldistanz zu φ), und dies ist nur 0, wenn φ gleich 90, wo also B mit A zusammenfällt, und unendlich, wenn $\varphi = 0$, d. h. ε parallel a. Die Mitte von AB sei M, die Senkrechte l in M auf AB in (a, p) ist dann parallel a, also eine Axe der G und zugleich als Projectionslot senkrecht ε. Jeder Punkt des um M mit MA in der Ebene ε geschlagenen Kreises liegt dann zugleich auf G, und jeder Punkt, der zugleich auf ε und G liegt, liegt auf diesem Kreise; denn wenn X ein Punkt des Kreises, so trifft das von M auf AX gefällte Lot AX in der Mitte μ, die Symmetrieebene η von AX enthält dann l. Die Parallele zu l durch μ in η ist parallel a, steht auf AX in der Mitte μ senkrecht, somit ist $X \sim A$ für Richtung a, d. h. X auf G. — Umgekehrt wenn Z ein Punkt, der zugleich auf ε und G liegt, v die Mitte von AZ, und ζ die Parallele durch v zu a oder l ist, so liegen ζ, l und das in v auf der Ebene ε errichtete Lot alle drei in einer Ebene; diese ist die Symmetrieebene von A und Z, und somit M von A und Z gleich weit entfernt.

Geht die Ebene ε durch a, so liegt nach Definition von G der ganze in ε durch A und a bestimmte Grenzkreis auf G, und nur dieser. Steht ε in A auf a senkrecht, so hat der gemeinsame Kreis den Radius O, die Ebene ist Tangentiale von G, und A.

Damit ist die Beziehung der Ebene, welche einen Punkt mit G enthält, in gegenseitig eindeutiger d. h. umkehrbarer Weise geordnet.

Folgerung. Eine Ebene, welche insecant zu einer Tangentialen von G ist und auf derselben Axe senkrecht steht, schneidet G in einem Kreise, wenn sie auf der Seite des Parallelismus liegt, und im entgegengesetzten Falle hat sie keinen Punkt gemein.

S. 3[a]) Die Grenzfläche ist in sich verschiebbar und ändert ihre Lage durch Rotation um eine ihrer Axen nicht.

S. 4[a]) G wird durch jede ihrer Grenzlinien in zwei symmetrische Teile geteilt; der Grenzkreis durch ein paar Gegenpunkte steht in G auf der Halbirungsebene senkrecht; die Grenzfläche ist nicht umkehrbar, es giebt wie auf der Kugel Congruenz und Symmetrie.

S. 5[a]) In jedem Grenzbogendreieck auf G ist die Summe zweier Seiten gröfser als die dritte.

Beweis: Es werde Bogen BC um B gedreht, bis er in die Verlängerung von $\widehat{AB}$ fällt, dann ist Sehne $AD > AC$, folglich auch Grenzbogen $AD > AC$.

Folgerung: Auf der Grenzfläche ist der Grenzbogen die kürzeste Verbindung. Die Ebenen zweier Grenzkreise auf G, welche auf derselben dritten senkrecht stehen, sind Z., also können sich die Grenzkreise nicht schneiden.

S. 6[a]) **Parallelenaxiom.** Durch jeden Punkt aufserhalb einer Grenzlinie giebt es zu ihr nur eine (Parallele) sie nicht schneidende derselben Axenrichtung (S. 5).

S. 7[a]) In jedem Grenzbogendreieck auf G ist die Winkelsumme zwei Rechte. (Folgt aus 22), kann aber wie in der Planimetrie bewiesen werden.)

Auf der Grenzfläche gilt die Euklidische Geometrie der Ebene, wenn die Gerade durch die Grenzlinie ersetzt wird.

Zwei Grenzflächen sind entweder coaxial (concentrisch), oder sie haben eine einzige Axe gemeinsam, diejenige, welche beiden Axen zugleich parallel ist. Schneidet sie die Fläche in A_1 und A_2, so schneidet die in der Mitte M von $A_1 A_2$ auf $A_1 A_2$ senkrechte Ebene beide im gemeinsamen Kreise; wenn A_1 und A_2 zusammenfallen, so berühren sich die Flächen. Hiermit ist zugleich bewiesen, dafs ein Grenzwürfel unmöglich ist. Der Körper, den man erhält, wenn man durch ein Quadrat auf G alle Axen legt, hat zum Inhalt $\frac{1}{2} K^3$ und kann als Raummafs dienen.

Vorliegende Sätze bilden ein Bruchstück aus einer gröfseren Arbeit, deren Druck im Jahre 1892 durch den Tod Kronecker's unterblieben ist.

Eine Anfrage, betreffend ein Beispiel zu Hertz' Mechanik.

Von **Ludwig Boltzmann** in Wien.

Von gröfster Wichtigkeit für das Verständnis der Hertz'schen Mechanik ist offenbar deren Anwendung auf einfache specielle Fälle. Ich bitte hiermit meine Collegen, diese Anwendung auf einen Fall zu versuchen, in dem sie mir nicht gelungen ist.

Ein Punkt mit der Masse m soll mit einem zweiten von sehr kleiner Masse so verbunden sein, dafs ihre Entfernung constant gleich a sein mufs. Der zweite Punkt ist wieder mit einem dritten von der Masse μ so verbunden, dafs ihre Entfernung abermals gleich a sein mufs. Dies ist im Sinne der Hertz'schen Mechanik ein erschöpfendes Bild für eine elastische Kugel von der Masse μ und dem Radius ϱ, die sich in einer elastischen Hohlkugel von der Masse m und dem Innenradius r bewegt, wenn $2a = r - \varrho$ ist.

Es soll für zwei vollkommen elastische Vollkugeln, die sich nach den gewöhnlichen Gesetzen stofsen können, ein Bild im Sinne der Hertz'schen Mechanik gefunden werden, d. h. ein Punktesystem, das durch holonome oder nichtholonome Bedingungen beschränkt ist, also durch Gleichungen (aber nicht Ungleichungen!) zwischen den Coordinaten und deren ersten Ableitungen nach der Zeit, welche, falls sie die letztere überhaupt enthalten, nach ihnen linear und homogen sind. Das Punktesystem soll dabei ein Bild des ordinären, vollkommen elastischen Stofses liefern.

Die Maxwell'sche Theorie der Elektricität von der mathematischen Seite betrachtet.

Von **Max Planck** in Berlin.

M. H.! Wenn ich den Versuch mache, vor Ihnen ein Bild der Maxwell'schen Elektricitätstheorie, von der mathematischen Seite aus betrachtet, zu entwerfen, so kann ich selbstverständlich nicht daran denken, das genannte Thema auch nur annähernd erschöpfend zu behandeln. Würde doch schon eine flüchtige Besprechung der wichtigsten in dies Gebiet einschlagenden Arbeiten weit über den mir gesteckten Zeitraum einer akademischen Stunde hinausgreifen. Aber wenn ich den Sinn der an mich ergangenen ehrenvollen Einladung richtig verstanden habe, so ist es auch weniger Ihr Wunsch, sich hier eine förmliche Litteraturübersicht über die mathematische Entwickelung der Maxwell'schen Theorie liefern zu lassen, als vielmehr einen, wenn auch im einzelnen unvollständigen, so doch im grofsen und ganzen zutreffenden Überblick über die hauptsächlichsten in mathematischer Beziehung charakteristischen Eigentümlichkeiten der Maxwell'schen Elektricitätstheorie, besonders auch im Gegensatz zu den älteren Theorien, zu gewinnen, und diese Aufgabe ist, falls man eben den Grad der Vollständigkeit offen lassen darf, ganz gewifs lösbar, wenn freilich wohl zugegeben werden mufs, dafs man sie von sehr verschiedenen Seiten angreifen kann, und dafs es sich daher immer nur um eine Auswahl handelt.

Die Frage: Was ist die Maxwell'sche Theorie? hat H. Hertz dahin beantwortet: Die Maxwell'sche Theorie ist das System der Maxwell'schen Gleichungen. In der That: wenn man von dem Grundsatz ausgeht, dafs eine physikalische Theorie in letzter Linie nicht mehr und nicht weniger zu leisten hat, als die Berechnung sowohl vergangener als auch namentlich zukünftiger physikalischer Erscheinungen zu ermöglichen, so scheint nichts einleuchtender, als dafs jede Prüfung der Leistungen einer Theorie sich ausschliefslich

an die von ihr gelieferten Gleichungen zu halten hat. Mit ihren Gleichungen steht und fällt sie; was aufserhalb der Gleichungen liegt, kann als unwesentliches Beiwerk fortgelassen werden, mag es in der Entwickelungsgeschichte der Theorie eine noch so bedeutende Rolle gespielt haben. — So unangreifbar diese Überlegung erscheint, so mufs doch andererseits in Erwägung gezogen werden, dafs sie nur insoweit gelten kann, als eine Theorie nebst ihren Gleichungen wirklich fix und fertig und in sich vollständig abgeschlossen, unabhängig und losgelöst von den mehr zufälligen Formen ihrer historischen Entwickelung, vor uns liegt. Wer vermöchte aber von irgend einer einzelnen physikalischen Theorie, selbst der ältesten und reifsten, der Mechanik, zu behaupten, dafs sie absolut vollendet ist? Ja man darf gerade im Gegenteil mit viel mehr Recht sagen, dafs, da die Natur nicht in verschiedene getrennte Stücke zerlegbar ist, sondern uns als ein einziges, unendlich vielfach verschlungenes Ganze entgegentritt, eine einzelne physikalische Theorie niemals im idealen Sinne fertig werden kann, so lange es überhaupt noch ungelöste physikalische Fragen giebt, und dafs daher ihre Gleichungen niemals als definitive angesehen werden können. Daraus folgt also gerade umgekehrt, dafs streng genommen keine einzige der gegenwärtig bestehenden physikalischen Theorien lediglich nach ihren Gleichungen beurteilt werden darf, sondern dafs dies immer nur bis zu einem gewissen Grade gilt, und zwar um so eher, je vorgeschrittener, um so weniger, je unentwickelter eine Theorie ist. Im letzteren Falle spielen die Gleichungen nicht die einzige Rolle, sondern es kommen dazu wesentlich in Betracht die Vorstellungen, welche zu den Gleichungen führen und sie eventuell modificiren.

Ist nun die Maxwell'sche Theorie heute schon so weit entwickelt, dafs sie mit einiger Berechtigung lediglich nach ihren Gleichungen beurteilt werden darf? Mit der Beantwortung dieser Frage hängt das Interesse des Physikers an dem Thema meines Vortrages zusammen, und ich habe kaum nötig, Sie zu versichern, dafs ich mich nicht an die schwierige Aufgabe gewagt hätte, wenn ich nicht glaubte, jene Frage bejahen zu sollen, allerdings nur was die Theorie für homogene, als stetig zu betrachtende Körper betrifft, und für solche Geschwindigkeiten derselben, welche gegen die Lichtgeschwindigkeit verschwindend klein sind. Über diese einfachen Bedingungen hinaus ist der Ausbau der Maxwell'schen Theorie noch nicht so weit vollendet, dafs man zu ihrer Beurteilung lediglich die Gleichungen heranzuziehen brauchte. Sie werden es daher gewifs begreiflich finden, wenn ich mich, unter Berufung auf die soeben entwickelten Erwägungen, lediglich auf die bezeichneten einfachen Fälle beschränke. Es wird dies um so eher erlaubt sein, als gerade die Frage nach den elektrodynamischen Erscheinungen in beliebig bewegten Körpern in der gestern abgehaltenen Sitzung der Abteilung für Physik im

Vordergrund der Discussion gestanden hat. Ich muſs nun freilich fürchten, daſs das, was ich hier die mathematische Seite der Maxwell'schen Theorie nenne, Ihnen immer noch sehr physikalisch vorkommen wird, indes darf ich mich wohl mit der Erwägung trösten, daſs nicht ausschlieſslich mathematisches Interesse, für das ich Ihnen ja nichts besonderes zu bieten vermöchte, sondern hauptsächlich gerade physikalisches Interesse Sie veranlaſst hat, diesen Vortrag in das Programm aufzunehmen.

Werfen wir einen Blick auf die Maxwell'schen Grundgleichungen, so fällt uns zunächst auf, daſs die unabhängigen Variablen: die drei Coordinaten des Raumes und die eine Coordinate der Zeit, in ihnen nur als Differentiale vorkommen. Dieser Umstand trennt die Maxwell'sche Theorie scharf von den älteren, auf der Annahme einer unmittelbaren Fernewirkung basirten Theorien, deren Grundgleichungen nicht Differential-, sondern Integralgleichungen sind, da in ihnen die endliche Entfernung r je zweier auf einander wirkender Teilchen als charakteristische Raumgröſse auftritt. Ihr Vorkommen ist eben der mathematische Ausdruck für die physikalische Annahme einer unvermittelten Wirkung in die Ferne, während aus den Maxwell'schen Gleichungen r immer erst durch eine räumliche Integration erhalten werden kann. Damit hängt unmittelbar diejenige Art des Gegensatzes zwischen der Maxwell'schen und den älteren Theorien zusammen, die ich wenigstens als die entscheidende ansehe. Nach der Maxwell'schen Theorie sind die elektromagnetischen Vorgänge an jedem Orte während eines Zeitelementes vollständig bestimmt durch die gleichzeitig in der unmittelbaren Nähe des Ortes stattfindenden Vorgänge; nach allen Fernewirkungstheorien dagegen gehört zur Berechnung der Vorgänge an einem Orte während eines Zeitelementes notwendig die Kenntnis der gleichzeitigen Vorgänge im ganzen Universum. Denn jedes materielle Teilchen, und wäre es noch so weit entfernt, übt im allgemeinen einen merklichen, notwendig zu berücksichtigenden Einfluſs aus. Auf Grund dieser Überlegung ergiebt sich der Schluſs, daſs die Theorien der Fernewirkung von vorneherein eine viel gröſsere Mannigfaltigkeit von Beziehungen zulassen als die Maxwell'sche Theorie. Man kann sogar, ausgehend von der Annahme einer unvermittelten Fernewirkung, sobald man nur die Voraussetzungen allgemein genug wählt, namentlich auch das Vacuum als polarisirbar im Poisson'schen Sinne annimmt, durch geeignete Specialisirung zu den Maxwell'schen Gleichungen gelangen, nicht aber umgekehrt. Den directesten Beweis hierfür liefert die Theorie von Helmholtz, welche von der Annahme einer unmittelbaren Fernewirkung ausgeht, und in deren Formeln die Maxwell'schen Gleichungen als Specialfall enthalten sind.

Aus demselben Grunde ist es principiell unmöglich, was so oft versucht wurde, ein Experimentum crucis zu gunsten der Maxwell-

schen Theorie gegen die älteren Theorien aufzustellen; denn was in die Maxwell'sche Theorie hineinpafst, pafst eo ipso auch in jene Theorien. Dagegen wäre es sehr wohl denkbar, dafs ein Experiment gefunden würde, das eventuell gegen die Maxwell'sche Theorie zu gunsten der unmittelbaren Wirkung in die Ferne entschiede. Es brauchte z. B. nur durch Messungen festgestellt zu werden, dafs das Gesetz der Abstofsung zweier statisch elektrisirter Teilchen statt der zweiten einer etwas anderen Potenz der reciproken Entfernung entspräche, dann wäre die Maxwell'sche Theorie vollkommen unhaltbar, während man in der Theorie der Fernewirkung blos den Exponenten 2 etwas zu ändern brauchte.

Damit hängt auch zusammen, dafs es mehrere verschiedenartige Theorien der unvermittelten Fernewirkung giebt, aber nur eine einzige der Nahewirkung, und es ist gerade ein Hauptvorzug der letzteren Theorie, dafs gewisse Unbestimmtheiten und Controversen, welche früher in der Lehre von der Elektricität eine grofse Rolle spielten, mit der Einführung der Maxwell'schen Theorie augenblicklich verschwunden sind. Ich will hier nur erinnern an die Frage, ob es nur eine oder ob es zwei Arten von Elektricität giebt und wie sich ihre Beweglichkeiten verhalten, dann an die früher übliche principielle Unterscheidung zwischen elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkungen, ferner an die grofse Streitfrage wegen der Wirkungen ungeschlossener Ströme, u. s. w.

Alles zusammengefafst möchte ich also sagen: die Maxwell-sche Theorie zeichnet sich vor den älteren Theorien aus nicht durch gröfsere Richtigkeit, sondern durch gröfsere Einfachheit, oder mit anderen Worten: es ist im letzten Grunde nichts anderes als das Princip der Ökonomie, im Sinne von Mach gesprochen, welches in der Durchführung der Maxwell'schen Elektricitätstheorie einen seiner schönsten Triumphe gefeiert hat.

Nach der Maxwell'schen Theorie bildet also das ganze Universum ein einziges elektromagnetisches Feld, und die Vorgänge in diesem Felde werden geregelt durch sechs lineare Differentialgleichungen zwischen den sechs abhängigen Veränderlichen, welche den elektromagnetischen Zustand des Feldes an irgend einem Orte zu irgend einer Zeit bestimmen. Diese Gleichungen erinnern bis zu einem gewissen Grade an die für die Bewegungen in einem elastischen Medium. Ebenso wie nämlich in einem continuirlichen mechanischen Felde der Zustand der Materie bestimmt ist durch sechs im allgemeinen von einander unabhängige Gröfsen, nämlich die drei Componenten der Verschiebung und die drei Componenten der Geschwindigkeit eines Massenteilchens, so ist in einem elektromagnetischen Feld der Zustand gegeben durch die drei Componenten der elektrischen Kraft und die drei Componenten der magnetischen Kraft, oder rationeller, aber umständlicher gesprochen: der Intensität des elektrischen

und der Intensität des magnetischen Feldes. Jede dieser beiden Kräfte bedingt eine bestimmte Art von Energie des Feldes: die erste die elektrische Energie, die zweite die magnetische Energie, die sich einfach übereinanderlagern, genau so wie in der Mechanik sich potentielle und kinetische Energie zu einander addiren; und zwar setzt man bei isotropen Substanzen die Energiedichte, d. h. die in der Volumeneinheit enthaltene Energie proportional dem Quadrat der elektrischen bezw. der magnetischen Feldintensität; dieselbe erreicht also mit dem Werte Null, für den neutralen Zustand des Feldes, ihr Minimum. Die Proportionalitätsconstante in dem Ausdruck der elektrischen Energie, als quadratischer Function der elektrischen Kraft, noch multiplicirt mit 8π, heifst Dielektricitätsconstante, die entsprechende Gröfse in dem Ausdruck der magnetischen Energie die Permeabilität der Substanz. In dem von Helmholtz und von Hertz und auch hier weiter unten benutzten sog. Gauss'schen Mafssystem werden diese beiden Constanten für das Vacuum $= 1$ gesetzt; dann sind sie für alle übrigen Substanzen durch die sogleich anzugebenden Festsetzungen bestimmt, und damit ist die Feldintensität vollständig definirt. Während die Dielektricitätsconstante für alle ponderablen Substanzen > 1 ist, ist die magnetische Permeabilität für die sog. paramagnetischen Substanzen > 1, für die diamagnetischen < 1, und für die ferromagnetischen überhaupt nicht constant, sondern veränderlich mit der Intensität des magnetischen Feldes. Wir wollen im folgenden von den letztgenannten Substanzen absehen.

Bei anisotropen Substanzen sind in dem Ausdruck der Energie die Coefficienten der Quadrate der drei Kraftcomponenten von einander verschieden, woraus sich u. a. die Eigentümlichkeiten der Krystalloptik ergeben; doch sprechen wir hier der Kürze halber nur von isotropen Körpern.

Die Gleichungen nun, welche die Änderungen bestimmen, die ein gegebener Zustand des elektromagnetischen Feldes im Laufe der Zeit erfährt, lassen sich auf verschiedene Weise einführen; um ihre Bedeutung zu übersehen, bedient man sich zweckmäfsig des Princips der Erhaltung der Energie, da der Begriff der Energie der einzige ist, den man unmittelbar aus der Mechanik in die Elektricitätslehre herübernehmen kann. Die Energievorgänge im elektromagnetischen Felde lassen sich darstellen mit Hülfe des einfachen Satzes von Poynting, dafs an jeder Stelle des Feldes eine Energieströmung stattfindet, proportional dem sog. Vectorproduct der elektrischen und magnetischen Kraft, d. h. an Gröfse proportional dem Flächeninhalt des von der elektrischen und der magnetischen Kraft gebildeten Parallelogramms, an Richtung senkrecht dazu, und zwar nach derjenigen Seite hin, welche die innere Fläche der rechten Hand bezeichnet, wenn bei ausgestreckten Fingern der Daumen die Richtung der elektrischen, der Zeigefinger die der magnetischen Kraft angiebt.

Die Gröfse der Proportionalitätsconstanten hängt offenbar von der Wahl der Einheiten für die elektrische und magnetische Kraft in jeder Substanz ab, und diese Wahl ist in der Maxwell'schen Theorie so getroffen, dafs die genannte Proportionalitätsconstante für alle Substanzen den nämlichen (positiven) Wert besitzt. Daraus gehen auch sogleich, da an der Grenzfläche zweier verschiedener homogener Substanzen keine Stauung der Energie auftreten kann, die vier Grenzbedingungen hervor, dafs die beiden tangentiellen Componenten sowohl der elektrischen als auch der magnetischen Kraft stetig verlaufen. Die Gröfse jener für alle Substanzen gleichen Proportionalitätsconstanten ist in dem oben genannten Gaufs'schen Mafssystem durch die dort für das Vacuum getroffenen Festsetzungen vollkommen bestimmt, nämlich $\frac{c}{4\pi}$, wenn c die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum bedeutet. (In dem von Maxwell hauptsächlich benutzten sog. elektromagnetischen Mafssystem dagegen ist jene Constante eine reine Zahl, nämlich $\frac{1}{4\pi}$. Dann ist für das Vacuum nur eine der beiden Gröfsen: Dielektricitätsconstante und Permeabilität, noch willkürlich wählbar. Je nachdem man die erstere oder die letztere $= 1$ setzt, gelangt man zum elektrischen oder zum magnetischen Mafssystem.)

Aus dem Poynting'schen Satze lassen sich die Maxwell'schen Grundgleichungen zwar nicht als notwendige, aber doch als die bei weitem naheliegendsten Folgerungen ableiten, indem man den Inhalt des Energieprincips in der Weise formulirt, dafs die in einem beliebigen Raum enthaltene elektromagnetische Energie sich immer gerade um den Betrag der durch die Oberfläche des Raumes nach innen strömenden Energie ändert.

Bis hierher haben Elektricität und Magnetismus ganz symmetrische Rollen gespielt, und für einen übersichtlichen Aufbau der Maxwell'schen Gleichungen ist die Betonung dieser Analogie recht nützlich; indessen ist dieselbe doch mehr formaler Natur. Ein erster specifischer Unterschied ergiebt sich, wenn man auch die Eigenschaft der elektrischen Leitungsfähigkeit in Betracht zieht, die nur dem reinen Vacuum vollständig fehlt. Im Anschlufs an die soeben besprochenen Energievorgänge läfst sich die Erscheinung der elektrischen Leitungsfähigkeit einfach dahin aussprechen, dafs an jedem Orte eines elektromagnetischen Feldes fortwährend Verwandlung elektrischer Energie in Wärme stattfindet, und zwar ist die pro Zeiteinheit in Wärme verwandelte Energie proportional der augenblicklichen Energie und einer nur von der Beschaffenheit der Substanz abhängigen Constanten, welche das Reciproke einer Zeitgröfse, der sog. Relaxationszeit, darstellt. Zieht man diese Energievorgänge mit in Rechnung, so führt die Anwendung des Princips der Erhaltung der Energie auf genau demselben Wege wie oben zu den sechs Gleichungen:

$$(1) \qquad K\frac{\partial X}{\partial t} = c\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) - \frac{K}{T}\cdot X, \ldots$$

$$(2) \qquad \mu\frac{\partial L}{\partial t} = c\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right), \ldots$$

Hier bedeuten X, Y, Z die Componenten der elektrischen, L, M, N die der magnetischen Kraft, K die Dielektricitätsconstante, μ die magnetische Permeabilität, c die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum, T die Relaxationszeit.

In Verbindung mit den schon oben angegebenen Grenzbedingungen ist damit die Aufgabe mathematisch fixirt, bei gegebenem Anfangszustand und gegebenen Grenzbedingungen die elektromagnetischen Vorgänge in einem System von homogenen, mehr oder weniger gut leitenden Substanzen zu berechnen.

Schon aus der Art der Ableitung der Gleichungen ersieht man und kann sich leicht auch direct davon überzeugen, dafs die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z in ihnen insofern nur eine formale Rolle spielen, als der physikalische Inhalt der Gleichungen sich als ganz unabhängig von der Wahl eines besonderen Coordinatensystems erweist. Daher lassen sie sich denn auch mittelst der Vector-Analysis in eine Gestalt bringen, in der auch formell jede Bezugnahme auf ein specielles Coordinatensystem vermieden ist.

Bis hierher sind die Maxwell'schen Gleichungen homogen in Bezug auf die Componenten der elektrischen und der magnetischen Kraft. Daraus folgt, dafs eine particuläre Lösung dieser Gleichungen durch den neutralen Zustand des Feldes dargestellt wird, in welchem alle Kräftecomponenten verschwinden, und weiter, dafs in einem gegen Energiezufuhr von aufsen abgeschlossenen System im allgemeinen gar kein stationärer elektromagnetischer Vorgang möglich ist, wegen der beständigen Energieabsorption in den Leitern. Das entspricht nicht den wirklichen Erscheinungen. Daher werden in die Gleichungen noch gewisse constante Glieder aufgenommen, sozusagen „Erregungs“-Glieder, welche auf dem Gebiete der Elektricität als locale elektromotorische Kraft und auf dem Gebiete des Magnetismus als permanenter Magnetismus bezeichnet werden. Diese Glieder bewirken, dafs überhaupt eine Störung des Feldes eintreten, und dafs sie eventuell dauernd unterhalten werden kann. Da jedoch die locale elektromotorische Kraft nur in inhomogenen Körpern und an den Grenzflächen heterogener Körper, der permanente Magnetismus nur in ferromagnetischen Substanzen auftritt, so wollen wir hier von der Einführung dieser Glieder in die Gleichungen absehen.

Was nun die Integration der Maxwell'schen elektromagnetischen Gleichungen betrifft, so ist vor allem wichtig zu bemerken, dafs sich von vornherein, ohne jede nähere Kenntnis von den speciellen Eigenschaften des betrachteten Systems, zwei allgemeine

Integrale angeben lassen, eins aus den drei Gleichungen (1) für die zeitliche Änderung der elektrischen Kraft, das andere aus den drei Gleichungen (2) für die zeitliche Änderung der magnetischen Kraft. Sie werden dadurch gewonnen, dafs man die drei betr. Gleichungen beziehungsweise nach x, y, z differentiirt, addirt und nach t integrirt. In diesen beiden Integralen spielt eine hervorragende Rolle das Product der elektrischen Kraft und der Dielektricitätsconstanten, das daher von Maxwell den besonderen Namen „elektrische Induction" erhalten hat, bezw. das Product der magnetischen Kraft und der magnetischen Permeabilität — „magnetische Induction".

Das Integral der magnetischen Gleichungen (2) ist naturgemäfs einfacher, es besagt kurz ausgedrückt, dafs die „Divergenz" der magnetischen Induction Null ist, oder dafs die Componenten der magnetischen Induction demselben Gesetz unterliegen wie die Componenten der Geschwindigkeit einer incompressibeln Flüssigkeit, wozu auch gehört, dafs an der Berührungsfläche zweier verschiedener Substanzen die Normalcomponenten der Induction auf beiden Seiten der Fläche gleich sind; denn zwei verschiedene incompressible Flüssigkeiten können wohl an einander vorbeigleiten, aber nicht in einander eindringen. Das Integral der elektrischen Gleichungen (1) ist ganz ähnlicher Natur, aber wegen der Leitungsfähigkeit etwas complicirter. Es ist nämlich die Divergenz der elektrischen Induction, einschliefslich derjenigen Divergenz, welche durch eine Unstetigkeit der Normalcomponente der elektrischen Induction an der Berührungsfläche zweier verschiedener Substanzen bedingt wird, nicht notwendig Null, sondern sie kann positiv oder negativ sein; dafür gilt aber der allgemeine Satz, dafs die Gesamtsumme aller in einem Raume R enthaltenen Divergenzen nur geändert werden kann durch Vorgänge an der Grenze dieses Raumes. Daher heifst jene Summe die gesamte in dem Raume R befindliche (wahre) Elektricitätsmenge, und zwar die räumliche Divergenz der Induction „räumliche Dichte" der Elektricität, und die Flächendivergenz oder der Sprung der Normalcomponente der Induction „Flächendichte" der Elektricität, multiplicirt noch mit dem Factor 4π; und die in der Zeiteinheit erfolgende Änderung der in R befindlichen Elektricitätsmenge, dargestellt als Flächenintegral über die Oberfläche von R, heifst der gesamte elektrische (Leitungs-)Strom, der durch die Oberfläche in den Raum R fliefst. Sonach unterliegt die Strömung der Elektricität denselben Continuitätsgesetzen wie die Strömung der Materie oder die der Energie, und zwar ergeben sich die Componenten der elektrischen Strömung an jedem Orte gleich dem Producte der elektrischen Kraft und einer Constanten, der sogenannten specifischen Leitungsfähigkeit, welche gleich ist dem Verhältnis der Dielektricitätsconstante K zur Relaxationszeit T, dividirt durch 4π. Eine Substanz mit unendlich grofser Relaxationszeit und endlicher Dielektricitäts-

constanten, wie z. B. das reine Vacuum, besitzt also die elektrische Leitungsfähigkeit Null und heifst ein Isolator.

Schliefslich noch ein Wort über die Bestimmung der mechanischen oder ponderomotorischen Wirkungen in einem elektromagnetischen Feld, die ja gerade für die Messungen von gröfster Wichtigkeit sind. Alle diese Wirkungen lassen sich zusammenfassen in den einen Satz, dafs die ponderomotorische Arbeit, die bei einer mechanischen Veränderung von den Kräften des Systems geleistet wird, gleich ist der Abnahme der elektromagnetischen Energie, die bei derselben Veränderung eintritt, vorausgesetzt, dafs bei ihr die elektrische und die magnetische Induction durch jedes materielle Flächenelement constant gehalten wird.

Bei der Anwendung der Maxwell'schen Gleichungen auf physikalische Probleme kommt es nicht sowohl auf die allgemeinen Integrale, als vielmehr auf solche particuläre Integrale an, welche bestimmten in der Natur vorkommenden Anfangszuständen und Grenzbedingungen entsprechen. Da nun die Integration fast niemals in mathematischem, sondern ausschliefslich in physikalischem Interesse bewerkstelligt wurde, so erklärt sich, dafs man erst verhältnismäfsig spät daran ging, die Methoden der Integration in ein System zu bringen, und dafs infolgedessen, vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet, die Bearbeitung der Maxwell'schen Theorie in sehr ungleichmäfsiger Weise stattgefunden hat. Ich mufs mich hier darauf beschränken, in rohen Zügen eine Übersicht zu geben über die verschiedenen Arten particulärer Lösungen, welche die Maxwell'schen Differentialgleichungen bisher gefunden haben. Naturgemäfs ergiebt sich aus dieser Übersicht gleichzeitig auch eine entsprechende Einteilung der von der Theorie behandelten physikalischen Vorgänge.

Die einfachsten Lösungen beziehen sich auf die stationären Vorgänge, in denen der elektromagnetische Zustand des Feldes in einem bestimmten Punkte des Raumes von der Zeit unabhängig ist. Die Einführung dieser Bedingung in die sechs Maxwell'schen Gleichungen (1) und (2) liefert das Resultat, dafs die elektrische Kraft überall ein Potential hat, welches überdies an der Grenzfläche zweier Substanzen, wegen der Stetigkeit der Tangentialcomponenten der elektrischen Kraft, einen constanten Sprung erleidet. Die magnetische Kraft dagegen besitzt nur da ein Potential, wo keine elektrische Strömung vorhanden ist, also immer in Isolatoren; in Leitern aber nur dann, wenn das Feld elektrisch neutral ist. Die Beziehungen zwischen der magnetischen Kraft und der elektrischen Strömung sind genau dieselben wie die zwischen den Geschwindigkeits- und den Wirbelcomponenten einer incompressibeln Flüssigkeit. Dem Geschwindigkeitspotential entspricht das magnetische Potential. Einen speciellen Fall der stationären Vorgänge bilden die statischen

Zustände, bei denen nicht nur der elektromagnetische Zustand des Feldes überall constant ist, sondern auch nirgends eine Umwandlung von elektrischer Energie in Wärme stattfindet. Das bringt für Leiter noch die neue Bedingung mit sich, daſs die elektrische Kraft im Innern überall verschwindet, oder daſs das elektrische Potential im ganzen Innern constant ist. Nur für statische Zustände fallen die elektrischen und die magnetischen Gleichungen ganz auseinander insofern, als zwischen elektrischen Gröſsen einerseits und magnetischen Gröſsen andererseits keinerlei Beziehung existirt.

Wenn wir nun zur Betrachtung derjenigen Integrale der Maxwell'schen Gleichungen übergehen, welche allgemeineren, sog. dynamischen Vorgängen entsprechen, so wird es zur Erzielung einer besseren Übersicht nützlich sein, diese Integrale in Vergleich zu bringen mit den entsprechenden Integralen der bekannten hydrodynamischen Gleichungen für unendlichkleine Schwingungen, welche einigermaſsen analog gebaut sind. Was dort die Schallgeschwindigkeit ist, ist hier die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Störungen. Bei der mathematischen Behandlung der Gleichungen der Akustik läſst sich nun vor allem eine Classe von Lösungen abspalten, welche durch die Bedingung ausgezeichnet ist, daſs die Wellenlänge der Töne groſs ist gegen die Dimensionen der schallgebenden oder -empfangenden Körper. Hierher gehören z. B. die Schwingungsvorgänge in einer sog. cubischen Pfeife mit tiefem Eigenton. Innerhalb einer solchen Pfeife besitzt die Luft in jedem Augenblick gleichmäſsige Dichtigkeit; der Raum, den die ganze Pfeife einnimmt, bildet nur einen verschwindend kleinen Teil des Raumes, der durch den Cubus der Wellenlänge dargestellt wird. Diesem Teil der Akustik entspricht bei den Maxwell'schen Gleichungen diejenige Classe von Integralen, welche bis zu den Arbeiten von Hertz fast das gesamte Gebiet der Elektrodynamik ausmachte. Es wurden nämlich damals fast ausschlieſslich solche Veränderungen des elektromagnetischen Feldes behandelt, die so langsam vor sich gehen, daſs die Wellenlänge*) der elektrischen Schwingungen groſs ist gegen die Dimensionen der beteiligten Körper. Praktisch gehören hierher alle Schwingungen, deren Anzahl in der Secunde etwa bis 1 Million geht, deren Wellenlänge in der Luft also mehr als 300 m beträgt. (Eine Ausnahme bilden z. B. die Vorgänge in langen Drähten oder Kabeln, weil hier die Wellenlänge nicht mehr als groſs betrachtet werden kann.) Das Charakteristische dieser Fälle, was

---

*) Mit Rücksicht auf unperiodische Vorgänge setzt man hier für die Wellenlänge allgemeiner den Quotienten der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der „relativen Änderungsgeschwindigkeit" des elektromagnetischen Feldes: $\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial X}{\partial t}$, wo X irgend eine Kraftcomponente bedeutet.

ihre mathematische Behandlung wesentlich erleichtert, ist der Umstand, daſs bei ihnen die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems eine beschränkte ist, so daſs man nur eine geringe Zahl von Variablen als Functionen der Zeit zu bestimmen braucht. Ein galvanischer Strom z. B. mit hinreichend langsam veränderlicher Intensität besitzt die Eigenschaft, daſs seine Intensität in jedem Augenblick überall gleichmäſsig verteilt ist, daſs ferner durch diese Intensität das ganze umgebende magnetische Feld gleichzeitig bestimmt ist oder, wie man sagen kann, daſs das durch den Strom erregte magnetische Feld allen Intensitätsschwankungen des Stromes momentan zu folgen vermag. Dann bleibt also die Stromintensität als einzige Variable des Zustandes übrig, und man braucht zu ihrer Bestimmung nur eine einzige Gleichung, etwa die des Princips der Erhaltung der Energie. Bei mehreren Freiheitsgraden (Stromintensitäten, Bewegungen der Leiter) ergeben sich am bequemsten direct aus dem Hamilton'schen Princip die schon in der älteren Elektrodynamik bekannten Sätze der elektromagnetischen Kräfte, der elektromagnetischen und elektrodynamischen Induction.

Hier verdient ein eigentümlicher Umstand Erwähnung, der den Einfluſs der historischen Entwickelung der Begriffe auf die Auffassung der thatsächlichen Vorgänge besonders deutlich erkennen läſst. Da die stationären Zustände viel früher gemessen wurden als die veränderlichen, so suchte man immer die aus den stationären Vorgängen abgeleiteten Sätze und Begriffe auf die veränderlichen zu übertragen, und dadurch entstanden Formulirungen, die wahrscheinlich anders gefaſst worden wären, wenn die Lösung der Probleme von mathematischer Seite erfolgt wäre. Die Intensität eines stationären galvanischen Stromes z. B.*) bestimmt sich nach dem Ohm'schen Gesetz als der Quotient aus der elektromotorischen Kraft, d. h. der Potentialdifferenz an den Polen der offenen Kette, und dem Widerstand der Leitung. Wird nun eine ursprünglich offene Kette, in die eine Inductionsrolle eingeschaltet sein möge, geschlossen, so nimmt der Strom nicht momentan seine constante Intensität an, sondern er wächst von Null an stetig in meſsbarer Zeit auf seinen definitiven Wert. Um diese Thatsache auszudrücken, wandte man auch auf diesen veränderlichen Strom das Ohm'sche Gesetz in der obigen Form an und muſste daher, da die Stromstärke und der Widerstand vollständig definirt sind, die Annahme machen, daſs die elektromotorische Kraft, welche nach dem Ohm'schen Gesetz die Stromintensität bestimmt, auſser der galvanischen Potentialdifferenz noch ein anderes Glied enthalte, welches man die Selbstinduction nennt, und welches proportional ist dem Differentialquotienten der Strom-

*) In dem mündlichen Vortrage wurde die Erwähnung dieses Beispiels im Interesse der Zeitersparnis unterdrückt.

intensität nach der Zeit. Mit Berücksichtigung der Selbstinduction kann man dann wieder das Ohm'sche Gesetz als gültig aussprechen. Hier erscheint also die Selbstinduction als eine Ursache des Stromes. Diese Vorstellung, so richtig die Gleichung ist, zu der sie führt, widerspricht offenbar der Ausdrucksweise in anderen Gebieten der Physik, ja unserem ganzen naturwissenschaftlichen Denken. Niemals sonst nehmen wir an, dafs die Veränderlichkeit einer Gröfse mit der Zeit die Ursache ist für den gleichzeitigen Wert der Gröfse selbst; wir verlegen vielmehr immer die Ursache in die frühere, die Wirkung in die spätere Zeit. Danach müfsten wir also umgekehrt sagen: Nicht die Selbstinduction bewirkt den Strom, sondern der Strom bewirkt die Selbstinduction, indem jedesmal, wenn die Stromintensität von dem durch die elektromotorische Kraft der galvanischen Kette geforderten stationären Wert abweicht, z. B. wenn sie gleich Null ist, eine zeitliche Änderung eintreten mufs, deren Geschwindigkeit proportional ist jener Abweichung. Ähnliche Beispiele von Anschauungen, die sich nur durch den Entwickelungsgang der Elektrodynamik erklären lassen, liefsen sich leicht noch mehrere anführen. Hier kann, wie ich glaube, die formell-mathematische Auffassung der elektrischen Vorgänge ganz nützliche Dienste leisten.

Den langsamen Veränderungen des elektromagnetischen Feldes stehen als anderer Grenzfall gegenüber die sehr schnellen Vorgänge, bei denen die Wellenlänge klein ist gegen die Dimensionen der beteiligten Körper, — etwa von der Schwingungszahl 1 Billion in der Secunde aufwärts, oder von der Wellenlänge 0,3 mm in Luft abwärts. Hierher gehört die ganze Optik, mit verschwindenden Ausnahmen. Was die Integration der Maxwell'schen Gleichungen in diesem Fall aufserordentlich vereinfacht, ist der Umstand, dafs hier, eben wegen der kurzen Wellenlängen, alle Probleme sich zurückführen lassen auf die Gesetze geradliniger Fortpflanzung und ebener Trennungsflächen. Denn wenn man in der Optik auch Reflexion und Brechung an gekrümmten Flächen behandelt, so gelten die betreffenden einfachen Gesetze doch nur unter der Voraussetzung, dafs die Wellenlänge des Lichtes verschwindet gegen die Krümmungsradien der Flächen. Das Studium der Beugungserscheinungen liefert schon den Übergang zu solchen Vorgängen, bei denen die Wellenlänge nicht mehr als unendlich klein behandelt werden darf. Obwohl nun gerade die letzteren Vorgänge den allgemeinen Fall repräsentiren, gegenüber den beiden besprochenen Grenzfällen der langen und der kurzen Wellen, — oder besser wohl: ebendeswegen — nimmt ihre mathematische Behandlung sowohl als auch ihre physikalische Untersuchung einen verschwindend kleinen Raum ein gegen die der obigen Specialfälle. Meistens wurden hier bis jetzt nur periodische stehende Wellen in besonders einfach begrenzten Räumen betrachtet. Gerade

auf diesem Gebiet wird der Mathematiker dem Physiker hilfreiche Hand bieten können, aber auch umgekehrt bestehen hier für die reine Mathematik eine Fülle interessanter, lehrreicher Probleme. Vorläufig allerdings lassen sich die analytischen Schwierigkeiten nur in ganz speciellen Fällen überwinden.

Zu diesen Fällen gehört einer, auf den ich noch zum Schlufs hinweisen möchte. Er ist dann verwirklicht, wenn es gelingt, den ganzen Raum so in Teile zu zerlegen, dafs in jedem einzelnen Teile ein einfaches Näherungsverfahren eingeschlagen werden kann. Haben wir z. B. ein schwingendes System, dessen Dimensionen klein sind gegen die Wellenlänge der Schwingungen, so können wir eine Kugelfläche um das System legen mit einem Radius, der grofs ist gegen die Dimensionen des Systems, aber klein gegen die Wellenlänge. Hierdurch zerfällt der ganze unendliche Raum in zwei Teile: einen äufseren und einen inneren, man könnte sie den makroskopischen und den mikroskopischen nennen. Im inneren Teil, der klein ist gegen die Wellenlänge, gelten sehr angenähert die Gesetze der älteren Elektrodynamik: die elektrischen Wirkungen zerfallen in elektrostatische und in elektrodynamische, die sich beide momentan in der Umgebung äufsern, die Ströme haben überall gleichmäfsige Stärke, u. s. w. Im äufseren Raum, dem makroskopischen, dagegen haben wir Kugelwellen, die von Einem Punkt herzukommen scheinen.

Eine Anwendung dieser Betrachtung, die mir von Wichtigkeit zu sein scheint, betrifft die Wärmestrahlung. Seitdem die elektromagnetische Natur der Wärme- und Lichtstrahlen nachgewiesen wurde, ist die Bestimmung der Gesetze der Wärmestrahlung ein elektrisches Problem geworden. Nun entspringen die Wärmestrahlen doch höchstwahrscheinlich gewissen Schwingungen, welche innerhalb der Moleküle oder Ionen vor sich gehen, also in Räumen, deren Dimensionen verschwinden gegen die Wellenlängen dieser Schwingungen. Hier ist also die oben geschilderte Zerlegung in einen mikroskopischen und einen makroskopischen Raum möglich, an deren Grenze die Werte der elektrischen und der magnetischen Kraft stetig in einander übergehen. Es ist daher zu hoffen, dafs die Maxwell'sche Theorie, deren unmittelbarster Erfolg ja darin besteht, dafs sie die Physik kurzer Ätherwellen mit der Physik langer Ätherwellen in einen directen quantitativen Zusammenhang gebracht hat, auch in der Anwendung auf die genannten Erscheinungen neue Aufschlüsse liefern wird. Vielleicht können wir auf dieser Grundlage einmal noch zu einer elektromagnetischen Theorie der Wärme gelangen, — nicht mit Hülfe besonderer neuer Hypothesen, sondern einfach in consequenter Fortbildung der Maxwell'schen Ideen von dem Zusammenhang zwischen Licht und Elektricität.

Die moderne Theorie des Magnetismus.

Von **H. du Bois** in Berlin.

Auf kaum einem Gebiete tritt die Beziehung, Wechselwirkung und gegenseitige Befruchtung zwischen Mathematik, Physik und Elektrotechnik deutlicher hervor, wie bei der neueren Entwickelung der Lehre vom Ferromagnetismus. Die ältere Theorie war wesentlich potential-theoretischer Natur; im letzten Abschnitt seiner weitverbreiteten Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte behandelt Lejeune Dirichlet jene Lehre nur als Specialfall der allgemeinen Potentialtheorie. Aufser mit Polen wird dort hauptsächlich mit Linienintegralen gerichteter Gröfsen operirt; bezeichnet man eine solche allgemeinster Art mit $\mathfrak{F}$ und ihre Componenten mit $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$, so gelten für viele Vectorgröfsen die bekannten Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial x} = 0.$$

In der Quaternionensprache charakterisirt man diese Verteilungsart kurz dadurch, dafs man sagt, der „Quirl" (engl.: curl) des Vectors verschwinde überall.

Eine einfache geometrische Versinnlichung liefert die von Lord Kelvin herrührende Bezeichnung „lamellare Verteilung"*), indem ein derart verteilter Vector stets ein Potential aufweist und die Dicke der von benachbarten Äquipotentialflächen begrenzten Schalen dem Werte des Vectors umgekehrt proportional ist. Bei einer derartigen Verteilung ist das Linienintegral längs jedes geschlossenen Integrationsweges Null. Dabei ist stillschweigend vorausgesetzt, dafs das betrachtete Raumgebiet ein einfach zusammenhängendes sei. Falls die Verteilung in einem mehrfach zusammenhängenden Raumgebiete eine lamellare ist, in Punkten aufserhalb desselben diese Eigenschaft aber nicht aufweist, so wird das Potential im allgemeinen eine mehrdeutige Function der Coordinaten, und obiger Satz gilt nur unter gewissen Einschränkungen.**)

*) Litteratur zur allgemeinen geometrischen Theorie der Vectorfelder: Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism, 2. edit. 1. Einleitung und Cap. IV, Oxford 1881. Lord Kelvin (Sir W. Thomson), Repr. Pap. Electr. and Magn. § 509 u. folg. A. Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie, Leipzig 1894; Die Geometrie der Wirbelfelder, Leipzig 1897. G. Ferraris, Teoria geometrica dei campi vettoriali, Turin 1897; Nachgelassenes Fragment des Entdeckers des Drehstromprincips. E. Wiechert, Über die Grundlagen der Elektrodynamik, Wied. Ann. 59, p. 283, 1896. H. du Bois, Magn. Kreise, §§ 34—43, Berlin 1894.

**) H. v. Helmholtz, Crelle's Journ. 55, pag. 25, 1858; Wiss. Abhandl. 1, pag. 101. Maxwell, Treatise, §§ 16—20.

Was insbesondere den magnetischen Specialfall betrifft, so ist hier der zu betrachtende Vector die magnetische Feldintensität $\mathfrak{H}$; diese ist im allgemeinen lamellar verteilt. Im elektromagnetischen Felde erstreckt sich indessen die lamellare Verteilung nicht auf den Raum innerhalb der geschlossenen elektrischen Stromleiter; das übrige Raumgebiet ist aber ein mehrfach zusammenhängendes. Man gelangt in dieser Weise zu dem bekannten Fundamentalsatz:

I. Wenn in einem elektromagnetischen Felde der Integrationsweg n-fach mit dem Stromleiter verkettet ist, so nimmt das magnetische Potential V bei jeder Umkreisung zu um den Betrag

$$\delta V = \int \mathfrak{H}_l dl = 4\pi n I.$$

Darin bedeutet I die Stromstärke in absolutem Maſse; das Product $10 n I$ nennt man die „Ampèrewindungen". Für den vorliegenden Zweck ist die wichtigste Eigenschaft jenes Satzes die, daſs er allgemein gilt, unabhängig von irgend welchem Coordinatensystem, sowie von der Natur des Mediums oder der verschiedenen Medien, durch welche sich der Integrationsweg der Reihe nach hindurchwindet; insbesondere ist es gleichgültig, ob er ferromagnetische oder unmagnetische Körper durchsetzt.

Bekanntlich läſst sich die räumliche Verteilung gerichteter Gröſsen auch von einem anderen Standpunkte aus beurteilen, welcher an die Hydrodynamik anknüpft. Viele Vectoren genügen nämlich der räumlichen Continuitätsgleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial z} = 0$$

nebst den zugehörigen Grenzgleichungen für die Unstetigkeitsflächen.

In der Quaternionentheorie wird diese Verteilungsart durch das Schwinden der „Convergenz" bedingt. Man kennzeichnet sie geometrisch als eine „solenoidale", weil der ganze Raum sich in dünne Vectorröhren — Solenoide — zerlegen läſst, deren Querschnitt dem Werte des Vectors umgekehrt proportional ist. Demgemäſs operirt man hier hauptsächlich mit Flächenintegralen; erstreckt sich ein solches über das Profil eines gegebenen Bündels von Vectorröhren, so ist es längs des Bündels constant; es wird gleich Null, wenn man über eine geschlossene Fläche integrirt.

Betrachtet man wieder den magnetischen Specialfall, so tritt nunmehr als Hauptvector die magnetische Induction $\mathfrak{B}$ auf, welche immer und überall solenoidal verteilt ist.

Ihr Flächenintegral über das Profil eines Bündels von Inductionsröhren nennt man den Inductionsfluſs; dessen zeitliche Abgeleitete $\frac{d\mathfrak{G}}{dT}$ bestimmt die Induction elektromotorischer Antriebe, d. h. den

Vorgang, welcher in der gegenwärtigen Technik die Hauptrolle spielt. Die Bündel magnetischer Inductionsröhren haben die Eigenschaft, stets in sich geschlossen zu sein; unter Umständen findet diese Schliefsung gewissermafsen erst in unendlicher Entfernung statt; an den Grenzflächen zwischen ferromagnetischen und unmagnetischen Körpern erleiden die Inductionslinien eine unstetige Brechung. Man gelangt in dieser Weise zu dem Satze von der Erhaltung des Inductionsflusses:

II. In einem Bündel Inductionsröhren ist der Inductionsflufs constant,

$$\mathfrak{G} = \iint \mathfrak{B}_n dS = \text{const.}$$

Auch dieses zweite Fundamentalprincip hat die Eigenschaft, unabhängig zu sein vom Coordinatensystem und von der Natur der Medien, welche das Bündel durchsetzt.

Die letzten Betrachtungen bilden den, namentlich von Maxwell herausgeschälten mathematischen Kern der Faraday'schen Auffassungen; indessen hatte auch Lord Kelvin an ihrer Entwickelung einen wesentlichen Anteil.*)

Bei der älteren Theorie der magnetischen Induction, welche zuerst von Poisson auf Grundlage der Annahme zweier magnetischer Fluida aufgestellt worden war, und welche dann wiederholte Neubearbeitungen erfuhr, so u. a. durch F. Neumann,**) wurden die beiden oben eingeführten Hauptvectoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ als gleichgerichtet und überdies ihre Werte als proportional angenommen. Letztere Annahme war aber eine voreilige und im allgemeinen durchaus unmotivirte; trotzdem wurde sie der Bequemlichkeit der Rechnung halber sogar in der neueren Litteratur häufig beibehalten, lange nachdem die experimentelle Forschung ihre Unhaltbarkeit dargethan hatte. Obwohl infolgedessen die Ergebnisse jener älteren Theorie nur mit Vorsicht anzuwenden sind, bleiben immerhin manche der von ihr gegebenen Lösungen von Specialfällen mutatis mutandis auch heute noch wertvoll. Dahin gehört namentlich das Problem der Magnetisirung des Ellipsoids und einer Anzahl von Körpergestalten, die als Abarten desselben aufgefafst werden können.***) Das Ovoid spielt z. B. neuerdings in der magnetischen Mefsmethodik eine erhebliche Rolle; die theoretischen Resultate haben sich bei den genaueren Messungen, namentlich der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, stets bewährt.†) Nach Ansicht des Referenten liegt daher kein Grund vor, jene ältere Theorie völlig über Bord zu werfen, wie es von einigen Seiten vorgeschlagen wurde.

---

*) Lord Kelvin loc. cit. und Maxwell loc. cit.

**) F. Neumann, Vorlesungen über Magnetismus, Leipzig 1885.

***) Zusammengestellt bei H. du Bois, Magn. Kreise, §§ 28—33.

†) Vergl. die amtlichen Thätigkeitsberichte der P. T. Reichsanstalt über die letzten Jahre.

Bereits 1853 stellte Kirchhoff*) neue Ansätze auf, welche insofern den Thatsachen gerecht werden, als man von der Hysterese absieht. Eine vollständige Theorie der ferromagnetischen Induction unter Berücksichtigung jener Erscheinung ist bisher nicht versucht worden; ihre Aufstellung würde zwar mit grofsen Schwierigkeiten verknüpft sein, für den Mathematiker aber um so lohnender erscheinen. Für eine Menge von Stahlgufssorten**), deren Herstellung der Metallurgie neuerdings gelungen ist, und die eine weitgehende Annäherung an die — dem Mathematiker wie dem Techniker gleich erwünschte — homogene, isotrope und hystereselose Idealsubstanz darstellen, ergeben indessen die Kirchhoff'schen Ansätze bei einiger Vorsicht durchaus brauchbare Resultate. Was in erster Linie die Richtung der Induction $\mathfrak{B}$ in jedem Punkte betrifft, so folgt aus Symmetriegründen, dafs diese nach wie vor dieselbe sein mufs wie diejenige der einzigen sie bedingenden Ursache, d. h. des Vectors $\mathfrak{H}$; in der That liegt kein angebbarer Grund vor, weswegen in der isotrop gedachten Substanz die Richtung von $\mathfrak{B}$ in irgend einem Sinne von derjenigen von $\mathfrak{H}$ abweichen sollte. Zweitens tritt an Stelle obiger Poisson'schen Annahme der Satz:

III. Der numerische Wert der Induction hängt unter obigem Vorbehalte nur von demjenigen der Feldintensität ab, ohne letzterem proportional zu sein, d. h. es ist $\mathfrak{B} = \varphi(\mathfrak{H})$ oder $\mathfrak{H} = f(\mathfrak{B})$, wo φ und f inverse Functionen bezeichnen, die wir bisher analytisch nicht auszudrücken vermögen; sie werden indessen geometrisch in einer für alle Zwecke genügenden Weise durch die sogenannte Inductionscurve dargestellt, deren experimentelle Ermittelung heute eine ganz elementare Aufgabe bildet.***)

Die im vorigen kurz zusammengefafsten Entwickelungen waren zwar längere Zeit bekannt und den meisten Mathematikern geläufig; als wissenschaftliches Gemeingut konnten sie indessen kaum betrachtet werden. Nachdem Werner v. Siemens 1867 das reine dynamoelektrische Princip in einer völlig stahllosen Maschine verkörpert hatte — für deren Wirkung im Anfangsstadium die oben vernachlässigte Resthysterese freilich wesentlich ist — vergingen daher fast

---

*) Kirchhoff, Induc. Magn. eines unbegrenzten weichen Eisencylinders, Crelle's Journal 48, p. 370, 1853; Gesamm. Abhandl., p. 195, Leipzig 1882. In einem Anhange werden auf Grund der damals vorliegenden Versuche Müller's und Weber's diese modificirten Grundgleichungen discutirt.

**) A. Ebeling, Magn. Arbeiten der II. Abt. der P. T. Reichsanstalt, Elektrotechn. Zeitschr. 17, p. 535, 1896. H. du Bois und E. Taylor Jones, Magnetisirung und Hysterese einiger Eisen- und Stahlsorten, Elektrotechn. Zeitschr. 17, p. 534, 1896.

***) Vergl. die experimentelle Methodik bei Ewing, Magn. Induction, §§ 37—76; übersetzt von Holborn und Lindeck, Berlin 1892. du Bois, Magn. Kreise, §§ 209—229.

zwanzig Jahre, bevor jene Theorie ihre sinngemäfse Anwendung auf das wichtigste Werkzeug der damals schon mächtig aufblühenden Elektrotechnik erhielt. Dazu bedurfte es eines auf beiden scheinbar weitab liegenden Gebieten gleich bewanderten Mannes: John Hopkinson legte 1886 gemeinschaftlich mit seinem Bruder Edward der Londoner Royal Society seine geradezu classische Abhandlung über dynamo-elektrische Maschinen vor.*)

Hopkinson greift die im vorigen unter I, II und III angeführten Ansätze zunächst aus der Mannigfaltigkeit der übrigen Sätze in glücklichster Weise heraus und erkennt ihre allgemeine Anwendbarkeit; obwohl zumal die Theoreme I und II vom praktischen Standpunkte immerhin recht abstract erscheinen. Ferner heifst es a. a. O.: „Wie leicht einzusehen, könnte man mittelst einer genügend durchdringenden, aber langwierigen Analyse aus obigen Prämissen ohne weitere Hypothese die charakteristische Curve jeder Dynamo mit beliebiger Genauigkeit herleiten. Dies wollen wir indessen nicht versuchen, da selbst die erfolgreichste Analyse das praktische Problem kaum in einem nützlichen Lichte erscheinen lassen dürfte. Wir werden dagegen die Kurve zunächst unter gewissen vereinfachenden Annahmen berechnen; wir werden sodann die Art der diesen Annahmen entspringenden Fehlerquellen discutiren und unsere Methode daraufhin corrigiren.“

Mit Rücksicht auf das Correferat des Herrn Görges über die Berechnung der Dynamomaschinen soll die Hopkinson'sche synthetische Methode hier an einem einfacheren Beispiel erläutert werden, welches eine mathematisch schärfere Lösung zuläfst und dennoch für viele der gebräuchlichen elektromagnetischen Anordnungen durchaus typisch ist. Dazu ist zunächst zurückzugreifen auf das von Kirchhoff 1870 behandelte Problem der peripherischen Magnetisirung eines von seiner Axe nicht getroffenen Rotationskörpers, d. h. eines Ringes.**) Der Einfachheit halber beschränkt man sich auf einen Ring von kreisförmigem Querschnitt, d. h. ein Toroid. Bekanntlich weist ein solches bei tangentialer Magnetisirung keine

*) J. und E. Hopkinson, Phil. Trans. Roy. Soc. 177, I, p. 331, 1886. John Hopkinson hatte es 1871 an der Universität Cambridge zum „Senior Wrangler im math. Tripos“ und zum „1. Smith's prize man“ gebracht; später wandte er sich der elektrotechnischen Praxis zu und wurde einer der gesuchtesten Consulenten. Im Jahre 1890 wurde er zum Professor am King's College und Vorsteher des dortigen Siemens-Laboratoriums ernannt; 1898 verunglückte er in den Alpen; in Cambridge soll ein Hopkinson-Laboratorium errichtet werden.

**) Kirchhoff, Pogg. Ann. Ergänz.-Bd. 5, p. 1, 1870; Gesamm. Abhandl., p. 223, Leipzig 1882. Vergl. ferner Stoletow, Pogg. Ann. 146, p. 442, 1872. Rowland, Phil. Mag. [4] 46, p. 140, 1878. G. vom Hofe, Wied. Ann. 37, p. 482, 1889. Mues, Magn. von Eisenringen, Dissert. Greifswald 1893. Kirstädter, Wied. Ann. 65, p. 72, 1898. H. du Bois, Wied. Ann. 65, p. 403, 1898.

Pole auf und zeigt keine Aufsenwirkung im gewöhnlichen Sinne. Eben deswegen stellt es einen wichtigen Fall dar, sowohl vom mathematischen Standpunkte wie von demjenigen der Mefsmethodik. Praktisch ist freilich eine derartige wirkungslose Vorrichtung ohne Bedeutung; man erhält dagegen eine kräftige Wirkung und damit eine praktisch verwertbare Anordnung an jeder Stelle, wo man den Ring durchschneidet. Der sich daraus ergebende typische Specialfall des „radial geschlitzten Toroids" läfst sich ebenfalls lösen, d. h. es läfst sich der sogenannte Entmagnetisirungsfactor oder Gestaltscoefficient N berechnen, durch den das Magnetisirungsproblem eindeutig bestimmt, bzw. auf ein bequemes graphisches Verfahren, die „Curvenscheerung", reducirt wird, ähnlich etwa wie beim Ellipsoid. Die Wiedergabe dieser Lösung würde zu weit führen: es sei daher nur erwähnt, dafs bei einem mehrfach geschlitzten Toroide der Factor N gegen folgenden Ausdruck convergirt:

$$N = \frac{2\,\Sigma\left(d + r_2 - \sqrt{d^2 + r_2^2}\right)}{r_1 - \frac{\Sigma d}{2\pi}},$$

wofern der magnetische Zustand sich der Sättigung nähert. Darin bezeichnet r_1 den Radius des Leitkreises, r_2 denjenigen des Querschnitts, d die Weite der Schlitze; die Σ sind über sämtliche Schlitze zu erstrecken. Wenn die einzelnen Schnitte unendlich eng werden, convergirt N gegen den einfachen Ausdruck

$$N = \frac{2\,\Sigma d}{r_1},$$

und zwar nunmehr unabhängig vom Sättigungsgrade. Bei dieser Lösung ging der Referent von dem Satze des Schwindens eines Linienintegrals bei geschlossenem Integrationswege aus; sie ist also noch wesentlich potentialtheoretischer Natur; die theoretischen Resultate wurden durch sorgfältige Beobachtungen H. Lehmann's experimentell bestätigt.*) Diese Lösung führt zu übereinstimmenden Resultaten mit der Behandlung desselben Falles nach Hopkinson's Methode, welche jetzt kurz angedeutet werden möge. Die erste vereinfachende Annahme ist die, dafs man sich, wie die Gebr. Hopkinson sich ausdrücken, durch irgend ein Wunder die Inductionsröhren daran gehindert denkt, aus der Mantelfläche des Toroids auszutreten, sodafs sie nur von der einen Stirnfläche des Schlitzes zur anderen durch das, den Schnitt erfüllende unmagnetische Medium — das „Interferricum" — übertreten. Mit S sei der Querschnitt des Toroids wie des Schlitzes bezeichnet, dann ist der gesamte Inductionsflufs

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B} S.$$

---

*) H. du Bois, Zur mathem. Theorie des Ferromagnetismus. Wied. Ann. 46, p. 494, 1892. H. Lehmann, Wied. Ann. 48, p. 406, 1893.

Hopkinson zerlegt nun den „magnetischen Kreis" in seine natürlichen Teile, durch welche sich der Integrationsweg der Reihe nach hindurchzieht. Es wird dann der jeder einzelnen der so gebildeten Teilstrecken entsprechende Anteil am Linienintegral $\int \mathfrak{H}_l dl$ berechnet, indem der Mittelwert $\overline{\mathfrak{H}}$ in jedem Teile mit der auf diesen entfallenden Strecke des Integrationsweges multiplicirt wird. Die Integralanteile werden schliefslich summirt, und ihre Summe ist nach (I) dem Werte $4\pi n I$ gleichzusetzen. In dieser Weise gelingt es, zu jedem vorgeschriebenen Wert des Inductionsflusses die nötige Stromstärke auf synthetischem Wege zu ermitteln. Bei einem einzigen Schnitt verfährt man dementsprechend wie folgt. Im Schnitte ist

$$\int \mathfrak{H} dl = \mathfrak{H} d = \mathfrak{B} d = \frac{\mathfrak{G}}{S} d,$$

weil in unmagnetischen Medien $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ identisch werden; dagegen ist im übrigen ferromagnetischen Teil des Toroids

$$\int \mathfrak{H} dl = \mathfrak{H}(2\pi r_1 - d) = (2\pi r_1 - d) f\left(\frac{\mathfrak{G}}{S}\right).$$

Die Summation ergiebt nach obigem:

$$4\pi n I = \frac{\mathfrak{G}}{S} d + (2\pi r_1 - d) f\left(\frac{\mathfrak{G}}{S}\right),$$

also I als Function von $\mathfrak{G}$ oder umgekehrt.

Dieses Hopkinson'sche Verfahren läfst sich in vielen Fällen ebenfalls auf graphischem Wege bequem ausführen und sich auf magnetische Kreise allgemeinerer Art als das hier betrachtete typische Beispiel ausdehnen.

Bei Anwesenheit mehrerer Schnitte ergiebt sich die verallgemeinerte Gleichung sofort; ferner kann der Leitkreis des Ringes sich in eine beliebige ebene oder räumliche Curve verwandeln; sein Profil und sein Querschnitt können veränderlich sein, seine ferromagnetischen Teile aus verschiedenem Material bestehen. Das Wesen der Gleichung ändert sich dadurch nicht.

Was die oben eingeführte Vereinfachung betrifft, so tritt in Wirklichkeit ein Teil der Inductionsröhren aus der Mantelfläche aus. Diese ganz allgemein in der Nähe von Unterbrechungsstellen in der Continuität der ferromagnetischen Substanz auftretende charakteristische Divergenz der Inductionslinien pflegt man als Streuung zu bezeichnen und durch Einführung eines „Streuungscoefficienten" in die Gleichungen zu berücksichtigen. Die Berechnung ihrer Übergangsweise durch die unmagnetischen Teile ist für einzelne einfache Fälle näherungsweise versucht worden; in der Regel ist man auf empirische Bestimmung angewiesen. Dem Mathematiker bietet sich hier ein Forschungsgebiet, dessen weitere Erschliefsung sehr erwünscht wäre.

Das im Vorhergehenden herausgegriffene wichtigste Capitel der modernen Lehre vom Ferromagnetismus verdankt seine Gestaltung wesentlich dem Einflusse John Hopkinson's. Ohne sein Eingreifen würde man vielleicht heute noch nach einer rationellen Theorie derjenigen elektromagnetischen Vorrichtungen suchen, welche in der Praxis einen der gröfsten industriellen Fortschritte bedingt haben. Seine Person, sein Entwickelungsgang und seine Leistungen bilden eine glänzende Rechtfertigung der Bestrebungen, welche einer Entfremdung zwischen Wissenschaft und Technik zu beider Schaden entgegenwirken und die hier zu Lande auch in Ihrer Mitte thatkräftige Förderung finden.

Die praktische Berechnung der Dynamomaschinen, insbesondere für Gleichstrom.

Von **H. Görges** in Berlin.

M. H.! Ich habe den ehrenvollen Auftrag übernommen, Ihnen die Bedeutung der von Faraday aufgestellten und von Maxwell mathematisch ausgearbeiteten Kraftlinientheorie für die Elektrotechnik in grofsen Zügen darzulegen. Sie werden sehen, dafs der Elektrotechniker von dieser Theorie nur einige Hauptsätze braucht, Sätze, die sich durch ihre aufserordentliche Einfachheit auszeichnen. Hierin einerseits und in der ganz hervorragenden Anschaulichkeit andererseits ist es begründet, dafs diese Theorie binnen kurzer Zeit alle anderen magnetischen Theorien in der Elektrotechnik vollkommen verdrängt hat.

Der Elektrotechniker mufs zur Construction seiner Maschinen und Apparate vor allem die Wechselwirkung zwischen Magnetismus und elektrischen Strömen kennen und über diese Wechselwirkung möglichst vollkommene, anschauliche Klarheit besitzen. Mit Hilfe dieser Wechselwirkung erzeugt er in Maschinen unter Aufwendung mechanischer Arbeit elektrische Ströme, oder er setzt deren Energie in Elektromotoren in mechanische Arbeit um, oder er verwandelt in Transformatoren einen Strom in einen anderen von anderer Spannung. Auch die directe Zugkraft der Magnete spielt eine, wenn auch nicht so wichtige Rolle. Der Techniker verwendet sie in manchen Apparaten, wo es nur auf eine Kraftäufserung, nicht auf eine gröfsere Arbeitsleistung ankommt. Der Constructeur mufs sich von ihrer Gröfse beim Bau der Maschinen Rechenschaft geben.

Die magnetische Induction ist nun dasjenige, was der Elektrotechniker überhaupt unter Magnetismus versteht. Das Gesetz, dafs innerhalb einer Inductionsröhre die Inductionsströmung constant ist, sowie, dafs die Inductionsröhren sämtlich in sich zurücklaufen,

führt zu der wundervollen Vorstellung der Inductions- oder Kraftlinien, die nichts anderes als die Mittellinien der Inductionsröhren sind. Denken wir uns einen Magnet oder Elektromagnet, so enthält er eine endliche Anzahl von Kraftlinien, die alle in sich geschlossen sind. Soweit sie sich nicht im Innern des Magneten befinden, treten sie in die Luft über und kehren zum Magnet zurück. Die Pole des Magneten sind die Stellen, an denen die Kraftlinien aus- und eintreten. Da alle Kraftlinien in sich geschlossen sind, so entsteht ein magnetischer Kreis, der sich entweder ganz im Eisen, oder teilweise im Eisen und teilweise in der Luft, oder auch ganz in der Luft befindet. Bezüglich der Wechselwirkung zwischen einem Kraftlinienbündel und einem elektrischen Stromkreis ist es ganz einerlei, ob die Kraftlinien im Eisen oder in der Luft oder einem anderen Körper verlaufen. Es besteht in dieser Hinsicht nur ein quantitativer Unterschied, nämlich der, daſs das Eisen eine gröſsere Aufnahmefähigkeit hat als die Luft, oder mit anderen Worten, daſs es die Kraftlinien besser leitet.

Ein Beispiel möge dies erläutern: Wir betrachten eine elektrische Leitung, die aus zwei parallel neben einander geführten Kupferdrähten, der Hin- und der Rückleitung, besteht. Sobald Strom durch die Leitung geschickt wird, bilden sich Kraftlinien, die in entgegengesetzten Richtungen um die einzelnen Leiter, und daher in derselben Richtung durch den Raum zwischen beiden Leitern gehen. Nehmen wir nun an, daſs die Kupferdrähte statt durch die Luft durch einen Block Eisen liefen, so würden die durch die Kraftlinien hervorgerufenen Erscheinungen bei einem Meter Länge dieselben sein, wie bei einer etwa 2000 Meter langen Leitung in der Luft. Die magnetischen Erscheinungen in den Leitungen können daher bei elektrischen Kraftübertragungen über längere Strecken — es giebt deren schon bis zu Entfernungen von 40 und mehr Kilometer — recht beträchtlich sein.

Der Begriff der magnetischen Induction oder der Kraftlinien wird dadurch so auſserordentlich wichtig, daſs er in einer sehr einfachen Beziehung zu der in einem Leiter inducirten elektromotorischen Kraft steht. In einem in sich geschlossenen Leiter tritt nämlich bei jeder Änderung der von ihm umschlossenen Kraftlinien eine elektromotorische Kraft auf, und zwar ist diese proportional der in einer Secunde erfolgenden Zu- oder Abnahme der Gesamtzahl der umschlossenen Kraftlinien. Dabei ist es vollkommen einerlei, wodurch die Änderung verursacht wird, ob durch Änderung der Intensität des Magnetismus oder durch Ortsveränderung des Leiters oder des Magneten. Bezeichnet Φ die Gesamtzahl der umschlossenen Kraftlinien, ds die relative Verschiebung des Stromkreises zu den Kraftlinien, t die Zeit, so ist die inducirte elektromotorische Kraft

$$(1) \qquad E = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial s}\cdot\frac{ds}{dt}.$$

Das negative Vorzeichen deutet an, dafs der durch eine Vermehrung der Kraftlinien hervorgerufene Strom bestrebt ist, die ursprüngliche Kraftlinienzahl zu vermindern. Der erste Teil der rechten Seite kommt zum Beispiel bei der Induction in ruhenden Apparaten, wie in Transformatoren, der zweite Teil bei Gleichstrommaschinen, die ganze rechte Seite bei Wechselstrommotoren in Anwendung.

Man kann dem Inductionsgesetz auch noch eine andere Fassung geben, die in der Technik sehr beliebt ist. Denkt man sich nämlich einen Teil des Leiters, der senkrecht zu den Kraftlinien gerichtet ist, und in dessen Umgebung die Dichte der Kraftlinien constant sein soll, beweglich, so wird sich bei einer Verschiebung ds dieses Leiterteiles normal zu seiner eigenen Richtung und zu der der Kraftlinien die Kraftlinienzahl um die Gröfse $Blds$ ändern, wenn B die Kraftliniendichte oder die magnetische Induction und l die Länge des beweglichen Teiles ist. Die dadurch inducirte elektromotorische Kraft ist daher:

$$(2) \qquad E = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{Blds}{dt},$$

d. h. sie ist proportional der Gesamtzahl der von dem Leiter in einer Secunde geschnittenen Kraftlinien. Wenn wir nun auch thatsächlich nur geschlossene Stromkreise kennen, so liegt es doch nahe, anzunehmen, dafs der betrachtete Leiterteil auch der Sitz der elektromotorischen Kraft ist, im Gegensatz zu anderen Leiterteilen desselben Stromkreises, bei deren Verschiebung keine Kraftlinien geschnitten werden und daher auch keine elektromotorische Kraft entsteht. Mit diesem Schneiden der Kraftlinien hat die Kraftlinientheorie eine Anschaulichkeit erreicht, die kaum noch zu übertreffen ist, und daraus erklärt sich die grofse Beliebtheit dieser Anschauungsweise. Es ist aber nicht zu verkennen, dafs diese Anschauung leicht zu Irrtümern Veranlassung giebt, da sie nur einen Teil des Stromkreises betrachtet, während es immer auf den ganzen Stromkreis ankommt.

Es ist jetzt weiter die Frage, welche Kraft auf einen in einem magnetischen Felde befindlichen, stromdurchflossenen Leiter ausgeübt wird. Es sei J die Stromstärke in dem geschlossenen Stromkreis. Bewegt man nun wieder einen Teil dieses Stromkreises senkrecht sowohl zu seiner eigenen Richtung wie zu der Richtung der Kraftlinien, so entsteht wieder eine elektromotorische Kraft gemäfs Gleichung (2). Die Arbeit, die dadurch geleistet wird, ist daher·

$$\begin{aligned} JEdt &= -JBl\frac{ds}{dt}dt \\ &= -JBl\,ds \\ &= P\cdot ds. \end{aligned}$$

Daher ist:

$$(3) \qquad P = -JBl.$$

Dieser Ausdruck besagt, dafs die Kraft, die auf den Leiter ausgeübt wird, proportional der Stromstärke, seiner Länge und der Kraftliniendichte ist. Steht der Stromleiter schräg zu den Kraftlinien, so kommt statt seiner Länge nur deren Projection auf eine zu der Kraftlinienrichtung normale Ebene in Betracht. Wir brauchen daher, um einen stromdurchflossenen Leiter quer durch ein magnetisches Feld zu führen, so dafs er die Kraftlinien schneidet, einen gewissen Aufwand von Arbeit; und umgekehrt, überlassen wir den stromdurchflossenen Leiter sich selbst, so bewegt er sich quer durch das Feld und leistet Arbeit. In beiden Fällen wird durch die Bewegung eine elektromotorische Kraft erzeugt. Diese hat in dem einen Falle positives, in dem anderen Falle negatives Vorzeichen, so dafs der aufgewendeten mechanischen Arbeit elektrische Energie, und der aufgewendeten elektrischen Energie mechanische Arbeit entspricht. Aus diesem Grunde lassen sich dieselben elektrischen Maschinen im allgemeinen sowohl als Stromerzeuger wie auch als Motoren verwenden.

Fig. 1.

Da die Kraftlinien stets in sich geschlossene Linien bilden, so liegt es nahe, als Träger des Magnetismus geschlossene Eisenringe zu wählen. Bei Transformatoren, d. h. Inductionsapparaten, in denen mit Hülfe eines Wechselstromes ein anderer Wechselstrom erzeugt wird, geschieht dies auch in der Regel, nur giebt man dem Eisenkörper eine solche Form, dafs man ihn leicht teilen und die Drahtspulen leicht über das Eisen schieben kann. Eine solche Form zeigt Fig. 1, wo der Eisenkörper aus zwei etwa quadratischen Säulen AA mit der Wickelung und aus zwei Schlufsstücken, den Jochen BB, besteht.

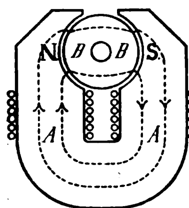


Fig. 2.

Soll hingegen mechanische Arbeit in elektrische Energie oder umgekehrt elektrische Energie in Arbeit verwandelt werden, so mufs ein Teil der Wickelung gegen die Kraftlinien beweglich sein. Man schneidet dann aus dem zunächst in sich geschlossenen Eisenkörper AA einen Cylinder BB heraus und ordnet ihn drehbar an (Fig. 2). Dieser Cylinder BB wird mit einer Drahtwickelung versehen, in der durch Drehung elektrische Ströme inducirt werden, während die Schenkel AA eine Drahtwickelung erhalten, um den nötigen Magnetismus zu erzeugen. Den festen Teil nennt man den **Feldmagnet**, den rotirenden Teil den **Anker**.

Das Bestreben, den Anker *BB* vollkommen symmetrisch in dem Feldmagnet anzuordnen, führte zu der in Fig. 3 angedeuteten Anordnung, bei der zwei magnetische Kreise vorhanden sind, die sich beide durch den Anker *BB* schliefsen. Für gröfsere Maschinen wendet man mit Vorliebe eine gröfsere Anzahl magnetischer Kreise an und gelangt dadurch zu der in Fig. 4 dargestellten Form. Diese Maschine hat sechs magnetische Kreise und stellt eine sechspolige Aufsenpolmaschine dar. Bringt man den Feldmagnet im Inneren des ringförmigen Ankers an, so erhält man eine sechspolige Innenpolmaschine (Fig. 5).

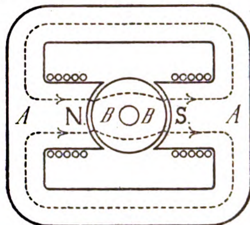


Fig. 3.

Es giebt endlich noch Fälle, wo man dem Feldmagnet keine vorspringenden Pole giebt, sondern ihn ebenso wie den Anker als Ring ausbildet. In solchen Ringen können zwei, vier oder mehr Pole vorhanden sein.

Wir müssen jetzt noch einen Blick auf den Anker werfen. Dieser ist entweder als Ring ausgebildet und mit einer den Ring



Fig. 4.

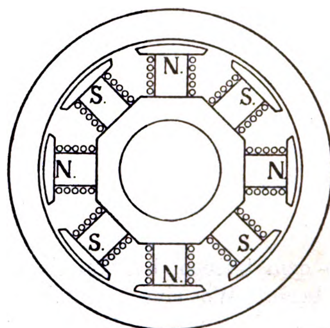


Fig. 5.

umschlingenden Drahtwickelung versehen, Fig. 8; oder er ist ein Ring oder ein Cylinder und besitzt die Wickelung nur auf der äufseren Oberfläche. Die auf der Cylinderfläche liegenden Drähte sind dann durch geeignete auf den Stirnseiten liegende Bügel mit einander verbunden. Die Eisenoberfläche des Ankers ist entweder glatt, oder mit Nuten versehen, die wieder entweder offen, oder teilweise oder ganz geschlossen sind. Fig. 6 zeigt einen Schnitt durch einen Teil eines Ankers mit offenen Nuten, Fig. 7 einen Ankerschnitt mit länglich runden Nuten, die oben nur einen schmalen Schlitz haben. Gröfse und Form der Nuten werden je nach dem vorliegenden Zwecke gewählt und zeigen daher eine aufserordentliche Mannigfaltigkeit.

Dem Maschinenconstructeur ist nun in der Regel bei der Berechnung einer Maschine die Leistung, die Spannung und wenigstens ungefähr die Tourenzahl vorgeschrieben. Er berechnet nun zuerst den Anker, indem er eine bestimmte Gröfse und eine bestimmte magnetische Beanspruchung zu Grunde legt. In mechanischer Hinsicht setzt die Centrifugalkraft einer zu grofsen Steigerung der Umfangsgeschwindigkeit eine Grenze. Bei mittelgrofsen Maschinen sind 15 m in der Secunde eine mittlere Geschwindigkeit; bei gröfseren Maschinen geht man, da die Centrifugalkraft mit dem Durchmesser abnimmt, höher, zumal wenn man halb oder ganz geschlossene Nuten verwendet. Es kommen dann Geschwindigkeiten von 30 m und mehr vor. Ebenso ist für den Magnetismus eine Grenze vorhanden. Die Induction läfst sich im Schmiedeeisen nur bei sehr hohen magnetisirenden Kräften über 20 000 Kraftlinien

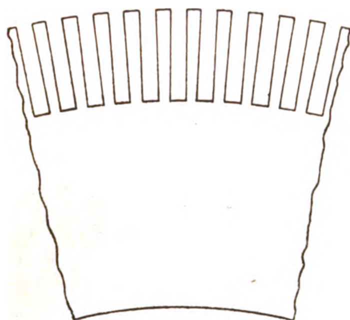


Fig. 6.

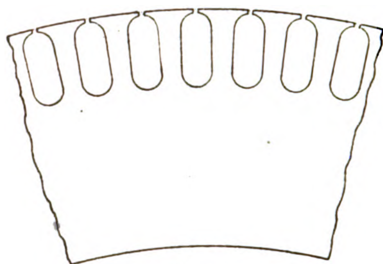


Fig. 7.

pro qcm treiben, bei Gufseisen liegt die praktische Grenze etwa halb so hoch. Wo eine wiederholte Ummagnetisirung des Eisens stattfindet, ist es wegen der dabei auftretenden Erwärmung in der Regel unmöglich, den Magnetismus bis zu jener äufsersten Grenze zu treiben. In mittelgrofsen Transformatoren kann man bei der üblichen Periodenzahl 50 in der Secunde ohne künstliche Kühlung nicht gut über 5000 bis 6000 Kraftlinien pro qcm gehen.

Hat man nun für Länge und Durchmesser, die ebenfalls in einem geeigneten Verhältnis zu einander stehen müssen, und ebenso für die Induction in der Luft bestimmte Gröfsen angenommen, so kann man die für eine gegebene elektromotorische Kraft erforderliche Drahtzahl auf dem Anker leicht bestimmen.

Wir betrachten zunächst einen Eisenring, der mit einer fortlaufenden, sich in sich selbst schliefsenden Kupferwickelung versehen ist, einen sogenannten Gramme'schen Ring, Fig. 8, der sich zwischen den beiden Polen *N* und *S* befindet. Die Kraftlinien treten

vom Nordpol durch die Luft in den Ring ein, laufen gröſstenteils im Eisen des Ringes entlang und treten zum Südpol gehend wieder aus dem Ringe aus. Solange sich nun der äuſsere Teil einer Windung zwischen einem Pol und dem Ankereisen befindet, schneidet er bei einer Drehung des Ankers die Kraftlinien und ist daher der Sitz einer elektromotorischen Kraft, die gleich dem Product aus seiner Länge, seiner Geschwindigkeit und der magnetischen Induction in der Luft ist. Die elektromotorischen Kräfte aller unter dem Einflusse desselben Poles stehenden Windungen addiren sich, dagegen sind die elektromotorischen Kräfte von Windungen, die unter entgegengesetzten Polen hindurchgehen, auch einander entgegengesetzt gerichtet.

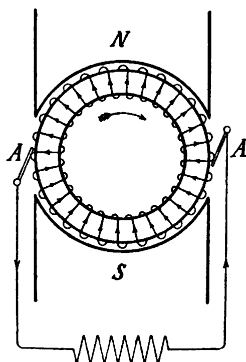


Fig. 8.

Man kann nun annehmen, daſs bei Leerlauf, d. h. solange kein Strom in der Ankerwickelung vorhanden ist, die Kraftliniendichte im ganzen Bereich eines Poles constant und daher auch die elektromotorische Kraft aller unter einem Pole befindlichen Windungen gleich groſs ist. Dann ergiebt sich für die gesamte elektromotorische Kraft einer Hälfte des Ringes aus dem vorher Gesagten leicht:

$$(4) \qquad E = pQB \cdot \frac{u}{60} \cdot 10^{-8} \text{ Volt,}$$

wenn p die Windungszahl auf dem ganzen Anker, Q die Fläche eines Poles in qcm, B die magnetische Induction in der Luft, u die Umdrehungszahl in der Minute bedeutet.

Wenn wir uns nun die Wickelung auſsen am Ringe blank denken und zwischen den Polen bei AA zwei Kupferbürsten auf der Wickelung schleifen lassen, so können wir aus der Ankerwickelung Strom entnehmen, der in der oberen Hälfte des Ringes entgegengesetzt läuft als in der unteren Hälfte. Die ganze Ankerwickelung ist daher in zwei Hälften geteilt, die in Bezug auf die Stromstärke einander parallel geschaltet sind. Da alle Verhältnisse wieder dieselben wie vorher sind, wenn sich der Ring um den Abstand zweier benachbarter Windungen von einander gedreht hat, so liefert der Anker Gleichstrom, d. h. einen stets gleichgerichteten Strom, der höchstens in der Stärke etwas pulsirt.

Das Princip der v. Hefner-Alteneck'schen Trommelwickelung besteht darin, daſs man die Wickelung nur auf der äuſseren Oberfläche eines Eisenringes oder einer Eisentrommel anordnet. Man bildet die Windungen dann so, daſs man einen unter einem Pol liegenden Kupferstab direct mit einem unter dem be-

nachbarten entgegengesetzten Pol liegenden Stab verbindet. Der Abstand beider Stäbe ist im einfachsten Falle ungefähr gleich dem Abstand der Polmitten von einander. Auch auf diese Weise kann man in sich geschlossene Wickelungen herstellen. Bei einer solchen zweipoligen Wickelung gilt dieselbe Formel für die elektromotorische Kraft, wenn man unter p jetzt die Zahl der einzelnen Stäbe auf dem Anker versteht.

Die Stärke des Stromes, den man aus dem Anker entnehmen kann, ist durch zwei Erscheinungen begrenzt. Zunächst entwickelt der Strom nach dem Joule'schen Gesetz Wärme, die dem Widerstande und dem Quadrat der Stromstärke proportional ist. Diese Wärme muſs beständig durch die Oberfläche des Ankers an die umgebende Luft in demselben Maſse, wie sie erzeugt wird, abgegeben werden, wenn die Temperatur des Ankers nicht immer weiter steigen soll. Man sucht nun durch eine geeignete Ventilation den Flächen,

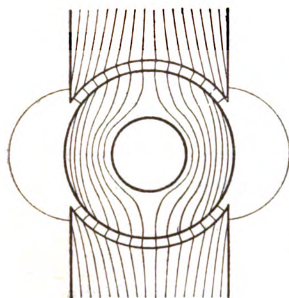


Fig. 9.

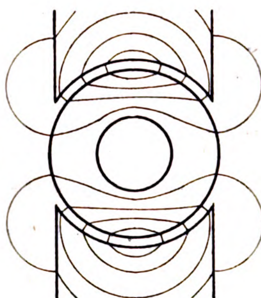


Fig. 10.

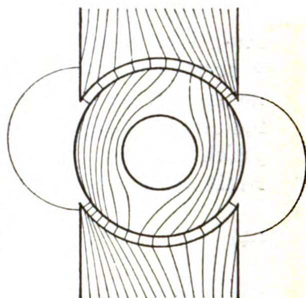


Fig. 11.

die besonders die Wärme abzugeben geeignet sind, immer wieder frische kühle Luft zuzuführen. Dies geschieht durch die Rotation des Ankers in der Regel schon von selbst und kann durch passende Schlitze im Anker noch befördert werden. Der in der Ankerwickelung erzeugte Strom hat ferner noch eine Quermagnetisirung zur Folge. Die Ankerströme verlaufen, wie wir gesehen haben, in der oberen und in der unteren Hälfte des Ringes in entgegengesetzten Richtungen und erzeugen daher für sich Kraftlinien, die in dem Anker von links nach rechts verlaufen, wie Fig. 10 zeigt. Diese Kraftlinien bilden mit den ursprünglich vorhandenen Kraftlinien, die in Fig. 9 dargestellt sind, durch Superposition ein resultirendes Feld, das Fig. 11 zeigt. Die Feldstärke erscheint jetzt unter den Polen nicht mehr gleichförmig, sondern auf der einen Seite verschwächt, auf der anderen verstärkt, und die Lage der mittelsten Kraftlinien ist um einen gewissen Winkel verdreht. Dies hat zur Folge, daſs die Stellen, an denen die Bürsten aufliegen müssen, gleichfalls etwas

verdreht werden müssen, und dadurch entsteht wieder eine Abschwächung des Gesamtmagnetismus, die durch eine stärkere Erregung der Feldmagnete wieder compensirt werden mufs, um dieselbe Spannung wie bei Leerlauf zu erhalten. Ein weiteres Eingehen auf diese für den Bau der Maschinen höchst wichtigen Erscheinungen mufs ich mir hier leider versagen.

Die Leistung eines Ankers ist durch die Gröfse der elektromotorischen Kraft und die Stromstärke gegeben. Der Constructeur wird nun im allgemeinen aus der Erfahrung von vornherein schon die annähernd richtigen Dimensionen für die Maschine annehmen, um die vorgeschriebene Leistung zu erhalten. Indem man nun mehrere Maschinen von verschiedenen Dimensionen berechnet, kann man durch Interpolation leicht die für den vorgeschriebenen Zweck geeignete finden.

Zur Construction der Feldmagnete müssen wir nun die Anzahl der Stromwindungen berechnen, die nötig sind, um den bei der Berechnung des Ankers zu Grunde gelegten Magnetismus wirklich zu erhalten. Hierzu benutzen wir die Methode von J. Hopkinson, die auf dem Satz vom Linienintegral der magnetischen Kraft beruht. Jeder Magnet übt auf die positive Masseneinheit im äufseren Raume eine Kraft aus, die mit H bezeichnet werden möge. Auch im Inneren des Magnets ist diese Kraft gleich H, wenn man sich den Einheitspol in einem Schlitz befindlich denkt, der parallel zu den Kraftlinien verläuft. Verfolgen wir nun H auf einer geschlossenen Linie, die sich um irgend welche Stromwindungen herumschlingt, so gilt die Gleichung

(5) $$\int H \cos \varepsilon \, dl = 4 \pi p J,$$

wenn J die Stromstärke, p die Windungszahl, $H \cos \varepsilon$ die in die Richtung dl fallende Componente der magnetischen Kraft ist und das Integral über die ganze geschlossene Curve ausgedehnt wird.

Nun können wir in der Praxis immer die Annahme machen, dafs die Richtung der magnetischen Induction B mit der Richtung der magnetischen Kraft H zusammenfällt. Wir können daher, indem wir das Linienintegral längs einer Kraftlinie wählen, $\cos \varepsilon$ gleich Eins setzen und erhalten dann:

(6) $$\int H dl = 4 \pi p J,$$

oder indem wir statt des cm-gr. sec. = Mafses für die Stromstärke Ampère einführen,

(7) $$\int H dl = 0{,}4 \pi p J.$$

Wenn wir nun in einer beliebigen Form einer Dynamomaschine einen der in sich geschlossenen magnetischen Kreise betrachten, die der

Symmetrie wegen alle unter sich gleich sein müssen, so können wir H in einzelnen Teilen des Kreises als constant ansehen, z. B. im Jochstück, in den Polansätzen, dem Luftzwischenraum und im Ankereisen. Wir können daher statt (7) auch

$$(8) \qquad (H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + \ldots) = 0{,}4 \pi p J$$

schreiben. Führen wir nun noch die bekannte Beziehung

$$(9) \qquad B = \mu \cdot H$$

ein, wo μ ein von der Sättigung abhängiger Coefficient, die „Permeabilität", ist, so ergiebt sich endlich

$$(10) \qquad pJ = \frac{1}{0{,}4\pi} \cdot \left[\frac{l_1}{\mu_1} B_1 + \frac{l_2}{\mu_2} B_2 + \frac{l_3}{\mu_3} B_3 + \ldots\right].$$

Gehen wir von der Gesamtzahl der Kraftlinien im Luftraum aus, die offenbar $B_l Q_l$ sein mufs, wenn Q_l den Querschnitt der Luft bedeutet, so ist hier $\mu = 1$, und man hat als Ampère-Windungszahl für diesen Teil einfach:

$$(11) \qquad pJ = \frac{1}{0{,}4\pi} \cdot l_l B$$

zu setzen, was bei 1 cm Luftlänge etwa 800 Ampère-Windungen für je 1000 Kraftlinien ergiebt. Um die Ampère-Windungszahlen für die übrigen Teile des magnetischen Kreises bestimmen zu können, mufs man die Kraftliniendichte B und die Permeabilität μ für diesen Wert von B und für das betreffende Material (Schmiedeeisen, Gufseisen, Stahlgufs) kennen. Die Gröfse von B ergiebt sich daraus, dafs die Gesamtinductionsströmung in allen Teilen des magnetischen Kreises gleich grofs sein mufs. Würden z. B. alle in den Schenkeln vorhandenen Kraftlinien auch in den Anker gehen, so würden sich die Werte von B umgekehrt wie die Querschnitte verhalten. Es gehen aber auch durch Streuung Kraftlinien von einem Pol direct zum andern, ohne den Anker zu durchlaufen. Daher ist ein Zuschlag an Kraftlinien in den Feldmagneten nötig, den man angenähert aus dem Verlauf der gestreuten Kraftlinien berechnen oder auch bei bestimmten Formen ein für alle mal aus Versuchen entnehmen kann.

Die Abhängigkeit des Wertes μ von B ist dank zahlreichen neueren Untersuchungen für die verschiedensten Eisensorten bekannt. Ausserdem aber stellen die Fabriken diese Abhängigkeit von Zeit zu Zeit für die von ihnen benutzten Eisensorten wieder fest. Diese Abhängigkeit wird durch eine Curve in einem rechtwinkligen Coordinatensystem dargestellt, dessen Abscissen die Werte von B und dessen Ordinaten die Werte von μ darstellen.

Der rechnende Elektrotechniker vereinfacht sich aber die Arbeit

noch mehr. Er trägt in einem rechtwinkligen Coordinatensystem direct die Werte

$$y = \frac{1}{0,4\,\pi} \cdot \frac{B}{\mu} \tag{12}$$

als Function von B auf. Sobald daher B einmal festgestellt ist, braucht er aus der Curve nur y abzugreifen und mit der Länge l des betreffenden Stückes zu multipliciren, um die für diesen Teil erforderlichen Ampère-Windungen zu bestimmen. Solche Curven für

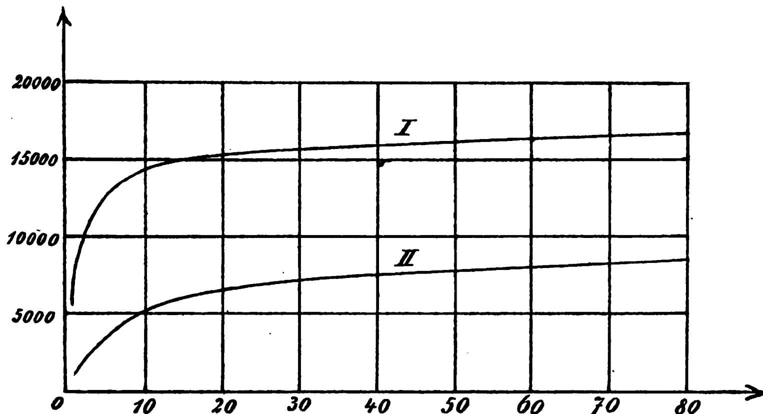


Fig. 12.

Schmiedeeisen (I) und Gufseisen (II) zeigt Fig. 12. Man sieht aus diesen Curven nebenbei gesagt mit einem Blick, um wieviel das Schmiedeeisen dem Gufseisen überlegen ist. Neuerdings werden übrigens Sorten von gegossenem Dynamoeisen, namentlich Stahlgufs, hergestellt, die das Schmiedeeisen an Güte noch übertreffen.

Die Rechnung selbst wird in einer kleinen Tabelle zusammengestellt, etwa wie folgt:

	Material	B	$\frac{1}{0,4\pi} \cdot \frac{B}{\mu}$	Länge cm	AW
Ankerkranz	Eisenblech	7500	5	20	100
Ankerzähne	Eisenblech	18300	95	5,4	513
Luft	Luft	6240	4950	0,8	3960
Schenkel	Gufseisen	7200	35	40	1400
Joch	Gufseisen	6000	23	70	1610
					$\Sigma = 7583$

Die Summe der einzelnen Ampère-Windungszahlen ergiebt die für die Herstellung des gesamten magnetischen Kreises erforderliche Ampère-Windungszahl.

Da, wie wir aus den Figuren 9, 10 und 11 gesehen haben, die durch den Ankerstrom erzeugten Ampère-Windungen eine störende Wirkung auf die Magnetisirung ausüben, so ist es nötig, dafs sie einen bestimmten Bruchteil der Schenkel-Ampère-Windungen nicht überschreiten. Die letzteren müssen daher eine beträchtliche Gröfse besitzen, und dies ist, wie auch aus der vorher aufgestellten Tabelle hervorgeht, am besten zu erreichen, indem man die Schenkel stark sättigt und den Luftraum zwischen Anker und Schenkeleisen nicht zu klein nimmt. Es ist daher keineswegs in allen Fällen richtig, den magnetischen Kreis soviel wie möglich im Eisen verlaufen zu lassen; ein angemessener Luftraum spielt im Gegenteil eine sehr wichtige Rolle.

Ist nun die Ampère-Windungszahl auf den Schenkeln bestimmt, so kann man zur Bestimmung der Schenkelwickelung schreiten. Hierbei ist zu beachten, dass die dafür aufgewendete Energie in mäfsigen Grenzen bleiben mufs, einmal um die Wickelung nicht zu sehr zu erwärmen, dann aber auch, um den Energieverlust in der Maschine nicht zu grofs werden zu lassen. Man kann nun ohne Schwierigkeit nachweisen, dafs bei gegebener Spannung für die Erregung der Drahtquerschnitt von der Windungszahl nahezu unabhängig und die aufgewendete Energie der Windungszahl umgekehrt proportional ist. Hat man nun Querschnitt und Windungszahl festgestellt, so giebt man, um den Wickelungsraum zu gewinnen, den Schenkeln eine passende Länge und schliefst die Schenkel durch das Joch.

Die Wickelung wird mitunter auch auf dem Joch angebracht. Je näher indessen die Wickelung dem Anker ist, um so weniger Kraftlinien können durch Streuung verloren gehen. Die Anordnung auf den Schenkeln ist daher vorzuziehen, und je näher sie dem Anker kommt, um so wirksamer ist sie.

Nach diesen kurzen Darlegungen müssen wir uns noch der Frage zuwenden, wie grofs die Arbeitsverluste in der Maschine sind, wie hoch also ihr Wirkungsgrad ist. Wie wir schon erfahren haben, treten Verluste im Eisen und in der Kupferwickelung auf. Dazu kommen noch Verluste durch mechanische Reibung. Wir betrachten zunächst die Verluste durch Ummagnetisirung des Eisens.

Bei einer Änderung der Kraftliniendichte im Anker, sei sie nun durch eine Änderung der Intensität oder durch eine Richtungsänderung hervorgerufen, treten Erscheinungen auf, die unter dem Namen Hysteresis zusammengefasst werden.

Infolge der Coercitivkraft des Eisens, oder mit anderen Worten, der magnetischen Remanenz, bleibt nämlich bei einer Änderung der magnetisirenden Kraft der jeweilige magnetische Zustand des Eisens etwas hinter der ihn hervorrufenden Ursache zurück. Magne-

tisirt man z. B. ein Stück Eisen durch Wechselstrom, so hat der Magnetismus eine gewisse Phasenverschiebung gegen die Stromstärke, d. h. er geht später durch Null als die Stromstärke und erreicht später sein Maximum als diese, u. s. w. Aus diesem Grunde ist von Ewing der Name Hysteresis gewählt.

Trägt man in einem rechtwinkligen Coordinatensystem die Werte B eines Eisenstückes, z. B. eines dünnen in sich geschlossenen Eisenringes, als Ordinaten, die Werte H der magnetischen Kraft als Abscissen auf, so erhält man eine Schleife, wie sie Fig. 13 darstellt. Die Induction B geht vom Nullpunkt 0 aus, wächst bis zu einem Maximum A, geht bei abnehmender magnetischer Kraft zurück nach B, C, D, wobei D einer ebenso grofsen negativen magnetisirenden Kraft entspricht, wie A einer positiven, und kehrt bei abermaliger Umkehr der magnetisirenden Kraft über E, F nach A zurück. Aus dieser Figur folgt, dafs $OB = OE$ der remanente Magnetismus ist, d. h. der Magnetismus, der übrig bleibt, wenn die magnetisirende Kraft aufgehört hat, ferner dafs OC oder OF die magnetisirende Kraft ist, die sogenannte Coercitivkraft, die nötig ist, um den Magnetismus wieder auf Null zu bringen.

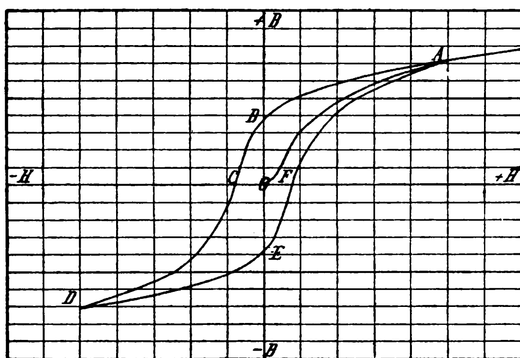


Fig. 13.

Diese Schleife ist von aufserordentlicher Wichtigkeit, denn sie stellt die Arbeit dar, die in Wärme umgesetzt wird, wenn der Magnetismus einmal den ganzen Kreisprocess durchläuft. Denkt man sich nämlich einen Eisenring von verhältnismäfsig grofsem Durchmesser und geringem Querschnitt mit einer Stromspule derart umwickelt, dafs die Kraftlinien ganz in seinem Innern verlaufen, so kann man den Satz vom Linien-Integral: Gleichung (6) in der Form

$$4\pi p J = Hl \tag{13}$$

schreiben, wobei l der mittlere Umfang des Ringes ist.

Wenn also die magnetisirende Kraft von Null bis zu einem Werte H wächst, so wächst die Stromstärke J proportional nach dem durch Gleichung (13) gegebenen Gesetz. Durch H wird in dem Eisenring eine Induction B erzeugt, die durch das Gesetz

(14) $$B = \mu H$$

gegeben ist. Durch die Zunahme der Kraftlinienzahl wird nun aber in der magnetisirenden Drahtspule eine elektromotorische Kraft E erzeugt, für die nach (1) die Gleichung

(15) $$E = -pQ\frac{dB}{dt}$$

gilt, wenn p die Windungszahl der Spule und Q den Ringquerschnitt bedeutet. Multiplicirt man die Gleichungen (13) und (15) mit einander, so erhält man:

(16) $$JEdt = -\frac{1}{4\pi} \cdot QlHdB.$$

Ql ist nichts weiter als das Volumen V des Eisenringes, und andererseits ist $JEdt$ die Arbeit, die von der Stromquelle aufgewendet werden mufs, um die Induction um dB zu vergröfsern. Abgesehen hiervon hat die Stromquelle allerdings noch die Arbeit der Stromwärme $J^2 Wdt$ zu leisten. Diese Arbeit ist jedoch davon unabhängig, ob Magnetismus entsteht oder nicht, und geht uns daher hier nichts an. Die durch (16) gekennzeichnete Arbeit ist also erforderlich, um die potentielle Energie W des Elektromagneten um dW zu vergröfsern. Wir können daher schreiben:

$$dW = -JEdt$$

und finden daraus durch Integration:

(17) $$W = \frac{V}{4\pi}\int_{B_1}^{B_2} HdB.$$

Lässt man nun die Magnetisirung einen vollen Kreisprocess durchlaufen, so bleibt nach Gleichung (17) in dem Eisenringe eine Arbeit zurück, die der von den Curven eingeschlossenen Fläche $ABCDEFA$ proportional ist. Diese Arbeit setzt sich in Wärme um. Das Eisen wird daher heifs, wenn es wiederholt und häufig ummagnetisirt wird. Diese Wärme mufs von dem Constructeur sehr sorgfältig beachtet werden, und es mufs für ihre Abführung Sorge getragen werden, wenn sie die Maschine nicht im Betriebe übermäfsig erhitzen soll. Die Wärme tritt natürlich besonders in den Zähnen des Ankers auf, weil hier die Kraftliniendichte besonders grofs ist. Noch nicht abgeschlossen sind übrigens die Untersuchungen darüber, wie grofs die in Wärme umgesetzte Energie ist, wenn die Ummagnetisirung nicht durch Intensitätsänderungen des Magnetismus, sondern durch eine constante Richtungsänderung erfolgt, wie es im Innern des Ankers mehr oder weniger der Fall ist.

Eine weitere Wärmequelle im Ankereisen bilden die sogenannten W i r b e l s t r ö m e. Ebenso gut nämlich wie in der Drahtwickelung,

die auf dem Anker liegt, werden auch im Eisen selbst elektromotorische Kräfte inducirt. Diese suchen Ströme zu erzeugen, die natürlich unbenutzt bleiben und sich in Wärme umsetzen. Man stellt daher den Anker aus einzelnen dünnen Blechen von ungefähr $1/2$ mm Stärke her, die von einander durch Papierzwischenlagen oder auf andere Weise isolirt sind. Die Ebene der Bleche mufs so gelegt werden, dafs die elektromotorischen Kräfte senkrecht zu ihr gerichtet sind. Dies geschieht bei den Ankern der Maschinen dadurch, dafs man die Blechscheiben senkrecht zur Axe über einander schichtet. Da die Stromwärme nach dem Joule'schen Gesetz gleich

$$J^2 W = \frac{E^2}{W}$$

ist, so ist der durch Wirbelströme erzeugte Energieverlust nach Gleichung (4) auch dem Quadrat der Induction B proportional. Er wird also ebenfalls in den Zähnen am stärksten auftreten. Dieser Verlust ist ferner dem Quadrat der Blechstärke proportional, wie eine einfache Überlegung ergiebt. Man wählt daher die Blechstärke möglichst gering. Sie variirt etwa zwischen 0,3 und 0,75 mm.

Zu diesen Verlusten im Eisen tritt nun noch die Stromwärme in der Anker- und in der Schenkelwickelung.

Endlich tritt eine Reibungsarbeit in den Lagern der Maschine und an der umgebenden Luft auf. Zur Abführung der Wärme mufs man sogar, wie schon vorher bemerkt, für eine genügende Ventilation sorgen, die natürlich einen wenn auch nicht bedeutenden Energieaufwand verlangt.

Alle diese Verluste betragen je nur wenige Procent der zugeführten Leistung, z. B. bei Maschinen von 20 bis 50 Pferdestärken etwa je 2 bis 3 Procent, sodafs die Gesamtverluste nur etwa 10 Procent ausmachen und von der der Maschine zugeführten mechanischen Leistung etwa 90 Procent als elektrische Leistung wieder gewonnen werden. Bei kleinen Maschinen und Motoren ist der Wirkungsgrad kleiner, bei grofsen oft noch höher bis zu 94 Procent. Wechselstromtransformatoren haben einen sehr hohen Wirkungsgrad, hier erreicht man schon bei ganz kleinen Typen von etwa 1000 Watt 90 Procent, bei mittleren 96, bei ganz grofsen bis 98 Procent.

Wie schon erwähnt, spielt endlich auch noch die Anziehung zweier einander gegenüberstehender Polflächen eine gewisse Rolle bei der Construction der Maschinen und Apparate. Auch zur Feststellung der Gröfse dieser Kraft reichen die im vorhergehenden genannten Gesetze aus, wenn man noch das Gesetz von der Erhaltung der Energie hinzunimmt. Ist P die Zugkraft in kg, Q der Querschnitt in qcm, so ist

(18) $$P = \frac{QB^2}{8\pi \cdot 981 \cdot 1000}.$$

Diese Gleichung zeigt, dafs bei einer Kraftliniendichte von 5000 Kraftlinien pro qcm ein Zug von rund 1 kg auf 1 qcm ausgeübt wird. Diese Kraft wächst mit dem Quadrat der Induction, erreicht also bei 20000 Kraftlinien etwa 16 kg pro qcm.

M. H. Sie sehen, dafs es nur wenige Sätze der Theorie sind, die der Elektrotechniker für seine Rechnungen braucht. Es ist einmal das Gesetz, dafs die Kraftlinien in sich geschlossen sind, dann die beiden Gesetze der Wechselwirkung zwischen einem derartigen magnetischen Kreise und einem kettengliedartig mit ihm verschlungenen elektrischen Stromkreise, nämlich das Gesetz von der Induction der elektromotorischen Kraft in dem Stromkreise und der Satz vom Linienintegral der magnetisirenden Kraft. Diese Sätze im Verein mit dem Satz von der Erhaltung der Energie sind das Fundament, auf dem sich die ganze moderne Theorie der Dynamomaschinen und elektrischen Apparate aufbaut. Die rapide Entwickelung der Elektrotechnik wäre nicht möglich gewesen, wenn nicht zuvor die Wissenschaft das sichere Fundament gebaut hätte.

Über das Problem der elektrodynamischen Drahtwellen.

Von **A. Sommerfeld** in Clausthal.

Es handelt sich um die äufserst einfache Frage: Wie pflanzt sich eine periodische elektrische Störung längs eines beiderseits unendlich langen Drahtes von gerader Axe und kreisförmigem Querschnitt fort?

Die ursprüngliche von Hertz gegebene Behandlung (Wied. Ann. 1888) ist nicht ausreichend, weil hier der Draht als unendlich dünn angenommen wird und dementsprechend die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unbestimmt bleibt. Einige Verbesserungen der Hertz'schen Lösung gab Poincaré (Comptes Rendus 1892), wobei jedoch die Frage nach der Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleichfalls nicht beantwortet, vielmehr diese von vornherein gleich der Lichtgeschwindigkeit V angenommen wird. Sehr viel vollständiger ist die Behandlung von J. J. Thomson (Recent Researches, 1893). Von dieser unterscheidet sich die Methode des Vortragenden nur dadurch, dafs einerseits die Fragestellung vereinfacht, andererseits die Durchführung verschärft ist.

Es wird angenommen, dafs der Zustand rings um den Draht symmetrisch verteilt ist und dafs er der Zeit nach rein periodisch und harmonisch verläuft. Durch Übereinanderlagerung solcher rein harmonischer Schwingungen kann man auch einem nicht harmonischen (zeitlich gedämpften) Zustande gerecht werden. Die Abhängigkeit von der in axialer Richtung gemessenen Coordinate z wird durch eine Exponentialfunction dargestellt; die Abhängigkeit von der radialen Coordinate r drückt sich alsdann durch Bessel'sche Functionen aus.

Es zeigt sich nun, dafs man allen nach Maxwell zu stellenden Differential- und Oberflächenbedingungen auf zwei ganz verschiedene Arten genügen kann. 1) Indem man annimmt, die Fortpflanzung längs des Drahtes gehe ohne örtliche Dämpfung vor sich. Die Geschwindigkeit der Fortpflanzung kann man dann einem beliebigen Werte $> V$ gleichsetzen. Indessen müfste man in diesem Falle dafür sorgen, dafs der Energieflufs aus dem Unendlichen in radialer Richtung jederzeit passend geregelt wird. 2) Schliefst man diesen Fall als physikalisch bedeutungslos aus, so ergiebt sich mit Notwendigkeit aus den Oberflächenbedingungen ein bestimmter, von Null verschiedener Betrag der örtlichen Dämpfung und ein bestimmter, etwas unterhalb der Lichtgeschwindigkeit gelegener Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Beide Gröfsen, Dämpfung und Fortpflanzung, erscheinen in eine complexe Constante zusammengefafst, welche als Wurzel einer ziemlich complicirten transcendenten Gleichung mit Bessel'schen Functionen bestimmt ist. Unter den Verhältnissen der Hertz'schen Versuche (grofse Schwingungsfrequenz und grofse Leitfähigkeit des Drahtes) läfst sich die Gleichung jedoch bedeutend vereinfachen. Die fragliche Wurzel berechnet sich bequem durch einen unendlichen, kettenbruch-ähnlichen Procefs, welcher mit dem von Eisenstein (Crelle's Journal Bd. 28) betrachteten unendlichen Potenzausdrucke verwandt ist.

Von Interesse sind die numerischen Details: Bei einem Kupferdrahte von 2 mm Radius und einer Schwingungsfrequenz von 10^9 pro Secunde findet man für die Differenz zwischen der Lichtgeschwindigkeit V und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Drahtwelle V_1:

$$V - V_1 = 8 \text{ Kilom. ca.}$$

Die Gröfse der Dämpfung ferner wird durch die Angabe veranschaulicht, dafs die Schwingungsamplitude erst nach einem Wege von $1\frac{1}{2}$ Kilom. ca. sich auf den e^{ten} Teil ihres ursprünglichen Betrages reducirt hat. Die Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit sowie die Gröfse der Dämpfung sind hiernach unter den angegebenen Verhältnissen so klein, dafs sie sich der Beobachtung vollständig entziehen — in bester Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen. Ferner läfst sich auch leicht, was bereits von anderer Seite her bekannt ist, bestätigen und numerisch belegen, dafs die elektrische und magnetische Kraft von der Oberfläche des Drahtes aus nach innen hin aufserordentlich schnell, nach aufsen hin ziemlich langsam abnimmt, dafs die elektrischen Kraftlinien nach aufsen hin nahezu senkrecht, nach innen im allgemeinen nahezu tangential zur Oberfläche verlaufen etc.

Die genauere Ausführung nebst weiteren numerischen Beispielen findet man in Wied. Ann. vom Jahre 1899.

Über die Induction in rotirenden Körpern.

Von **A. Tauber** in Wien.

Das zu besprechende Problem lautet:

Ein körperlicher Leiter von homogener Structur, der die Form eines Rotationskörpers habe, rotire in einem unveränderlichen (etwa von permanenten Magneten erzeugten) Magnetfeld mit gleichförmiger Geschwindigkeit um seine Axe. Dann werden sich in diesem Körper stationäre elektrische Ströme entwickeln. Die Stärke und Richtung dieser letzteren ist zu ermitteln.

Dieses Problem ist für die Kugel von Hertz in seiner Dissertation gelöst worden.

Die Ableitung der Differentialgleichungen des Problems aus den Maxwell'schen Gleichungen ist von Mathieu gegeben worden.

Von C. Neumann rührt die Behandlung eines freilich sehr speciellen Falles her, bei welcher die Helmholtz'sche Theorie zu Grunde gelegt wurde.

Ich habe das Problem allgemein untersucht und gefunden, dafs die Differentialgleichungen desselben durch die successiven Constructionen gewisser harmonischer Functionen mit vorgegebenen Randbedingungen integrirt werden können. In manchen Fällen, insbesondere bei der Kugel, vereinfacht sich die Untersuchung erheblich und kann viel kürzer gefafst werden als bei Hertz.

Vom mathematischen Standpunkt aus handelt es sich um Integrale der Differentialgleichung

$$\triangle F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = a\left(x\frac{\partial F}{\partial y} - y\frac{\partial F}{\partial x}\right),$$

welche durch die Einführung von Polarcoordinaten ϱ, ψ statt x, y

$$x = \varrho\cos\psi, \quad y = \varrho\sin\psi$$

geschrieben werden kann:

$$\triangle F = a\frac{\partial F}{\partial\psi}.$$

Diese Differentialgleichung steht mit der bekannten

$$\triangle F = k^2 F$$

in naher Beziehung. Denn setzt man

$$F = e^{\nu i\varphi}\text{mal Function von } \varrho,\ z,$$

so genügt offenbar F der Relation

$$\triangle F = a\nu i\, F.$$

Die Randbedingungen, welchen die auftretenden Integrale von $\triangle F = a\frac{\partial F}{\partial \psi}$ zu genügen haben, sind ziemlich complicirt. Ich will dieselben erst später betrachten.

Gehen wir aus von den Maxwell'schen Gleichungen

$$ku = c\frac{dy}{dt} - b\frac{dz}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$kv = a\frac{dz}{dt} - c\frac{dx}{dt} - \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

$$kw = b\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Hierin stellen u, v, w die Strömungscomponenten,

$$F = \int\frac{u\,d\tau}{E}, \quad G = \int\frac{v\,d\tau}{E}, \quad H = \int\frac{w\,d\tau}{E}$$

die Potentiale von Massen, welche mit der Dichte u, v, w über den Körper verbreitet sind, ψ das elektrostatische Potential der freien Elektricität, und k den specifischen Widerstand vor. Ferner ist

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial \chi}{\partial x},$$

$$b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y},$$

$$c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z},$$

wo $\frac{\partial \chi}{\partial x}$, $\frac{\partial \chi}{\partial y}$, $\frac{\partial \chi}{\partial z}$ die Componenten des magnetischen Feldes sein sollen. Sieht man aber vorerst ab von der magnetischen Polarität, welche der Körper erhalten kann, so ist χ eine innerhalb des letzteren bekannte harmonische Function.

In unserem Falle ist

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x, \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

wenn die z-Axe zur Rotationsaxe gewählt wird und ω die Winkelgeschwindigkeit vorstellt. Ausserdem ist

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

weil das Stromsystem ein stationäres sein soll.

Es handelt sich also um die Ermittelung von u, v, w, Φ aus den obigen Gleichungen und aus

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\bar{u}\cos(N_i, x) + \bar{v}\cos(N_i, y) + \bar{w}\cos(N_i, z) = 0.$$

Setzt man

$$u = y\frac{\partial p}{\partial z} - z\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y},$$

$$v = z\frac{\partial p}{\partial x} - x\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial x},$$

$$w = x\frac{\partial p}{\partial y} - y\frac{\partial p}{\partial x},$$

so läfst sich das Problem folgendermafsen formuliren:

Zwei Functionen p, q zu finden, welche innerhalb des Körpers die Gleichungen

$$\triangle p = a\frac{\partial p}{\partial \psi}, \quad \triangle q = a\frac{\partial q}{\partial \psi}$$

befriedigen, derart, dafs einerseits der Quotient $\frac{q}{p}$ vorgegebene Randwerte besitzt*), andererseits die Beziehung erfüllt ist (innerhalb des Körpers):

$$P + x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} + z\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z} = a\frac{\partial \chi}{\partial \psi}.$$

Hierin bedeuten P, Q die Oberflächen-Integrale

$$P = \int \left(p\frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial N_i} - \frac{1}{E}\frac{\partial p}{\partial N_i} \right) d\sigma,$$

$$Q = \int \left(q\frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial N_i} - \frac{1}{E}\frac{\partial q}{\partial N_i} \right) d\sigma,$$

und es ist $\frac{4\pi\omega}{k} = a$ gesetzt worden.

Eine wesentliche Vereinfachung erhält die Aufgabe für den Fall der Kugel oder Hohlkugel. Dann ist $q = 0$, und man hat eine Function p zu construiren, welche innerhalb des Körpers die Gleichung $\triangle p = a\frac{\partial p}{\partial \psi}$ und aufserdem die Gleichung $P = a\frac{\partial H}{\partial \psi}$ erfüllt, wo die harmonische Function H leicht aus der Gleichung

$$H + x\frac{\partial H}{\partial x} + y\frac{\partial H}{\partial y} + z\frac{\partial H}{\partial z} = \chi$$

bestimmt werden kann.

Auch in dem Falle eines Rotationsellipsoides im homogenen Felde und in einigen anderen Fällen vereinfacht sich das Problem,

*) Nämlich die Werte

$$\frac{x\cos(N_i, z) - z\cos(N_i, x)}{\cos(N_i, x)} = \frac{y\cos(N_i, z) - z\cos(N_i, y)}{\cos(N_i, y)}$$

indem sich dann p, q durch eine einzige Function ausdrücken lassen.

Bezüglich der mathematischen Behandlung der Aufgabe kann ich hier nur so viel bemerken, dafs man im allgemeinen, mit Ausnahme der eben erwähnten Specialfälle, p, q nach Potenzen von ω zu entwickeln haben wird:

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1} p_n, \quad q = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1} q_n,$$

und dafs die successive Berechnung der einzelnen Coefficienten p_n, q_n die Bestimmung gewisser harmonischer Functionen U_0, U_1, U_2, ... erfordert, für welche $\frac{\partial U_0}{\partial N_i}$, $\frac{\partial U_1}{\partial N_i}$, $\frac{\partial U_2}{\partial N_i}$, ... bekannt sind.

Diese Entwickelung nach Potenzen von ω entspricht, physikalisch gesprochen, der Berücksichtigung der aufeinanderfolgenden Inductionen. Bei Vernachlässigung der Selbstinduction besteht also die Aufgabe blofs in der Bestimmung der einen Function U_0.

Ich bemerke noch, dafs man durch Grenzübergänge den Fall einer unendlich dünnen leitenden Schale erhält, und dafs das Problem in analoger Weise behandelt werden kann, wenn der Körper magnetisch inducirbar ist.

Ein elementares Übungsbeispiel zur Potentialtheorie.

Von **Ignaz Schütz** in München.

Die Potentialtheorie, im gewöhnlichen Sinne des Wortes, beschäftigt sich mit der Untersuchung von Massen, die nach dem Newton'schen Kraftgesetze $m \cdot r^{-2}$ in die Ferne wirken. Nimmt man an, dafs die Massen gleichmäfsig auf Linien verteilt sind, und zwar auf unendlichen unter einander parallelen Geraden, so lehrt eine zuerst von Herrn Carl Neumann angestellte Grenzbetrachtung, dafs sich die Wirkung dieser Massen ersetzen lasse durch punktförmige Massen, welche in einer zu jenen Geraden normalen Ebene nach dem Kraftgesetze mr^{-1} in die Ferne wirken; man gelangt so zur Auffassung der logarithmischen Potentialfunction. Nimmt man an, dafs die Massen gleichmäfsig auf Flächen verteilt sind, und zwar auf unendlichen, unter einander parallelen Ebenen, so lehrt eine analoge Grenzbetrachtung, dafs sich die Wirkung dieser Massen ersetzen lasse durch punktförmige Massen, welche in einer zu jenen Ebenen normalen Geraden nach dem Kraftgesetze mr^0 in die Ferne wirken.

In dieses Kraftgesetz geht die Entfernung nicht mehr ein; die Kraft wirkt unabhängig von der Entfernung in die Ferne. Die

Potentialfunction dieser Kraft hat die Form mr, und wir wollen sie hier als die lineare Potentialfunction ansprechen.

Man findet für die lineare Potentialfunction alle Theoreme wieder, die für die Newton'sche und die logarithmische Potentialfunction gefunden sind, und die Lehrsätze nehmen hier die Form besonders anschaulicher und einfacher geometrischer und algebraischer Wahrheiten an; sie stellen gewissermaſsen nichts anderes dar als eine analytisch verfeinerte Theorie der geraden Linie. Auf eine Analogie zu den Green'schen Functionen hat schon Herr Heinrich Burkhardt*) aufmerksam gemacht; ich wünsche hier einige noch elementarere Sätze hervorzuheben.

So stellt die Gaufs'sche Continuitätsgleichung $\int \frac{dV}{dn} ds = 0$ in der Theorie des linearen Potentiales den elementaren Satz dar, daſs die Richtung einer begrenzten geraden Linie in ihren beiden Endpunkten die nämliche ist. Da man die Begrenzungspunkte beliebig wählen kann, so sagt dieser Satz, daſs die Richtung einer Geraden in allen ihren Punkten die nämliche ist. Danach ist hier die Gaufs'sche Continuitätsgleichung gleichbedeutend mit der Definition der geraden Linie.

Die Eindeutigkeitsaussage des Dirichlet'schen Principes geht über in den Lehrsatz, daſs zwischen zwei gegebenen Begrenzungspunkten keinesfalls mehr als eine einzige Gerade möglich ist, und die Existenzaussage desselben Principes in den Lehrsatz, daſs zwischen zwei gegebenen Punkten jedenfalls eine Gerade möglich ist.

Das analytische Verfahren, die Randwertaufgabe des Dirichlet'schen Principes herzustellen, reducirt sich auf die elementare Aufgabe, zwei lineare algebraische Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen.

Noch bemerken wir, daſs auch die Poisson'sche Differentialgleichung $\Delta V = -\omega q$ in der Theorie der linearen Potentialfunction diese Form beibehält; nur nimmt die Constante ω, welche für die Newton'sche den Wert 4π, für die logarithmische den Wert 2π hat, für die lineare Potentialfunction den Wert 2 an; q ist die Dichte der Massenbelegung.

Wir gehen jetzt, um neue Erkenntnisse zu gewinnen, zu jener erweiterten Potentialtheorie über, welche durch eine zuerst von Herrn August Gutzmer**) publicirte Erweiterung des Green'schen Satzes

*) Heinrich Burkhardt, Sur les Fonctions de Green relatives à un domaine d'une dimension. Bulletin de la Société mathématique de France. T. 22. 1894. p. 71—75.

**) August Gutzmer, Remarques sur quelques équations différentielles partielles d'ordre supérieur. Journal de Mathématiques pures et appliquées. (J. Liouville.) S. IV. T. 6. 1890. p. 405—422. Leider konnte ich diese Arbeit, da ich sie erst später kennen lernte, nicht schon hervorheben, als ich 1895 in den Göttinger Nachrichten über ähnliche Dinge publicirte.

eingeleitet ist, immer unter der hier festgehaltenen speciellen Voraussetzung von Functionen nur einer einzigen Veränderlichen.

Es gehen in die Gutzmer'sche Gleichung — gleichwie in die Green'sche — zwei willkürliche Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ein; bestimmt man für deren eine die Form

$$\psi(x) = \frac{|x-\xi|^n}{n!},$$

darin n eine beliebige ganze ungerade Zahl bedeutet, so nimmt die Gutzmer'sche Gleichung unmittelbar die Form an

$$2\varphi(x) - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^{n+1}\varphi(x)}{dx^{n+1}} \frac{|x-\xi|^n}{n!} dx$$
$$= \varphi(x_1) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d^i\varphi(x_1)}{dx_1^i} \frac{|x_1-\xi|^i}{i!} + \varphi(x_2) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d^i\varphi(x_2)}{dx_2^i} \frac{|x_2-\xi|^i}{i!}.$$

Sehen wir zunächst von dem bestimmten Integrale auf der linken Seite der Gleichung ab, so lehrt dieser Satz, dafs die willkürliche Function $\varphi(x)$ im Punkte ξ einer begrenzten Geraden dargestellt werden kann als das arithmetische Mittel zweier Potenz-Entwickelungen der Entfernungen des Punktes ξ von den Begrenzungspunkten x_1 und x_2. Läfst man nunmehr die Punkte x_2 und ξ zusammenfallen, so verschwindet die zweite Summe auf der rechten Seite der Gleichung, ferner wird $\varphi(x_2)$ zu $\varphi(\xi)$, und die Gleichung lautet:

$$\varphi(\xi) - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^{n+1}\varphi(x)}{dx^{n+1}} \frac{|x-\xi|^n}{n!} dx = \varphi(x_1) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d^i\varphi(x_1)}{dx_1^i} \frac{|x_1-\xi|^i}{i!}.$$

Man erkennt darin die Taylor'sche Entwickelung, und in dem bestimmten Integrale das Restglied dieser Entwickelung.

Die Umwandlung von Wärme in Arbeit in unseren heutigen Wärmekraftmaschinen.

Von **Eugen Meyer** in Göttingen.

Zerlegt man einen beliebigen umkehrbaren Kreisprocefs durch eine Schar von unendlich vielen unendlich nahen Adiabaten in Elementarkreisprocesse, so kann man jeden derselben als einen Carnot'schen Kreisprocefs ansehen, in dem die Wärmezu- und abfuhr je bei constanter Temperatur vor sich gehen. Der thermische Wirkungsgrad, d. h. das Verhältnis zwischen der in Arbeit umgesetzten und

der zugeführten Wärme ist bekanntlich nur von der Temperatur T_1 bei der Zufuhr und der Temperatur T_2 bei der Abfuhr abhängig und durch $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ gegeben. Hieraus läfst sich folgender Satz ableiten: Will man den Kreisprocefs einer Wärmekraftmaschine hinsichtlich des thermischen Wirkungsgrades möglichst günstig gestalten, so mufs man bestrebt sein, jedes einzelne Wärmeelement, das ihm zugeführt wird, bei der höchsten Temperatur, bei der dies überhaupt möglich ist, zuzuführen, und jedes Wärmeelement, das wieder abgeführt werden mufs, bei der niedrigsten Temperatur abzuführen, bei der dies möglich ist. Mit der Befolgung dieser Regel kann man aber nicht beliebig weit gehen, da die in unseren Maschinen ausführbaren Kreisprocesse in Grenzen eingeschlossen sind, die entweder Temperatur- oder Pressungs- oder Volumgrenzen sein können.

Der Kreisprocefs der Dampfmaschinen spielt sich in folgender Weise ab: Zuerst wird im Dampfkessel dem bei niedriger Temperatur eintretenden Wasser Wärme bei constantem Volumen zugeführt, bis die Siedetemperatur erreicht ist. Hierauf wird weiter Wärme zugeführt bei dem constanten im Dampfkessel herrschenden Druck und damit auch bei constanter Temperatur. Dabei verdampft das Wasser, tritt, ohne seinen Zustand zu ändern, in die Dampfmaschine über und dehnt sich dort nach Abschlufs der Dampfeinströmung adiabatisch aus, bis der Kolben in seiner äufsersten Stellung angekommen ist. Dann wird das Cylinderinnere mit dem Condensator verbunden. Es fallen Druck und Temperatur im Cylinder bei constantem Cylindervolumen, bis der Condensatordruck erreicht ist, und hierauf findet bei dem constanten im Condensator herrschenden Druck und damit wieder bei constanter Temperatur Wärmeentziehung bis zur vollständigen Verflüssigung des Dampfes statt. Um den Kreislauf zu einem geschlossenen zu machen, kann man annehmen, dafs das Condensationswasser mit der im Condensator erreichten Temperatur wieder in den Dampfkessel eintritt.

Zur Erzielung eines hohen thermischen Wirkungsgrades ergeben sich aus der obigen Regel die folgenden 3 Forderungen: 1) Die Temperatur und damit der Druck im Dampfkessel müssen möglichst hoch gemacht werden. Die Grenze ist hier als Druckgrenze gegeben, da schon bei 197° C. 15 Atm. Siededruck entstehen, so dafs mit Rücksicht auf die Festigkeit und Betriebssicherheit des Kessels diese Grenze nicht überschritten wird. 2) Die im Condensator herrschende Temperatur und damit der Condensatordruck müssen möglichst niedrig sein. Eine Temperaturgrenze ist hierbei durch die Temperatur und Menge des vorhandenen Kühlwassers, eine Druckgrenze aber durch die Beschaffenheit der den Condensator entlüftenden Luftpumpe gegeben. Man kommt mit dem Druck auf 0,06 kg/qcm und dadurch mit der Temperatur auf 36° C. herunter.

3) Die Temperatur am Ende der adiabatischen Expansion mufs möglichst niedrig, also das Endvolumen der Expansion im Verhältnis zum ursprünglichen Volumen des Dampfes, der Expansionsgrad, möglichst grofs sein. Hier ergiebt sich also eine Volumgrenze mit Rücksicht auf die Gröfse, Festigkeit, Billigkeit der Maschine und auf die Gleichmäfsigkeit ihres Ganges. Man geht in Eincylindermaschinen mit dem Expansionsgrade nicht über die Werte 8 bis 10 hinaus.

Rechnet man mit Hülfe der Formeln der mechanischen Wärmetheorie den thermischen Wirkungsgrad einer Eincylindermaschine bei den in der Praxis gegebenen Grenzen, so findet man $\eta =$ rund 0,20, während eingehende Versuche diesen Wert höchstens zu 0,13 ergeben, so dafs nur 65 % der auf Grund der Formeln erwarteten Arbeit wirklich geleistet werden. Der Unterschied rührt zum gröfsten Teile davon her, dafs der Wärmeaustausch des Dampfes mit der Wandung nicht berücksichtigt wurde. Denn der in den Cylinder einströmende Frischdampf trifft darin auf Wandungen, die vorher von kaltem Dampfe umspült waren, also selbst kalt sind. Ein grofser Teil des Frischdampfes schlägt sich infolgedessen nieder. Wird der Cylinder nach der Expansion wieder mit dem Condensator in Verbindung gebracht, so hat jetzt die Wandung und das an ihr haftende Niederschlagswasser eine höhere Temperatur als der unter Condensatordruck stehende Dampf. Die vorher an die Wandung übergegangene Wärme strömt somit in den Dampf zurück, indem das Niederschlagswasser wieder verdampft wird. Auf dem Umwege über die Wandung ist also diese Wärme durch die Maschine gegangen, ohne überhaupt Arbeit zu leisten. Der Wärmeaustausch kann verringert werden, indem man den Cylinder von aufsen mit Frischdampf heizt, und ferner insbesondere dadurch, dafs man den Dampf in zwei oder drei Cylindern nach einander expandiren läfst (Zwei- und Dreicylindermaschinen). Denn dann fallen die Unterschiede in den Temperaturen des eintretenden und des austretenden Dampfes in jedem einzelnen Cylinder viel geringer aus, und erfahrungsmäfsig wird dadurch die Condensation des eintretenden Dampfes wesentlich vermindert. Mit diesen Mehrcylindermaschinen ist noch der Vorteil verknüpft, dafs der Expansionsgrad vergröfsert werden kann (bei Dreicylindermaschinen ungefähr bis auf 25). Bei einer vorzüglichen Dreicylindermaschine fand sich so nach der Rechnung der thermische Wirkungsgrad $\eta = 0{,}246$, während der Versuch $\eta = 0{,}197$ ergab, so dafs 78,4 % der erwarteten Arbeit wirklich geleistet werden und nur noch 21,6 % durch den Wärmeaustausch und sonstige Unvollkommenheiten verloren gehen. Wendet man überhitzten Dampf an, statt wie bisher vorausgesetzt wurde, gesättigten, so wird der theoretische Wirkungsgrad nur wenig erhöht. Trotzdem ergiebt seine Anwendung bei Dampfmaschinen mit sonst grofsem Wärmeaustausch einen wesentlich günstigeren Wirkungsgrad, da sein Wärmeaustausch

mit der Wandung sehr viel geringer ist als derjenige des gesättigten Dampfes.

Bei der Gasmaschine, der Vertreterin der zweiten Hauptclasse der Wärmekraftmaschinen, wird die aus brennbarem Gas und Luft bestehende Ladung nach dem Ansaugen (nahezu) adiabatisch comprimirt und dann entzündet, wenn der Kolben in seiner innersten Stellung angelangt ist. Die Verbrennung und damit die Wärmezufuhr findet bei constantem Volumen statt. Sodann geht der Kolben unter (nahezu) adiabatischer Expansion der Verbrennungsgase nach aufsen, worauf die letzteren die nicht in Arbeit verwandelte Wärme ins Freie entführen. Dieses Arbeitspiel kann man sich zum Zwecke eines Überblickes mit Annäherung durch einen umkehrbaren Kreisprocefs, den ein ideales Gas durchmacht, ersetzt denken. Statt der Verbrennungswärme wird dabei die entsprechende Wärmemenge bei constantem Volumen von aufsen zugeführt, und die Wärmeentziehung findet bei constantem gröfsten Volumen statt. Aus der Gleichung für den thermischen Wirkungsgrad eines Elementarkreisprocesses $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ leiten sich hierbei mit Hülfe der Zustandsgleichung der Gase und des Poisson'schen Gesetzes für die Adiabate $pv^R =$ const. die Gleichungen $\eta = 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{R-1}{R}}$ und $\eta = 1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{R-1}$ ab, in denen R das Verhältnis der beiden specifischen Wärmen, p_1, p_2 und v_1, v_2 die zu den Temperaturen T_1 und T_2 zugehörigen Werte des Druckes und des Volumens bedeuten.

Um η möglichst grofs zu machen, muss also die Wärmezufuhr bei möglichst hohem Druck und kleinem Volumen, die Wärmeabfuhr bei möglichst niedrigem Druck und grofsem Volumen vor sich gehen. Die Grenzen, durch die man hierin bei der Gasmaschine eingeengt ist, sind weniger Temperatur- als vielmehr Druck- und Volumgrenzen. Das gröfste Volumen in der Gasmaschine, bei dem die gesamte Wärmeabfuhr vor sich gehend gedacht werden kann, ist gegeben durch das Volumen von Luft und Gas vor der Verdichtung, das kleinste Volumen ist dasjenige bei der Verbrennung. Der Wirkungsgrad wird nach obigem um so günstiger, je kleiner dieses Volumen gemacht, je weiter also die Verdichtung getrieben wird. Allein da bei der adiabatischen Verdichtung die Temperatur der explosiblen Ladung wächst, so würden schliefslich bei zunehmender Verdichtung während derselben Selbstzündungen eintreten. Das kleinste Volumen, d. h. die innere Volumgrenze, ist also durch die Rücksicht auf die Vermeidung von Selbstzündungen gegeben. Arbeitsverluste treten insbesondere auf infolge des Wärmedurchganges durch die Wandungen der Gasmaschine, die

der hohen Temperatur wegen von einem Kühlwassermantel umgeben sein müssen. Wie Versuchsergebnisse an Gasmotoren beweisen, gelingt es trotzdem, einen thermischen Wirkungsgrad $\eta = 0{,}32$ zu erreichen, wobei die Compression auf rund 8 Atm. getrieben wird.

In neuester Zeit hat der Ingenieur R. Diesel den thermischen Wirkungsgrad der Gaskraftmaschine noch dadurch zu erhöhen gewuſst, daſs er die innere Volumgrenze weggeschafft hat. In seinen Motor wird zunächst nur reine Luft angesaugt und auch für sich allein darin verdichtet. Das brennbare Gas wird erst dann eingespritzt, wenn die Verbrennung stattfinden soll. Jetzt kann, ohne zu frühe Selbstzündungen befürchten zu müssen, bis zu beliebiger Höhe verdichtet werden, und man ist schlieſslich nur durch die Druckgrenze, die infolge der Festigkeit der Maschinenteile gesetzt ist, beengt. Diese Druckgrenze liegt aber erst bei 35 Atm. Das brennbare Gas (aus technischen Gründen kann nicht Leuchtgas, sondern nur Petroleumdampf benutzt werden) wird dann nach beendeter Verdichtung, wenn schon der Kolben wieder nach auswärts geht, bei diesem höchsten in der Maschine gestatteten Drucke so langsam zugeführt, daſs der Druck während der Verbrennung nahezu constant bleibt. Die Zündung des Petroleumdampfes erfolgt sofort nach der Zuführung selbstthätig in der durch die Compression hoch erhitzten Luft. Die äuſsere Volumgrenze für die Wärmeabfuhr bleibt dieselbe wie bei der gewöhnlichen Gaskraftmaschine. Der thermische Wirkungsgrad erhöht sich aber der letzteren gegenüber infolge der Wärmezufuhr bei so hohen Pressungen bis auf $\eta = 0{,}39$.

Vorläufiger Bericht der „Tafelcommission".

Erstattet von **R. Mehmke** in Stuttgart.

Infolge einer Anregung des Herrn W. Voigt (Göttingen) ist auf der letzten Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Braunschweig eine Commission, bestehend aus dem jeweiligen Vorsitzenden der Vereinigung als Leiter der Commissionsberatungen, sowie den Herren W. Voigt, L. Kiepert (Hannover) und dem Berichterstatter beauftragt worden, die Neuherausgabe wichtiger, aber selten gewordener oder schwer zugänglicher mathematischer Tabellen in die Hand zu nehmen. Bei dem teils schriftlichen, teils mündlichen Meinungsaustausch, der zwischen den Mitgliedern der Commission stattgefunden hat, sind folgende übereinstimmende Ansichten zu Tage getreten. 1) Die Commission darf sich nicht darauf beschränken, schon vorhandene Tafeln neu herauszugeben, sondern muſs auch die Herstellung neuer Tafeln ins Auge fassen. Demnach ist 2) nicht nur festzustellen, welche Tafeln selten oder schwer zu-

gänglich oder aus irgend welchen anderen Gründen einer Neuherausgabe bedürftig sind, sondern es sind auch 3) diejenigen Tafeln zu bezeichnen, deren Neuberechnung besonders erwünscht ist, seien es nun rein theoretische Tafeln oder solche für Zwecke der Physik und der Technik. Weiter ist es offenbar 4) unerläfslich, eine Übersicht über die vorhandenen Tafeln zu beschaffen.

Schon anfangs der 70er Jahre hat die British Association for the Advancement of Science ein „Table Committee“ ernannt und mit ähnlichen Aufgaben betraut, nämlich 1) ein möglichst vollständiges Verzeichnis der vorhandenen mathematischen Tafeln herzustellen und 2) Tafeln, die für den Fortschritt der mathematischen Wissenschaften notwendig sind, neu zu drucken oder zu berechnen. Dieses Table Committee kann auf eine sehr erfolgreiche Thätigkeit zurückblicken. Von seinem Mitgliede J. W. L. Glaisher ist 1873 ein sehr eingehender Bericht über mathematische Hülfstafeln geliefert worden, worin die Tafeln für nicht-logarithmische Rechnung, nämlich Producten- und Factorentafeln, Tafeln der Viertelquadrate, Tafeln der Quadrate, Cuben und höheren Potenzen sowie der Reciproken, dann Logarithmen und Antilogarithmen, Additions- und Subtractionslogarithmen, Kreisfunctionen und ihre Logarithmen behandelt sind. 1875 hat A. Cayley einen Bericht über zahlentheoretische Tabellen erstattet, welcher Tafeln über folgende Gegenstände umfafst: Divisoren und Primzahlen, primitive Wurzeln und Indices (Jacobi's Canon arithmeticus und ähnliche), quadratische Reste, Pell'sche Gleichung, Zerlegung von Zahlen in Quadrate, Cuben und Biquadrate, binäre, ternäre u. s. w. quadratische und höhere Formen, algebraische Zahlen. Es werden darin nicht blofs die vorhandenen, sondern auch viele wünschenswerte Tafeln angegeben.

Das Table Committee hat auch eine Reihe von Tafeln neu berechnet. Davon sind im Druck erschienen:

1) 1879, 1880, 1883 Tafeln der kleinsten Divisoren aller (nicht durch 2, 3 oder 5 teilbaren) Zahlen von 3 Millionen bis 6 Millionen; durch dieselben ist die Lücke ausgefüllt worden, die zwischen den Divisoren- oder Factorentafeln von Burckhardt und Dase bestand. Im Anschlufs wurden Zählungen der Primzahlen vorgenommen und die verschiedenen Formeln (von Legendre, Gaufs, Riemann u. s. w.) zur genäherten Bestimmung der Häufigkeit der Primzahlen geprüft.

2) 1893 eine Fortsetzung der 1817 erschienenen Tafel von Degen zur Pell'schen Gleichung. Sie enthält die kleinsten ganzzahligen Lösungen der Gleichung $y^2 = ax^2 \pm 1$ für alle Werte von $a = 1000$ bis 1500.

3) 1879 eine Tafel der Kugelfunctionen P^0, P^1, ... P^7 von $x = 0$ bis 1 (in Zwischenräumen von 0,01) mit allen Decimalen (es sind endliche Decimalbrüche).

4) 1889 eine Tafel der Bessel'schen Functionen $I_n(x)$, welche der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} - (n^2 + x^2) u = 0$$

genügen, für alle ganzzahligen Werte von $n = 0$ bis 11 und alle Werte von $x = 0$ bis 60 in Zwischenräumen von 0,2, und zwar im allgemeinen mit 12 geltenden Ziffern.

5) 1893 eine Tafel der Bessel'schen Function $I_1(x)$ und

6) 1896 eine solche der Bessel'schen Function $I_0(x)$, beide für die Werte von $x = 0$ bis 5,1 in Zwischenräumen von 0,001 mit 9 Decimalen und den ersten Differenzen in einer besonderen Spalte. Endlich

7) 1896 Hülfstafeln gewisser Functionen $\chi_1, \chi_3, \chi_5, \chi_7$, die bei der in Angriff genommenen Berechnung der (von Statistikern und Biologen viel benutzten) Functionen

$$G(r, \nu) = \int_0^\pi \sin^r \Theta e^{\nu\Theta} d\Theta$$

gebraucht werden.

Wie J. W. L. Glaisher in dem Report von 1873 mitgeteilt hat, wurde im September 1872 von dem Table Committee beschlossen, die systematische Tabulirung der Jacobi'schen Thetafunctionen in Angriff zu nehmen. Die Tafeln sollten die Functionen ϑx, $\vartheta_1 x$, $\vartheta_2 x$, $\vartheta_3 x$ und ihre Logarithmen auf 8 Decimalen geben und zwar für $x = 1^0, 2^0, \ldots 90^0$ und $k = \sin 1^0, \sin 2^0, \ldots \sin 90^0$. Auf jeder Seite sollte der Modul k constant sein, und am Kopfe sollten gewisse von x unabhängige Functionen des Moduls stehen, z. B. K, K', q u. s. w. Die Arbeit wurde anfangs October 1872 begonnen, acht Rechner waren unter der Leitung von James Glaisher und J. W. L. Glaisher thätig. Im Herbst 1873 waren drei Viertel des Werkes vollendet, und man hoffte, daſs die Tafeln bis Februar 1874 fertig werden würden. Es sollte dann eine aus verschiedenen Teilen bestehende Einleitung dazu geschrieben werden, worin A. Cayley über die Anwendung der elliptischen Functionen im allgemeinen sich verbreiten wollte, H. J. S. Smith über ihre Anwendung in der Zahlentheorie, Sir W. Thomson und Prof. Stokes über ihren Nutzen in der Physik, während J. W. L. Glaisher über die bei der Berechnung der Tafeln angewendeten Methoden genauen Aufschluſs zu geben gedachte. Leider ist dieses groſsartige Werk nicht zur Veröffentlichung gelangt. Unter den vom Table Committee seit langem geplanten Arbeiten sind noch zu erwähnen eine Sammlung mathematischer Constanten und ein Verzeichnis der in den gangbaren mathematischen Tafeln gefundenen Druckfehler.

Weil einerseits die oben genannten Berichte von Glaisher und Cayley nur bis 1873 bezw. 1875 gehen, inzwischen aber viel

neuer Stoff hinzugekommen ist und es andererseits ähnliche Arbeiten in deutscher Sprache nicht giebt, so bringt die Tafel-Commission die Abfassung eines bis zur Gegenwart reichenden Berichts über numerische Tafeln, welcher ganz in den Rahmen der von der deutschen Mathematiker-Vereinigung schon veröffentlichten Berichte passen würde, in Anregung.

Die Commission hat auch schon die Herstellung gewisser neuer Tafeln erwogen. Es ist allgemein anerkannt, dafs ausreichende Tafeln der elliptischen Integrale ein dringendes Bedürfnis sind. Ein 5-stelliger Auszug aus den Tafeln von Legendre, bei dem das Argument von Grad zu Grad fortschreitet und der Winkel ε, dessen sin gleich dem Modul ist, von 5 zu 5 Grad, befindet sich in dem dieses Jahr erschienenen Précis élémentaire des Fonctions Elliptiques von Lévy. Die Interpolation ist bei diesen Tafeln nicht durchweg ohne Benützung der zweiten Differenzen möglich, sodafs vielleicht eine Erweiterung derart angezeigt wäre, dafs man, wie Herr Sommerfeld vorgeschlagen hat, das Argument von $1/2^0$ zu $1/2^0$, den Winkel ε von Grad zu Grad fortschreiten liefse. Aber wenn solche Tafeln auch für den gewöhnlichen Gebrauch genügten, so wäre es doch für manche Zwecke erwünscht, Tafeln mit mehr als 5 Decimalen zu haben. Ein blofser Abdruck der Tafeln von Legendre, an den man denken könnte, hat manches gegen sich. Dagegen hat Herr Kiepert einen sehr beachtenswerten Plan zu neuen Tafeln vorgelegt, die eine Reihe von Vorteilen bieten würden, hauptsächlich den, statt eines doppelten Einganges blofs einen einfachen zu besitzen. Herr Kiepert beabsichtigt, die nötigen Versuche und vorbereitenden Rechnungen auszuführen, um der Deutschen Mathematiker-Vereinigung bei ihrer nächsten Versammlung einen mehr ins einzelne gehenden Entwurf unterbreiten zu können. Weil solche Tafeln von internationaler Bedeutung sein würden, so erscheint es nicht mehr als billig, dafs auch die nicht-deutschen Mathematiker sich an den Kosten der Berechnung und des Druckes beteiligen, weshalb die Commission beantragt, den genau ausgearbeiteten Plan des Herrn Kiepert im Jahre 1900 dem 2. internationalen Mathematiker-Congrefs in Paris mit den entsprechenden Anträgen vorzulegen.

Über Aufgabe und Methode des mathematischen Unterrichts an den Universitäten.

Von F. Klein in Göttingen.

Meine Herren! Bei unserer vorjährigen Versammlung in Braunschweig hat mein verehrter Freund, Herr Pringsheim, einen Vortrag „Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht“ gehalten, der den

arithmetischen Standpunkt des Redners mit grofser Schärfe darlegte und so, wie er jetzt gedruckt vorliegt*), einen unmittelbaren Angriff gegen die von mir vertretenen, auf Geltendmachung der geometrischen Anschauung gerichteten Tendenzen vorstellt. Es ist damals nicht viel Zeit zur Debatte gewesen; wir haben nur gerade die Gegensätzlichkeit unserer Auffassungen constatiren können; ich folge aber gern der Anregung unseres Vorstandes, bei der diesmaligen Versammlung ausführlicher auf den Gegenstand zurückzukommen, und dieses um so mehr, als derselbe in einem gewissen Zusammenhange mit den Betrachtungen steht, welche ich in meinem allgemeinen Vortrage über „Universität und Technische Hochschule“ am vorigen Montag entwickelt habe.**)

Ich darf vor allen Dingen hier auf einen anderen Vortrag zurückverweisen, ich meine den Vortrag „Über Arithmetisirung der Mathematik“, den ich vor drei Jahren in den Göttinger Nachrichten veröffentlichte. Mein Zweck war damals zunächst ein ausschliefslich erkenntnistheoretischer: ich hatte mir die Aufgabe gestellt, die moderne Entwickelung, welche unsere Wissenschaft nach Seiten der logischen Grundlegung genommen hat, und die ihren populären Ausdruck in der vorwiegenden arithmetischen Darstellung findet, ins Gleichgewicht zu setzen zu der Bedeutung, welche die Raumanschauung von je in der Entwickelungsgeschichte der Wissenschaft besessen hat und immerzu besitzt. Auf didaktische Fragen bin ich dabei nur zum Schlufs und ganz beiläufig eingegangen. Es heifst dort:

„Das soll mich nicht hindern auszusprechen, dafs jedenfalls zwei Kategorieen mathematischer Vorlesungen notwendig von der Anschauung ihren Ausgangspunkt nehmen sollten. Das sind erstlich die Elementarvorlesungen, welche den Anfänger überhaupt in die höhere Mathematik einleiten — wird doch der Lernende naturgemäfs im kleinen immer denselben Entwickelungsgang durchlaufen, den die Wissenschaft im grofsen gegangen ist. Das sind ferner diejenigen Vorlesungen, deren Zuhörer von vornherein darauf angewiesen sind, sehr wesentlich mit der Anschauung zu arbeiten, also die Vorlesungen für Naturforscher und Ingenieure.“

Eben diese Sätze scheinen nun ganz besonders das Interesse der Leser gefunden zu haben: gegen sie richtet sich Herr Pringsheim, und an sie knüpft andererseits der Beifall an, welchen meine Darlegungen damals in den Reihen der Ingenieure gefunden haben.

Darf ich zunächst den letzteren antworten, so wird es ja kaum nötig sein, noch besonders vorauszuschicken, wie sehr mir an einer

---

*) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. VI, 1 (1897), p. 73—83.

**) Vergl. vorstehend p. 39—50.

Verständigung mit Ihnen, meine Herren, gelegen ist. Ich habe aber den Eindruck gehabt, dafs mein Vortrag über die Arithmetisirung von Ihrer Seite zum Teil nur einseitig aufgefafst worden ist. Indem ich für das Recht der Anschauung im Gebiete meiner Wissenschaft kämpfe, will ich die Bedeutung der logischen Entwickelung keineswegs hintansetzen. Nur da findet die Mathematik nach der Auffassung, die ich vertrete, ihre volle Geltung, wo beide Seiten neben einander zur Entfaltung kommen. Wir haben uns gestern hier ausführlich über das Lebenswerk von Gaufs unterhalten, so dafs mir gestattet sei, hierauf zu exemplificiren. Sie haben bei Gaufs die weitestgehenden theoretischen Leistungen auf den abstractesten Gebieten der Mathematik, verbunden mit allseitiger und durchgreifender Bethätigung auf allen Gebieten der Anwendung. Dieses Gaufs'sche Beispiel sollte unser Vorbild sein, wobei selbstverständlich unter heutigen Verhältnissen die Gaufs'sche Vielseitigkeit nicht durch den einzelnen Mathematiker, sondern nur durch die Vereinigung der Fachgenossen angestrebt werden kann*).

Doch ich habe heute vor allen Dingen gegen Herrn Pringsheim Stellung zu nehmen. Herr Pringsheim verlangt, dafs aller mathematische Universitätsunterricht mit einer scharfen Entwickelung des Begriffes der Zahl und speciell der Irrationalzahl beginnen müsse, wobei er den Zahlbegriff so abstract wie möglich fafst, indem er sich an die Heine'sche Definition anschliefst, derzufolge die Zahlen blofse Zeichen sind, „denen eine eindeutig bestimmte Succession zukommt, und mit denen nach bestimmten Vorschriften gerechnet werden kann". Die geometrische Anschauung soll erst herangezogen werden, nachdem die arithmetische Grundlage bereits gewonnen ist; nur so sei es logisch und auch nur so pädagogisch wirksam, indem die Erfahrung zeige, dafs die Studirenden hinterher in höheren Semestern keine rechte Lust mehr besitzen, sich in solche principielle Dinge einzuarbeiten. Der umgekehrte Weg, der Beginn von der geometrischen Anschauung her, sei antiquirt und meine Bezugnahme auf das phylogenetische Grundgesetz in diesem Falle unangebracht; sei man doch beispielsweise längst von der früher herrschenden Anschauung zurückgekommen, dafs das einzelne Individuum, um zu gedeihen, zunächst sämtliche Kinderkrankheiten durchmachen müsse!

Dies sind natürlich nur einige Sätze aus den Entwickelungen von Herrn Pringsheim; ich will Sie, meine Herren, vor allen Dingen bitten, von Herrn Pringsheim's eigener Darstellung ausführlich Kenntnis

---

*) Ich habe mich in demselben Sinne bereits in den kurzen Worten geäufsert, die ich 1893 bei Eröffnung des Chicagoer mathematischen Congresses sprach. Vergl. Mathematical Papers, read at the international mathematical Congress (New-York, Macmillan, 1896), sowie auch verschiedene Bemerkungen meines im Zusammenhang mit dem Congresse gehaltenen Evanston Colloquium (New-York, Macmillan, 1894).

zu nehmen, damit Sie seine in sich geschlossene Auffassung bei etwaiger Durchlesung meiner eigenen Betrachtungen klar vor Augen haben. Ich selbst lese diese Darstellung immer wieder mit besonderem Vergnügen. Was Herr Pringsheim schreibt, ist jedenfalls amüsant und pointirt, auch wo es paradox ist, und sein Humor mildert die Schärfe der Gegensätze, sodafs dieselben nicht persönlich empfunden werden, auch wo sie sachlich äufserst ernst gemeint sind. Ich möchte versuchen, in nicht minder verbindlicher Weise zu antworten. So will ich damit beginnen, Herrn Pringsheim zu danken, dafs er diese ganze Debatte über die Pädagogik des mathematischen Universitätsunterrichts angeregt hat. In der That erschien mir schon seit lange notwendig, dafs wir in unserer Vereinigung bei Gelegenheit in lebhaften Gedankenaustausch über diesen wichtigen Gegenstand eintreten. An den Gymnasien, an den Technischen Hochschulen haben die entsprechenden Erörterungen in den letzten Jahren einen breiten Raum eingenommen; die Universitäten aber waren bislang stumm geblieben, als wenn bei ihnen diese Probleme überhaupt nicht in Betracht kämen oder längst in befriedigender Weise erledigt wären. Ich empfand, als Herr Pringsheim geredet hatte, von vorneherein etwas wie persönliche Genugthuung. Denn ich habe mich von je für die pädagogischen Fragen des mathematischen Universitätsunterrichtes besonders interessirt, und ich habe betreffs derselben eine ganze Reihe von Dingen zu sagen, die mir lebhaft am Herzen liegen. Es kommt allerdings noch hinzu — wenn es nicht unbescheiden ist, dies zu sagen —, dafs ich die Pädagogik immer als meine starke Position angesehen habe, als die am wenigsten angreifbare Seite meiner eigenen Thätigkeit. Gewisse Erfolge, die ich in pädagogischer Hinsicht errungen habe, liegen äufserlich greifbar zur Hand, und es stört mich wenig, wenn jemand hinterher sagen wollte: die Erfolge sind da, aber sie sind durch verkehrte Methode errungen. Ich bitte aber bei dieser Sachlage, meine Erwiderung etwas allgemeiner fassen zu dürfen, als streng genommen nötig wäre. Ich möchte hier für den Universitätsunterricht zunächst einige Forderungen erheben, die mit der heutigen Debatte eigentlich nur insofern etwas zu thun haben, als ich annehme, dafs dieselben bei Herrn Pringsheim auf Widerspruch stofsen dürften. Erst dann wende ich mich in einem zweiten Teile der pädagogischen Seite, und in einem dritten Teile der wissenschaftlichen Seite der von Herrn Pringsheim selbst erhobenen Fragen zu.

I. Allgemeine Aufgaben des mathematischen Universitätsunterrichts.

Herr Pringsheim bemerkt gleich zu Anfang seines Vortrags, dafs er es nicht mit den Vorlesungen der Technischen Hochschulen

zu thun habe. Welche Bedeutung man immer dieser Äufserung geben mag, das eine scheint sicher, dafs ihm die eigentümlichen Schwierigkeiten, mit denen der mathematische Unterricht an den Technischen Hochschulen zu rechnen hat, gleichgültig geblieben sind, dafs er meint, als Universitätsprofessor denselben entrückt zu sein. Diese Schwierigkeiten beruhen bekanntlich darauf, dafs es sich bei den Technischen Hochschulen darum handelt, einen zahlreichen Zuhörerkreis für das mathematische Denken zu gewinnen, dessen Interessen zunächst nach ganz anderer Richtung gehen, und bei dem das deductive Bedürfnis von Hause aus nur wenig entwickelt ist. Warum und in welchem Sinne fallen diese Schwierigkeiten bei den Universitäten fort? Die unmittelbare Antwort ist, dafs die mathematischen Universitätsvorlesungen in der Hauptsache nur mit den Mathematikern von Fach zu thun haben, denen gegenüber einzelne Physiker oder Astronomen, die an den Vorlesungen teilnehmen mögen, eine kleine Minderzahl vorstellen. Dafs die Verhältnisse, was den Vorlesungsbesuch angeht, an den meisten Universitäten thatsächlich so liegen, kann nicht geleugnet werden; die Frage ist aber, ob dies eine gesunde Entwickelung der Dinge ist. Und hier stehe ich nicht an, zu behaupten, dafs es sich um eine falsche Entwickelung der Dinge handelt, die wenigstens zum Teil eine Folge der einseitig abstracten Richtung innerhalb unserer Wissenschaft ist, zu deren Wortführer sich Herr Pringsheim macht. Ich sage, dafs wir Mathematiker dafür verantwortlich sind, dafs so viele Studirende (nicht nur der Physik und Astronomie), die in ihrem späteren Leben thatsächlich höhere mathematische Kenntnisse gebrauchen, diese auf der Universität nicht erwerben. Wir haben, nach meiner Ansicht, leider einen ganz bestimmten Anteil z. B. an dem Niedergange der allgemeinen mathematischen Bildung auf dem Gebiete der Mechanik, wie er in zahlreichen Publicationen der letzten 20 Jahre in bedauerlicher Weise hervortritt. Eine Besserung herbeizuführen wird aber nur in der Weise gelingen, dafs wir gerade diejenigen pädagogischen Probleme, welche Herr Pringsheim bei Seite läfst, in ernsteste Erwägung ziehen. Ich möchte meine Collegen bitten, den Versuchen, welche in dieser Hinsicht von einigen Seiten gemacht werden, doch ja wohlwollende Aufmerksamkeit zu schenken und dieselben nicht, wie wohl geschieht, vom Standpunkte der „reinen Wissenschaft" vornehm abzuweisen. Ich will hier keine deutschen Publicationen nennen, die allbekannt sind, wohl aber auf zwei ausländische Bücher verweisen, die dem in Frage kommenden Bedürfnisse in besonderer Weise gerecht zu werden suchen. Das eine ist die Differentialrechnung von H. A. Lorentz in Leiden*), das andere, welches

*) Leerbook der Differentiaal- en Integraalrekening, Leiden 1882.

ich vorlege, der Calculus for engineers von Perry in London.*) Letzteres Werk ist allerdings nicht unmittelbar für unsere Hochschulstudien in Betracht kommend, weil es für Zuhörer (insbesondere der elektrotechnischen Seite) geschrieben ist, die wenig mehr als Volksschulbildung besitzen: um so gröfser aber erscheint die Kunst, mit welcher der Verfasser, vom ganz Concreten beginnend, seine Schüler allmählich zu den mathematischen Ideenbildungen und zur Beherrschung des mathematischen Apparates heranführt. —

Aber gesetzt, wir nehmen die Dinge, wie sie zur Zeit sind, wir setzen voraus, dafs die ausschliefsliche Aufgabe der mathematischen Universitätsvorlesungen sei, soweit nicht die selbständige wissenschaftliche Ausbildung einzelner hervorragender Zuhörer in Betracht kommt, für die gleichförmige Ausbildung des Gros der Lehramtscandidaten Fürsorge zu tragen. Dann sage ich trotzdem, wie ich es nun schon oft that, dafs es mit dem abstracten mathematischen Universitätsunterricht nicht gethan ist, dafs wir unseren Zuhörern daneben Gelegenheit geben müssen, sehr viel mehr als es z. Z. im Durchschnitte geschieht, von den Anwendungen der Mathematik Kenntnis zu nehmen. Immer wieder werde ich darauf verweisen, dafs unsere Studirenden bestimmt sind, nicht nur für die humanistischen Gymnasien, sondern ebensosehr für die Realanstalten, die technischen Schulen etc. die Lehrer abzugeben, und dafs man bei Bemessung der für unsere Zuhörer zu treffenden Einrichtungen nicht nur den gegenwärtigen Stand unserer Schulen, sondern ebensowohl die Entwickelung, welche dieselben in absehbarer Zeit nehmen dürften, in Betracht ziehen mufs. Darstellende Geometrie, technische Mechanik, Geodäsie bis hin zu den Anfängen der höheren Theorien, Ausgleichungsrechnung, überhaupt Wahrscheinlichkeitsrechnung, sind Gebiete, welche der Mehrzahl unserer Lehramtscandidaten sehr wohl anstehen würden, und zwar nicht nur in abstracter Fassung, sondern mit ausreichenden Übungen im Beobachten, Messen, Zeichnen und Ziffernrechnen. Dem Einwande aber, dafs für solche Studien neben der unabweisbaren abstracten Grundlegung keine Zeit sei, begegne ich durch Forderung zweckmäfsiger Examensbestimmungen. Meines Erachtens sollte man, was die Lehramtscandidaten angeht, das Studium der mathematischen und der biologischen Fächer im Interesse beider Disciplinen viel mehr von einander trennen, als seither der Fall ist, und dafür die allseitigere Ausbildung im eigenen Fache, welche der Candidat erwirbt, durch geeignete Bemessung der Lehrbefähigung zum Ausdrucke bringen. Ich würde diesem Gedanken, so sehr er hierher gehört, doch kaum im Augenblicke Ausdruck geben, wenn ich nicht einige Hoffnung hätte, dafs sich derselbe

*) Second edition, 1897, Edward Arnold.

verwirklichen läfst.*) — Doch es ist Zeit, dafs ich diesen Teil meiner Betrachtungen, so aufserordentlich viel da noch zu sagen sein mag, abbreche. —

II. Pädagogische Erörterungen.

Wenden wir uns jetzt zur praktisch pädagogischen Seite. Herr Pringsheim hat uns geschildert, wie er seine Elementarvorlesungen einrichtet, und welche Erfolge er damit zu erreichen glaubt. Ich bedaure, dafs ich nicht in gleich präciser Weise antworten kann. Ich habe allerdings in den letzten Jahren mich wieder den elementaren Vorlesungen in besonderer Weise gewidmet, aber es ist wohl gerade meine Eigenart, dafs ich dabei zu keinem festen System gekommen bin, sondern immer wieder neu von neuer Seite einsetze. Am liebsten lege ich Ihnen als Specimen meiner Tendenzen die bisher erschienenen zwei Hefte der Theorie des Kreisels von Sommerfeld und mir vor**) (wobei ich von vorneherein nachdrücklich hervorheben mufs, dafs die Vorlesung von mir ursprünglich gar nicht in dieser ausführlichen Weise gehalten wurde, vielmehr ein grofser Teil der, wie ich hoffe, interessanten Ausführungen von Herrn Sommerfeld hinzugefügt wurde). Da haben Sie alles andere, nur keinen systematischen Gedankengang. Vom concreten Experimente beginnend hebt sich die Betrachtung zwischendurch sehr bald zu allgemeineren Ansätzen, die aber nur gestreift werden; so werden z. B. gleich im ersten Hefte bei Gelegenheit die allgemeinen Lagrange'schen Gleichungen benutzt, die erst im dritten Hefte (und dann, wie ich hoffe, in origineller Form) begründet werden sollen. Es folgen anschauungsmäfsige Discussionen der Kreiselbewegung, eine Kritik der populären Erklärungen etc., endlich eine Einleitung in die Theorie der elliptischen Functionen bis hin zur numerischen Berechnung. Dieses Verfahren bei Behandlung irgendwelchen Lehrstoffes ist ja nicht neu; es ist in den Kreisen der praktischen Lehrer gerade in den letzten Jahren oft und unter verschiedenen Gesichtspunkten besprochen worden; ich bin, nach der dort herrschenden Ausdrucksweise, was das Kreiselbuch angeht, ein „Methodiker". Ganz dasselbe meint man, wenn man in Universitätskreisen gelegentlich sagt, es handle sich gerade um den Mangel jeder Methode. Das Wort ist ja gleichgültig. Um zu resumiren: ich strebe in meinen Elementarvorlesungen vor allem dahin, meinen Zuhörern Interesse und Verständnis für die Fragestellungen und den Sinn und Zweck der mathematischen Behandlung beizubringen. Die

*) In der That enthält die inzwischen veröffentlichte neue preufsische Prüfungsordnung für die Lehramtscandidaten, welche vom 1. April 1899 ab in Geltung tritt, eine genau im Sinne der vorstehenden Äufserungen definirte besondere Lehrbefähigung für Angewandte Mathematik.

**) Teubner 1897, 1898.

fernere Durchbildung verschiebe ich dann mehr oder minder in das für höhere Semester bestimmte Seminar, wie ich es in den letzten Jahren mit Coll. Hilbert zusammen gehalten habe. In diesen Seminarübungen (die wir übrigens durchaus als Colloquium gestalten) verbreite ich mich dann gern über die Grundlegung aller Mathematik, insbesondere auch über die Fragen, welche Herr Pringsheim berührt. Es ist also nicht etwa so, dafs ich die letzteren ausschliefse. Zum Belege will ich doch anführen, dafs Coll. Hilbert und ich für das kommende Jahr für unsere Seminarübungen die reellen Functionen reeller Variablen gewählt haben, der Name Hilbert mag Ihnen dabei dafür gut stehen, dafs das logische Element nicht zu kurz kommen wird.

Und der Erfolg meiner elementaren Vorlesungen? Ich will hier kein Aufhebens davon machen, dafs sich bei der Mehrzahl der Zuhörer sehr bald ein gewisser Enthusiasmus einstellt. Enthusiasmus ist jedenfalls nicht der Zweck der Sache, sondern nur ein Mittel zum Zweck, welches den letzteren leider nicht immer erreicht. Neben der Mehrzahl der enthusiastischen Zuhörer giebt es dann immer eine Minderzahl solcher, welche mit meinen Vorträgen nicht ohne weiteres zufrieden sind, die darum doch regelmäfsig kommen, aber hier und dort kritisiren und Querfragen stellen. Diese sind mir im Herzen die allerliebsten. Denn ich erreiche bei ihnen, was ich als das eigentliche Ziel alles Unterrichts betrachte: dafs sie selbständig nachdenken, dafs sie gewissermafsen klüger werden wie ihr Lehrer. Jedenfalls unterscheide ich mich also auch in der Tendenz meines Unterrichtes so sehr als möglich von Herrn Pringsheim, der seinen Zuhörern von Anfang an gewisse ausgereifte, dem heutigen Stande der Wissenschaft adäquate Formulirungen einprägen will. —

Alles dieses soll selbstverständlich hier nur des Gegensatzes wegen gesagt sein, nicht weil ich es als Norm für andere aufstellen wollte. Soll ich mich in allgemeinem Sinne über Pädagogik äufsern, so will ich folgende Betrachtung vorausschicken: Man kann das pädagogische Problem mathematisch formuliren, indem man die individuellen Qualitäten des Lehrers und seiner n Schüler als ebensoviele Unbekannte einführt, und nun verlangt, eine Function von $(1+n)$ Variablen:

$$F(x_0, x_1, \ldots x_n)$$

unter gegebenen Nebenbedingungen zu einem Maximum zu machen. Liefse sich dieses Problem eines Tages entsprechend den bis dahin realisirten Fortschritten der psychologischen Wissenschaft direct mathematisch behandeln, so wäre die (praktische) Pädagogik von da ab eine Wissenschaft, — so lange das aber nicht der Fall ist, mufs sie als Kunst gelten. Man kann nur einige allgemeine Regeln, man kann keine speciellen Verfahrungsweisen für dieselbe angeben. Und dabei ist es wie in allen derartigen praktischen Dingen: Je

grösser die Zahl der Fälle ist, die in Betracht kommen, um so stricter wird man an den allgemeinen Regeln festhalten müssen, während in dem Masse, als die Fälle minder zahlreich werden, der individuellen Freiheit Spielraum gewährt werden kann.

Nehmen Sie zunächst die Unterstufe, die Volksschule. Hier ist vernünftigerweise fast alles Vorschrift, aber trotzdem eine sehr bedeutende Leistung vorhanden. Ich empfehle meinen Collegen von der Universität, die meistens einseitig für ungebundene Freiheit im Unterrichte eintreten, doch ja einmal die Fortschritte zu studiren, welche man im Laufe der letzten Decennien durch Ausbildung bestimmter Unterrichtsmethoden z. B. beim Lesenlernen realisirt hat.

Auf den Gymnasien und den mit ihnen auf gleicher Stufe stehenden Anstalten kommt das individuelle Moment bereits zu ausgiebigerer Geltung; ich brauche nur an die Streitigkeiten zu erinnern, welche bei der Beratung der neuen Lehrpläne hervorgetreten sind. Trotzdem hat sich im grossen und ganzen ein mittleres Verfahren beim mathematischen Unterrichte herausgebildet. Man beginnt die Geometrie (um mich auf diese zu beschränken) auf den unteren Classen mit praktischen, insbesondere constructiven Aufgaben, um erst allmählich den Sinn für Theorem und Beweis heranwachsen zu lassen. Auf der Oberstufe soll dann der letztere voll zur Geltung kommen. Ich möchte Ihnen des Gegensatzes halber ein modernes italienisches Lehrbuch vorlegen, die Elementargeometrie von Veronese.*) Veronese stellt eine bestimmte Definition der geraden Linie an die Spitze und beweist dann aus dem Wortlaute dieser Definition, indem er folgende Figur an die Seite stellt:

Theorem I: Die gerade Linie hat keinen Knoten.

Es scheint mir ganz undenkbar, dass ein deutscher Gymnasiallehrer eine solche Einführung in die Geometrie heutzutage sollte gutheissen können. Veronese aber, als echter Systematiker, ist sich seiner Sache gewiss: er betont in seiner Vorrede, dass nur so gemäss den Grundsätzen der Wissenschaft unterrichtet werden dürfe.

Bleiben die Hochschulen und insbesondere die Universitäten, von denen hier allein die Rede sein soll. Wir Universitätsprofessoren verfügen über ein grosses Mass individueller Freiheit und sind zweifellos darin einig, in diesem Umstande einen besonderen Vorzug, ja den eigentlichen Wert unserer Stellung zu erblicken. Aber Freiheit ist nicht Willkür, und ich möchte meinen Collegen recht sehr an's Herz legen, zu bedenken, dass wir uns dieses Gut nur dann dauernd bewahren werden, wenn wir den Anforderungen, welche aus der Natur der Dinge erwachsen, freiwillig Rechnung tragen. Innerhalb dieser Grenzen mag dann sich die Individualität zu freier Geltung bringen. Das ist mein allgemeiner Grundsatz, an

*) Elementi di Geometria. 1897. Verona-Padova. Fratelli Drucker.

dem ich es am liebsten hier bewenden liefse. Immer will ich darauf aufmerksam machen, dafs die langsam fortschreitende allgemeine Entwickelung des Universitätsunterrichts sehr viel mehr in meiner, als in Herrn Pringsheim's Richtung liegen dürfte. Welcher Student beginnt heute noch mit dem Collegium logicum, das früher unerläfslich schien? Wir sind darum keine Verächter der Philosophie geworden, im Gegenteil, aber wir setzen sie an das Ende der Studienzeit.

An der Hand dieser Überlegungen ergiebt sich nun mein Urteil über die Berechtigung und den pädagogischen Wert der Pringsheimschen Methode von selbst. Ich bin sehr bereit, namens der akademischen Freiheit Herrn Pringsheim als ein interessantes Specimen zu toleriren. Das aber ist auch das äufserste Mafs meiner Concessionen. Sollte versucht werden, die Pringsheim'schen Grundsätze als allgemeine oder gar für jeden einzelnen verbindliche Norm aufzurichten, so müfste ich auf das lebhafteste protestiren. An die Unterrichtserfolge des Herrn Pringsheim in dem von ihm behaupteten Sinne glaube ich nicht. Es ist mir ja kein Zweifel, dafs die Studenten ihn gern hören, weil er interessant redet und überaus klar vorträgt; ich zweifle auch nicht, dafs sich die Pringsheim'schen Definitionen gedächtnismäfsig einprägen; ich kann aber nicht zugeben, dafs sie dieselben ohne lang fortgesetztes nachfolgendes Nachdenken in ihr inneres Bewufstsein aufnehmen und fortan wirklich mit denselben operiren. Sehr bedenklich ist mir in dieser Hinsicht, was Herr Pringsheim über die Gleichgültigkeit der höheren Semester gegen grundsätzliche Überlegungen überhaupt sagt. Charakteristisch für den Standpunkt von Herrn Pringsheim erscheinen mir auch seine beiläufigen Äufserungen über Astronomie. Die blofse Mitteilung, dafs sich die Erde gemäfs den Copernicanischen Vorstellungen um die Sonne bewegt, schafft doch noch keine astronomische Einsicht. Meine Methode würde sein, den Schüler vor allen Dingen durch Beobachtungen mit den Haupterscheinungen des gestirnten Himmels vertraut zu machen und ihm dann erst zu erläutern, wie sich diese nach Copernicus' Ansatz unter ein einfaches Gesamtbild einordnen. —

III. Zur wissenschaftlichen Kritik des Pringsheim'schen Standpunktes.

Ich habe seither die Pringsheim'schen Vorschläge rein unter praktischen Gesichtspunkten betrachtet. Wie aber stellen sich dieselben für die theoretische Betrachtung? Ich glaube, dafs da wirkliche Schwierigkeiten vorliegen, die sich nicht leicht beseitigen lassen möchten.

Vorab habe ich eines Unterschiedes in der Grundauffassung zu gedenken, der mich von einer grofsen Zahl hervorragender Fach-

genossen abtrennt. In meinem Vortrage über die Arithmetisirung habe ich die mathematische Wissenschaft mit einem Baume verglichen, welcher sowohl nach oben seine Krone immer mehr entfaltet, als nach unten (nach Seiten der Principien) seine Wurzeln immer mehr vortreibt. Dem steht die andere Auffassung entgegen, welche offenbar auch die Auffassung des Herrn Pringsheim ist, dafs sich die Mathematik von einem bestimmten Anfangspunkte aus, der durch die zweckmäfsig zu wählenden Axiome bezeichnet wird, nur nach einer Richtung erstreckt. Wir brauchen die Frage hier nicht allgemein zu behandeln, sondern können ganz concret vorgehen. Es ist die Frage, ob Herrn Pringsheim's Zahlbegriff geeignet ist, den in Rede stehenden Ausgangspunkt abzugeben.

Hier ist nun jedenfalls ein erster Einwand, dafs Herr Pringsheim selbst gar nicht so consequent abstract vorgeht, als er vorgiebt dies zu thun. Ich möchte ihm den Vorschlag machen, statt der gewöhnlichen Sprache mit ihren unwillkürlichen Associationen einmal Peano's logischen Calcul zu gebrauchen und zu sehen, wohin er dann kommt. So wie die Sache jetzt liegt, fällt er (in einer für mich sehr erfreulichen Weise) immer aus der Rolle, indem er auf Vorstellungsweisen der äufseren Erfahrung Bezug nimmt: bald sagt er von einer Definition, sie sei haarscharf, bald wieder von einem Begriff, er sei quallenhaft!

Dann aber entsteht die centrale Frage: Kann ich mit dem Zahlbegriff überhaupt die Idee des geometrischen Continuums erschöpfen? Die Entwickelungen der neueren Mengenlehre sind in dieser Hinsicht nicht sehr ermutigend. Ich glaube, man mufs an der Auffassung festhalten, dafs das Continuum eine ursprüngliche Vorstellung ist, welche gegenüber den Bestrebungen, dasselbe in discontinuirliche Elemente aufzulösen, alleweil einen incommensurablen Rest läfst. Es ist vielleicht ein Verdienst, an dieser Stelle einmal die Ursprünglichkeit der Raumvorstellung, ihre Unabhängigkeit von der Zahlvorstellung stark zu betonen. In der That drängen viele moderne Mathematiker die Zahlvorstellung nachgerade in einer Weise in den Vordergrund, die man nur als eine Selbstüberhebung bezeichnen kann. Plato sagte: „ἀεὶ ὁ θεὸς γεωμέτρει“. Daraus machte bereits Jacobi: „ἀεὶ ὁ θεὸς ἀριθμητίζει“. Dann kam Kronecker und schuf den denkwürdigen Ausspruch: „Die ganzen Zahlen hat Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.“ Das ist der Gipfel. Aber selbst Poincaré stellt es in seiner vorjährigen Rede vor dem Züricher Congrefs als möglich hin, dafs da ein Unterschied bestehe; nur vindicirt er den Ursprung der Zahlen dem Menschengeiste und nimmt für die Entstehung des Continuums eine Mitwirkung der Aufsenwelt in Anspruch. Charakteristisch ist auch, dafs er im Gegensatz zu den früheren französischen Mathematikern nicht mehr vom „géomètre“, sondern vom „analyste“ als dem mafsgebenden Gelehrten

spricht. Dem gegenüber will ich mit einer Äufserung hervortreten, welche jedenfalls klaren Widerspruch anmeldet, ich will aussprechen, dafs ich jeden Mathematiker herzlich bedaure, dem die Natur kein lebhaftes Raumvorstellungsvermögen verliehen hat! Herrn Pringsheim aber und alle anderen bitte ich, zu vergleichen, was ich in meiner „Arithmetisirung" und schon vorher in meinem „Evanston Colloquium", Vorlesung 6, über die psychologischen Unterschiede der mathematischen Veranlagung verschiedener Individuen gesagt habe.

Im übrigen aber komme ich nun auf einen Punkt, den ich wegen der Wichtigkeit, die ich ihm beilege, schon oft berührt habe*), der aber dem Allgemeinbewufstsein der zeitgenössischen Mathematiker noch immer fern zu liegen scheint.

Dies ist, dafs überall da, wo wir die Analysis auf die Verhältnisse der Wirklichkeit anwenden, nicht der strenge Zahlbegriff in seiner heutigen Entwickelung Platz greift, sondern der abgekürzte Gröfsenbegriff (wenn eine solche Ausdrucksweise gestattet ist), der sich durch eine endliche Zahl von Decimalstellen ausdrückt. Nicht die heutige Präcisionsmathematik ist das, was wir zur Erklärung der Naturvorgänge gebrauchen, sondern eine Mathematik derjenigen Beziehungen, die mit begrenzter Genauigkeit statthaben!

Dies ist natürlich nichts Neues, sondern war den alten Autoren, welche die Differential- und Integralrechnung geschaffen haben, immer gegenwärtig. Die ganze Auffassung, welche die Differentiale als kleine Gröfsen gelten läfst, hängt damit zusammen. Man denke auch an die Ausdehnung, welche in den älteren Lehrbüchern die Differenzenrechnung einnimmt. Es mag schwer sein, die Sache genau zu formuliren, und der Gewinn an logischer Schärfe, der eintrat, als man sich entschlofs, den Calcul auf den strengen Grenzbegriff zu gründen, ist nicht zu bestreiten. Aber ich fürchte, dafs sich damit die Entwickelung von dem, was der eigentliche Zweck der Differential- und Integralrechnung von Hause aus sein sollte, entfernt hat. Es scheint sehr der Mühe wert, neben die heutige Differentialrechnung eine feinere Differenzenrechnung zu setzen, welche mit Bewufstsein mit zwar kleinen aber endlichen Differenzen operirt. Man vergleiche hierzu die Entwickelungen von Boltzmann in seinem Buche über die Principe der Mechanik (1897), andererseits auch die neue Beneke-Aufgabe der Göttinger philosophischen Facultät. Möge es gelingen, von hier aus die Kluft zu überbrücken, welche im Augenblicke die theoretischen Überzeugungen der Mathematiker von den Verfahrungsweisen der Praktiker trennt!

---

*) Vergl. wieder Vorlesung 6 im Evanston Colloquium oder auch meinen Vortrag über Riemann vor der Wiener Naturforscherversammlung von 1894 (abgedruckt in Bd. 4 des Jahresberichts der D. M.-V.).

Nun scheint es keineswegs unmöglich, Entwickelungen der gemeinten Art etwa an Weierstraſs anzuschlieſsen. Man hat nur die unendlichen Reihen oder Annäherungen, die Weierstraſs gebraucht, um eine Gröſse ε beliebig klein werden zu lassen, in dem Augenblicke jedesmal abzubrechen, wo ε unter einen vorgegebenen Grad der Kleinheit sinkt. Ganz anders aber bei dem Pringsheim'schen Ausgangspunkte. Hier wird die Auffassungsweise, daſs eine Gröſse klein und deshalb zu vernachlässigen sei, von vornherein so vollständig zurückgeschoben, daſs für dieselbe sozusagen kein Raum gegeben ist. Die Zweckmäſsigkeit des Pringsheim'schen Ausgangspunktes wird dadurch, wie man sieht, aufs neue in sehr bedenklicher Weise in Frage gestellt.

Zur Frage der Universitäts-Vorlesungen über Infinitesimalrechnung.

Von **Alfred Pringsheim** in München.

Es erscheint mir äuſserst erfreulich, daſs die Anregung, die ich auf der vorjährigen Versammlung durch meinen Vortrag: „Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht"*) zu geben versuchte, auf so fruchtbaren Boden gefallen ist. Und ich danke ganz besonders Herrn Klein, daſs er daraus Veranlassung genommen hat, den von ihm in der vorliegenden Frage eingenommenen Standpunkt in einer Weise zu präcisiren, die an Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig läſst. Könnte ich nun auch mit den mir als persönlichem Specimen von Herrn Klein mit liebenswürdigster Courtoisie gemachten Zugeständnissen recht wohl zufrieden sein, so glaube ich doch, im Interesse der von mir vertretenen Sache auf seine Ausführungen einiges erwidern zu müssen, zumal ich den Eindruck empfangen habe, als sei er durch das besondere Vergnügen, welches ihm nach eigener Versicherung die Form meines Vortrages bereitet hat, einigermaſsen daran verhindert worden, dessen Inhalte ganz gerecht zu werden. Verschiedene seiner Einwendungen, namentlich in Bezug auf meine angebliche Stellung zur Geometrie, wie auch auf die wissenschaftliche Unzulänglichkeit der von mir bevorzugten arithmetischen Grundlage deuten auf eine teilweise miſsverständliche Auffassung meiner Ansichten hin oder sind zum mindesten geeignet, eine solche bei anderen hervorzurufen. Gerade hierdurch, wie auch durch das Hereinziehen einer Frage, die ich mit wohlerwogener Absicht von vornherein beiseite gelassen habe, scheint mir der eigentliche Schwerpunkt der Discussion merklich verschoben worden zu sein.

---

*) VI. Jahresb. d. D. M.-V. (1898), p. 73—83.

Herr Klein macht mir zunächst eine Art Vorwurf daraus, daſs ich in dem genannten Vortrage, unter ausdrücklicher Beschränkung auf das Thema der Universitäts-Vorlesungen, auf die Bedürfnisse der Ingenieure keinerlei Rücksicht nehme. Ich muſs bekennen, daſs ich diesen Vorwurf um so weniger als einen berechtigten ansehen kann, als ja Herr Klein selbst, nach dem in der Eröffnungs-Sitzung der diesjährigen Naturforscher-Versammlung gehaltenen Vortrage*) zu urteilen, von seinen früheren, in dieser Richtung gestellten Forderungen wesentlich zurückgekommen zu sein scheint und nunmehr auch die höhere und höchste Ausbildung der Ingenieure definitiv den Technischen Hochschulen zuweist. Daſs ich nun aber in Betreff der Art und Weise, wie die mathematischen Vorlesungen an letzteren zu gestalten seien, aus Mangel an entsprechender praktischer Lehrerfahrung mir kein Urteil erlaube, dürfte doch selbstverständlich und keinesfalls tadelnswert erscheinen. Und wenn ich auch nicht leugne, auf Grund anderweitiger Erfahrungen mir selbst hierüber gewisse Privatmeinungen gebildet zu haben, so halte ich mich doch weder für berechtigt, noch für verpflichtet, dieselben zur öffentlichen Discussion zu stellen. Da hingegen Herr Klein mit Recht beanspruchen darf, auch in technischen Unterrichtsfragen für competent zu gelten, so wird derjenige Teil seiner Ausführungen, welcher sich mit der Ausbildung der Ingenieure befaſst, zwar sicherlich allgemeines Interesse erregen und zumal in technischen Kreisen die gebührende Beachtung finden: zu der von mir angeregten Frage scheint er mir indessen in keiner Beziehung zu stehen und weit eher geeignet, dieselbe zu verdunkeln, als zu klären.

Jene Frage beschränkt sich ausschlieſslich darauf, wie gewissen, genau bezeichneten Universitäts-Vorlesungen, die für ein durchweg aus Nicht-Technikern zusammengesetztes Publicum bestimmt sind, eine geeignete Grundlage geschaffen werden könne. Die von mir befürwortete arithmetische Einführungsmethode scheint nun Herr Klein dahin aufzufassen, als ob es sich hierbei um ein vollständiges Zurückdrängen der geometrischen Anschauung oder gar weiterhin um eine einseitig arithmetische Ausbildung der Lehramts-Candidaten handele.**) Wenn die betreffenden Auseinandersetzungen des Herrn Klein in dem mit besonderem Nachdruck ausgesprochenen Satze gipfeln: „Ich will aussprechen, daſs ich jeden Mathematiker herzlich bedaure, dem die Natur kein lebhaftes Raumvorstellungsvermögen verliehen hat!“ so brauche ich freilich diesen letzteren nicht gerade auf mich zu beziehen.

*) S. diesen Jahresbericht p. 39 oder Verh. der Ges. deutscher Naturf. und Ärzte, 1898, I p. 25.

**) Auch was Herr Klein über die ihm wünschenswert erscheinende stärkere Berücksichtigung der angewandten Mathematik sagt, wird durch meine Ausführungen in keiner Weise präjudicirt.

Es ist ja immerhin mifslich, bedauernswert zu erscheinen, und Herr Klein ist viel zu höflich, um dergleichen direct von mir behaupten zu wollen. Da er aber den Umstand, dafs ich in meinem Vortrage gelegentlich einmal eine Definition als „haarscharf“, einen Begriff als „quallenhaft“ bezeichne, ganz ausdrücklich als einzigen geometrischen Hoffnungsstrahl hervorhebt,*) so wird man doch wohl auf Grund dieser Angabe von mir den Eindruck eines recht bedauernswerten Exemplares arithmetischer Beschränktheit gewinnen müssen. Es bleibt mir also nichts anderes übrig, als nochmals darauf aufmerksam zu machen, dafs ich auf S. 75 meines Vortrages den rein geometrischen Ausgangspunkt, den z. B. Herr Ascoli empfiehlt, als einen in sich consequenten und brauchbaren ausdrücklich anerkenne; dafs die zwar arithmetische, aber von vornherein mehr an die geometrische Anschauung anknüpfende Darstellungsweise des Herrn Pasch als mit der meinigen durchaus gleichberechtigt hingestellt wird (S. 83, Fufsn.); dafs ich, auch bei meiner Art der Darstellung, wenn nur erst der Begriff der Irrationalzahl hinlänglich erklärt ist, der geometrischen Anschauung den weitesten Spielraum einräume (S. 82). Und es sei mir ferner gestattet, darauf hinzuweisen, dafs ich jedesmal beim Beginn meiner Elementarvorlesungen über Differentialrechnung es geradezu als einen Hauptzweck derselben zu bezeichnen pflege, „geometrische Beziehungen arithmetisch zu beschreiben und aus den resultirenden arithmetischen Folgerungen geometrische Schlüsse zu ziehen.“ Bei dem an diese Problemstellung naturgemäfs sich anschliefsenden Versuche, die Punkte einer Geraden „arithmetisch zu beschreiben“, d. h. durch Zahlen darzustellen, ergiebt sich in bekannter Weise die Unmöglichkeit, für einen um die Diagonale des Einheitsquadrates von der Nullstelle entfernten Punkt ein rationales Zahlenäquivalent herzustellen, und damit zugleich die zwingende Notwendigkeit, vor allem den Zahlbegriff entsprechend auszubilden. Die hierbei von mir befolgte Methode, die Zahlen nunmehr in erster Linie als Zeichen aufzufassen, denen lediglich eine bestimmte Succesion zukommt und mit denen nach bestimmten Regeln gerechnet wird, erklärt nun freilich Herr Klein als die denkbar abstracteste. Mir will das keineswegs einleuchten, da doch gerade bei dieser Auffassung die Zahl mit einer ganz concreten Vorstellung untrennbar verknüpft erscheint. Und ich möchte zu bedenken geben, dafs dann Schachfiguren oder Spielkarten ebenfalls als äufserst schwierige

*) Herrn Klein's Versuch, gerade hieraus die Inconsequenz meiner Lehrmethode zu deduciren, bedarf um so weniger einer ernstlichen Widerlegung, als ich eine vollkommen consequente arithmetische Abstraction überhaupt garnicht prätendirt, vielmehr deren mir zweckmässig erscheinende Begrenzung deutlich bezeichnet habe. (Vgl. auch p. 143).

Abstractionen gelten müfsten. Die eben angedeutete Analogie scheint mir geradezu schlagend und läfst sich im einzelnen leicht weiterführen: Mit einem unvollständigen Kartenspiel kann ich nicht Skat spielen; aber auch mit einem vollständigen nicht, wenn ich die betreffenden Regeln nicht kenne. Mit einem unvollständigen Zahlenapparat kann ich keine Analysis treiben, mit einem vollständigen erst dann, wenn ich damit zu rechnen verstehe. Dafs es wirklich nicht angehen sollte, auf Grund dieser formalen Anschauungsweise und der in meinem Vortrage des näheren geschilderten Unterrichtsmethode einem Anfänger von einigem Verstand und guten Willen eine leidliche Vorstellung von der Ausbildung des Zahlbegriffes und dessen Anwendung auf geometrische Probleme beizubringen, halte ich für wenig wahrscheinlich.

Wenn nichtsdestoweniger Herr Klein mit aller Entschiedenheit bestreitet, dafs ich auf diesem Wege wirkliche Lehrerfolge erzielt haben könne, so ist das sein gutes Recht. Und wenn er gewisse von mir angeführte, allenfalls hierfür sprechende äufsere Kennzeichen dadurch zu erklären sucht, dafs er meinem Vortrage allerhand schmeichelhafte Qualitäten zuerkennt, so darf ich ihm für diese Liebenswürdigkeit um so dankbarer sein, als ich nachher in die Lage kommen werde, hiervon Gebrauch zu machen. Andererseits mufs ich, um jedes Mifsverständnis zu vermeiden, ausdrücklich hervorheben, dafs ich weit entfernt bin, etwa an Herrn Klein's Lehrerfolgen ähnliche Zweifel zu hegen: ich erkenne sie vielmehr als geradezu ganz aufserordentliche an. Nur scheinen mir dieselben, soweit sie sich nach aufsen constatiren lassen, auf einem ganz anderen Gebiete zu liegen, nämlich in der Heranbildung von Schülern im höheren Sinne zu bestehen. Methoden und individuelle Vorzüge, die sich eminent bewähren, wo es gilt, eine schon differenzirte Auswahl vorgerückterer Schüler nach den verschiedensten Richtungen zu eigenem Denken und Schaffen anzuregen, können möglicherweise minder geeignet sein, um einer gröfseren Anzahl von Anfängern, deren Begabung und Fleifs durchschnittlich nur ein bescheidenes Mittelmafs erreicht, gewisse solide Grundbegriffe beizubringen. Dafs Herr Klein mitunter auch Elementar-Vorlesungen über Differentialrechnung gehalten hat, ist mir zwar bekannt: über ihren Erfolg fehlt mir jedes Urteil. Dagegen darf ich vielleicht hervorheben, dafs die mit den Unterrichts-Grundsätzen des Herrn Klein in unverkennbarem Zusammenhange stehende Neubearbeitung der Serret-Harnack'schen Differentialrechnung recht deutlich zeigt, dafs es nicht wohlgethan ist, dem Zahlbegriff gegenüber eine Art Vogel-Straufs-Politik zu beobachten, und dafs es als verlorene Liebesmühe gelten darf, auf diesem Wege eine einigermafsen befriedigende Fassung für die Grundlagen der Analysis erzielen zu wollen.

Im übrigen — und das möchte ich, da es ja in meinem ersten

Vortrage nicht mit genügender Deutlichkeit zum Ausdrucke gekommen scheint, noch ganz speciell betonen — handelt es sich doch schliefslich bei dieser ganzen Discussion keineswegs um eine der Fragen: Ob arithmetisch oder geometrisch? Ob systematisch oder methodisch? Ob deductiv oder inductiv? — vielmehr im wesentlichen um die folgende: Sollen wir in jenen einführenden Vorlesungen über höhere Analysis schon versuchen, unentbehrliche Fundamentalbegriffe mit angemessener Gründlichkeit zu erörtern, oder uns statt dessen mit gewissen alt hergebrachten Surrogaten begnügen? Die Beantwortung dieser Frage wird aber immer bis zu einem gewissen Grade vom individuellen Geschmack, von allerhand Erfahrungen und von Nebenumständen verschiedener Art abhängen. Mir persönlich will es scheinen, dafs jener angeblich leichtere Weg sich gar bald als ein recht dornenvoller Umweg erweist. Und das bekannte Sprichwort: „Wer billig kauft, kauft teuer", halte ich, wie zumeist im gewöhnlichen Leben, so auch hier für zutreffend. Allerdings mufs zugestanden werden, dafs nur derjenige die Vorteile der darin enthaltenen Lehre geniefsen kann, dem die entsprechenden Mittel zur Verfügung stehen. Aber ich bin eben auch der Meinung, dafs derjenige, dessen geistiger Baarbestand eine übrigens keineswegs allzu hoch bemessene Grenze nicht erreicht, den mathematischen Studien lieber fern bleiben soll, und ich betrachte es geradezu als ein Glück, wenn derartige Elemente gleich in den Anfangs-Vorlesungen gründlich davon abgeschreckt werden. Denn schliefslich liegt doch immer eine grofse Härte darin, jemanden, der vier Jahre oder noch länger *invita Minerva* mathematische Wissenschaften studirt hat, beim Examen durchfallen zu lassen, und noch bedenklicher mufs es scheinen, wenn man, Gnade für Recht ergehen lassend, ihm Gelegenheit giebt, als Mathematik-Lehrer späterhin dauernd Unheil zu stiften.

Wem ein gewisses Mafs elementarer Vorkenntnisse,*) mathematischer Begabung, Aufmerksamkeit und Ausdauer abgeht, der wird durch keine überhaupt denkbare Methode sich höhere mathematische Kenntnisse erwerben. Ich pflegte in früheren Jahren, neben meinen für Mathematiker bestimmten Collegien, auch eine etwa im Sinne des bekannten Nernst-Schoenflies'schen Buches *ad usum delphini* präparirte Vorlesung über höhere Analysis abzuhalten, die vorwiegend

*) In dem leider allzu häufigen Mangel einer genügenden elementaren Vorbildung, nicht aber — mit Herrn Klein — in einer zu abstracten Gestaltung der höheren mathematischen Vorlesungen erblicke ich den Hauptgrund der Thatsache, dass so viele Studirende nicht im Stande sind, sich wirklich höhere mathematische Kenntnisse auf der Universität zu erwerben. Inwieweit hier durch principielle Einführung von Vorlesungen über Elementar-Mathematik Wandel geschaffen werden könnte, erscheint dringend des Versuches wert. (Vgl. die folgenden Vorträge der Herren H. Schotten (p. 145) und Franz Meyer (p. 147).)

von Chemikern, in geringerem Mafse von anderen Studirenden der Naturwissenschaften besucht wurde. Der Erfolg war, trotzdem ich hier das Mafs der „logischen Forderungen" auf ein Minimum reducirte, recht wenig ermutigend. Das mag vielleicht zum Teil an meinem Vortrage gelegen haben; immerhin darf ich mich vielleicht in dieser Beziehung auf das oben erwähnte, mir von Herrn Klein ausgestellte Leumunds-Zeugnis berufen. Kurzum: die Vorlesungen wurden ziemlich schlecht und unregelmäfsig besucht, und es war eine verhältnismäfsig kleine Zahl von Hörern, nämlich die wirklich mathematisch befähigten und fleifsigen unter ihnen, die daraus einigen Nutzen zogen. Diese wenigen aber hätten auf Grund ihrer Qualification sicherlich auch meiner Haupt-Vorlesung mit dem gleichen Interesse und Verständnis folgen können, und sie würden dabei nach meiner Ansicht erheblich mehr gelernt haben. Ich habe es darnach für zwecklos gehalten, diese Art von Vorlesungen weiter fortzusetzen, und ich bin zu der Überzeugung gekommen, dafs die Anstrengung, ohne welche nun einmal Mathematik nicht gelernt werden kann*), durch logische Verschärfung der Lehrmethode keine wesentliche Steigerung erfährt.

Ich möchte nun etwas genauer auf die Behauptung des Herrn Klein eingehen, dafs die Möglichkeit, die natürliche Vorstellung des geometrischen Continuums durch einen arithmetischen Begriff zu ersetzen, auf Grund neuerer Ergebnisse der Mengenlehre stark in Frage gestellt erscheine. Bei der unbestimmten Formulirung dieser Aussage ist es natürlich kaum möglich, dazu eine genau präcisirte Stellung zu nehmen. Als Einwurf gegen die in meinem Vortrage (p. 82) angedeutete Art der Darstellung scheint sie mir indessen schon aus dem Grunde nicht zutreffend, weil es sich ja in dem betreffenden Zusammenhange gar nicht um eine Ersetzung des geometrischen Linear-Continuums durch ein etwa a priori vorhandenes arithmetisches handelt, vielmehr nur darum, das durch ganz bestimmte geometrische Eigenschaften (Pantachie und Dedekind'sches Axiom) definirte Linear-Continuum arithmetisch abzubilden. Und aus der Möglichkeit, diese Abbildung in eineindeutiger Weise herzustellen, entnehme ich lediglich die Berechtigung, die Succession der reellen Zahlen nunmehr a posteriori als eine stetige zu bezeichnen, ohne an dieser Stelle ein näheres Eingehen auf den arithmetischen Charakter dieses „Zahlen-Continuums" für notwendig oder zweckmäfsig zu halten. Die fragliche Einführungsart des Continuitäts-Begriffes beruht freilich auf der stillschweigenden Voraussetzung, dafs man die Euklidische Abstraction des mathematischen Punktes überhaupt noch als geometrische Vorstellung gelten läfst. In der That erblicke ich in der Ver-

*) Vgl. den oben citirten Vortrag des Herrn Klein, p. 43 bezw. p. 28.

wendung dieser idealistischen Anschauung lediglich eine aus didaktischen Gründen annehmbare Concession, die der sogenannten angeborenen Stetigkeits-Vorstellung nach Möglichkeit Rechnung tragen soll. Um aber gleichzeitig der Succession der reellen Zahlen den (in dem obigen Zusammenhange überhaupt nicht arithmetisch definirten, sondern lediglich durch Heranziehung einer idealistisch-geometrischen Analogie beschriebenen) Stetigkeits-Charakter als einen, unabhängig von jeder idealistischen Raum-Anschauung, ihr innewohnenden ein für allemal zu wahren, schien es mir andererseits notwendig, die Definition der Irrationalzahlen eben nicht von vornherein in der älteren Weise an irgendwelche geometrische Grenz-Vorstellung anzuknüpfen. Gerade hierin glaubte ich mich aber im vollsten Einverständnisse mit Herrn Klein zu befinden, der bei früherer Gelegenheit sich über diesen Punkt in so überzeugender Weise geäufsert hat, dafs ich es mir nicht versagen kann, die betreffende Stelle*) hier wörtlich anzuführen: „Sicher liegt die Veranlassung zur Bildung der Irrationalzahlen in der scheinbaren Stetigkeit der Raumanschauung. Ich kann aber, da ich der Raumanschaung keine Genauigkeit beilege, ihr auch nicht die Existenz des Irrationalen entnehmen wollen. Vielmehr ist mir die Theorie des Irrationalen etwas, was in rein arithmetischer Weise zu begründen oder zu umgrenzen ist, und was wir dann, dank den Axiomen in die Geometrie hineintragen, um auch in ihr jene Schärfe der Distinctionen zu erreichen, welche die Vorbedingung der mathematischen Behandlung ist.“

Wenn nun Herr Klein diese seine früheren Ansichten auf Grund neuerer Ergebnisse der Mengenlehre wesentlich modificirt zu haben scheint, so mufs ich bekennen, dafs jene nicht näher bezeichneten Ergebnisse mir entweder bisher fremd geblieben oder vielleicht von mir nicht gehörig verstanden worden sind. Jedenfalls möchte ich aber ausdrücklich hervorheben, dafs die auf den arithmetischen Continuitätsbegriff bezüglichen neueren Arbeiten der Herren Bettazzi, Stolz und Veronese die wohldefinirte Existenz jenes Begriffes nach meinem Dafürhalten nicht nur nicht in Frage gestellt, sondern vielmehr durch Beseitigung gewisser ursprünglich damit verbundener unzureichender Vorstellungen und genaue Untersuchung allgemeinster in Betracht kommender Möglichkeiten vollkommen geklärt haben.

Da ich auch in der Beziehung noch auf dem oben charakterisirten älteren Standpunkte des Herrn Klein stehe, dafs ich Schärfe der Distinctionen für eine unerläfsliche Vorbedingung mathematischer Behandlung halte, so kann ich mir keine rechte Vorstellung davon machen, inwieweit eine Art von Annäherungs-

*) Math. Ann. Bd. 37 (1890), p. 572.

Mathematik imstande sein sollte, die Infinitesimal-Rechnung zu ersetzen, deren wahre Kraft und praktische Brauchbarkeit mir doch gerade in der wundervollen Präcision ihres Algorithmus zu liegen scheint. Indessen will ich mich da gern eines besseren belehren lassen, sobald jene zur Zeit wohl erst andeutungsweise vorhandene Annäherungs-Mathematik concretere Existenz gewinnt. Wesentlich anderer Art scheint mir die Frage, ob es nicht nützlich und wünschenswert erscheine, neben und innerhalb der eigentlichen „Präcisions-Mathematik" der Entwickelung von Annäherungs-Methoden und der praktischen Übung angenäherter numerischer Berechnung im Unterricht ausgiebigere Berücksichtigung angedeihen zu lassen. In der Bejahung dieser Frage stimme ich mit Herrn Klein unbedingt überein. Durch das Streben nach möglichster Präcision arithmetischer Formulirungen wird nämlich die Zulässigkeit angenäherter Darstellungsformen in keiner Weise ausgeschlossen, vielmehr ihre Tragweite erst in das richtige Licht gestellt. War es doch gerade Weierstrafs, welcher die angenäherte Darstellung jeder stetigen Function durch eine rationale gelehrt hat.*) Und da die Auffassung der Irrationalzahl als einer völlig eindeutig definirten im Grunde genommen immer nur auf der Möglichkeit beruht, sie bei jeder Rechnung mit beliebig vorzuschreibender Genauigkeit durch rationale Zahlen zu ersetzen, so wird man gerade bei dieser Auffassung dahin geführt, die Möglichkeit solcher numerischer Annäherung aufs sorgfältigste zu prüfen. So wird man denn finden, dafs gerade die ausgesprochenen Vertreter der strengen arithmetisirenden Richtung in ihren Lehrbüchern**) den numerischen Annäherungs-Methoden eine weit eingehendere Beachtung geschenkt haben, als bisher im allgemeinen üblich war.

Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dafs die vorstehenden Ausführungen in keiner Weise die Prätension erheben, Herrn Klein's pädagogische Principien förmlich bekämpfen oder gar widerlegen zu wollen. Eine Aufstellung irgend welcher bindenden Unterrichts-Normen halte ich überhaupt von vornherein für ausgeschlossen. Dagegen darf wohl ein Austausch verschiedener Meinungen über dieses Thema als im allgemeinen Interesse liegend angesehen werden. Und so wird man es vielleicht nicht unangemessen finden, wenn ich mir erlaubt habe, der bisherigen Discussion noch die vorstehenden Ergänzungen hinzuzufügen.

---

*) Wie Herr Klein dazu gelangt, am Schlusse seines Vortrages zwischen der Weierstrafs'schen Auffassung und der meinigen einen förmlichen Gegensatz zu construiren, ist mir völlig unverständlich.

**) Vgl. z. B. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik Bd. 1, pp. 120. 309. 317. — F. Tannery, Leçons d'arithmétique théorique et pratique (Paris, 1894), p. 228—251.

Über die Wechselbeziehungen zwischen Universität und höheren Schulen auf dem Gebiete der Mathematik.

Von **H. Schotten** in Halle a. S.

Der Vortragende, der schon früher an anderer Stelle darüber geklagt hat, dafs auf dem Gebiete der Mathematik für den Studirenden zwischen Universität und Schule eine weite Kluft besteht, glaubt auch jetzt noch zu dieser Klage berechtigt zu sein und befürwortet daher Vorlesungen über Elementarmathematik, sowie solche über Geschichte und Methodik der Mathematik überhaupt. Um zu einem Überblick zu gelangen darüber, wie es in dieser Hinsicht zu früheren Zeiten gewesen ist, hat der Vortr. die Vorlesungsverzeichnisse der Universität Halle, soweit sie auf der Universitätsbibliothek vorhanden sind (seit 1753), durchstudirt und macht Mitteilungen über die Themata der angekündigten Vorlesungen und über ihr Wesen, soweit sich das aus den Ankündigungen ersehen läfst. Was zunächst den letzten Punkt betrifft, so hat sich ziemlich lange der Gebrauch erhalten, dafs bei der angekündigten Vorlesung zugleich das Lehrbuch angegeben ist, nach dem die Vorlesung sich richtet. Man wird nicht allzuweit vom Thatsächlichen abweichen, wenn man annimmt, dafs die Vorlesung mehr oder weniger überhaupt eine etwas erweiterte Durchnahme des Buches gewesen ist, zumal da ein grofser Teil der Docenten nach eigenen Lehrbüchern unterrichtete. Der Vortr. hat nun ferner die angegebenen Lehrbücher auf Inhalt und Methode geprüft und dadurch eine Ansicht gewonnen von dem früheren Universitätsunterricht, für die er eine gewisse Berechtigung beanspruchen zu dürfen glaubt. Danach ist es zu bedauern, dafs eine ganze Reihe von Gebieten heutzutage auf der Universität nicht mehr gepflegt wird, für die man gewifs Berücksichtigung fordern darf. Selbstverständlich kommt ja heute der Studirende ganz anders vorgebildet auf die Universität als vor etwa 50 Jahren — wobei übrigens nicht übersehen werden darf, dafs in früheren Zeiten Mathematik wohl nur von solchen studirt wurde, die aus ganz besonderen Ursachen sich diesem Gebiete zuwendeten; auf keinen Fall kann es als ein Brotstudium angesehen werden —, immerhin ist der Unterschied zwischen Schule und Universität ein ganz gewaltiger. Und aus diesem Grunde wären Vorlesungen über Elementarmathematik, die natürlich an vorhandene Kenntnisse anknüpfen, aber doch das Bekannte in ganz neuer Beleuchtung erscheinen lassen, sehr zu wünschen: Vorlesungen, wie sie früher regelmäfsig gehalten worden sind. Aber die Abkehr von der Beschäftigung mit der Elementarmathematik ist bei den Universitätslehrern eine so vollständige geworden, dafs sie nicht nur keine Vorlesungen über dies Gebiet halten, sondern — was fast noch mehr zu bedauern ist — dafs sie durch-

aus auf diesem Gebiete sich von jeder productiven Arbeit fernhalten. Lehrbücher der Elementarmathematik von Hochschulprofessoren sind in neuerer Zeit etwas ganz Undenkbares: und doch würden derartige Lehrbücher sehr befruchtend auf die unendliche Menge dieser Art von Arbeiten einwirken. Der Verfasser bedauert aber das Fehlen von Vorlesungen über Elementarmathematik nicht nur im Interesse der Mathematik-Studirenden, sondern mehr noch im Interesse der Studirenden anderer Facultäten, denen so jede Möglichkeit genommen ist, an der Hand des Elementaren einen Einblick in das Höhere zu thun. Vielleicht liegt hierin ein Teil der Schuld, daſs es fast zum guten Ton gehört, mit Unkenntnissen in der Mathematik zu renommiren. Ganz gewiſs würde auch die allseitig gewünschte Durchdringung mit mathematischem Denken durch solche Vorlesungen gewinnen. Neben dem Gebiete der elementaren Mathematik sind es aber noch eine Reihe anderer, die aus dem Plane der Universitäten verschwunden sind, wie z. B. die früher stets vertretene mathesis forensis und andere. Ein Teil freilich ist, wie es scheint, ausschlieſslich Eigentum der Technischen Hochschulen geworden; ob mit Recht, mag dahin gestellt sein.

Bedauert wird auch noch die starke Bevorzugung der Analysis auf den Universitäten. Die Tendenz des Vortrags ist im wesentlichen dieselbe, die dem Vortrage des Herrn Geheimrats Klein zu Grunde lag: für Ausbreitung mathematischen Wissens und Denkens Propaganda zu machen und einen Weg anzugeben, der nach Ansicht des Vortragenden geeignet ist, dieses Feld besonders zu fördern.

Zur Ökonomie des Denkens in der Elementarmathematik.

Von **W. Franz Meyer** in Königsberg i. Pr.

Auf die zur Zeit actuelle Frage, welches Maſs von Abstractheit einerseits, von Anschaulichkeit andererseits der Hochschulunterricht in den Elementen der höheren Analysis aufweisen soll, will ich hier nicht eingehen und höchstens bemerken, daſs man zum günstigsten Durchschnittsresultat gelangen wird, wenn jeder Docent (innerhalb natürlicher Grenzen) seiner ausgesprochenen Individualität folgen darf.

Dagegen bin ich der Meinung, daſs der Hochschulunterricht — wenn man von besonders begabten Zuhörern absieht — erst dann von nachhaltigem Erfolge sein wird, wenn er von einem systematischen, wenn auch kurzen (etwa wöchentlich einstündigen) Repetitorium der Elementarmathematik, vor allem der Arithmetik, Algebra und Trigonometrie, begleitet wird. Man wird selten einen unmittelbar von der Mittelschule gekommenen Zuhörer finden, der

beispielsweise eine klare Anschauung davon hätte, dafs dem Satze „$a^0 = 1$“ zwei ganz verschiedene Bedeutungen zukommen, einmal lediglich als Einführung einer Bezeichnung, das andere Mal aber als ein zur Begründung der Potenzlehre notwendiger Grenzsatz.

Praktische Rechner, wie die Astronomen, klagen häufig über das Unvermögen jüngerer Studenten, auch nur die einfachsten trigonometrischen Rechnungen zu erledigen.

Es kommt aber noch etwas anderes hinzu. Wenn man sich auf den Boden der Wirklichkeit stellt, nimmt man häufig wahr, wie der mathematische Student im Laufe von rund vier Studienjahren mit den schwierigsten und subtilsten Gebieten der höheren Mathematik bekannt gemacht wird, wodurch sich bei ihm unwillkürlich ein gewisser „Hochmut“ entwickelt; wie er dann als praktischer Lehrer mit tiefem Widerwillen, mit dem Gefühle eines Sklaven, die längst vergessene Elementarmathematik an der Hand zweifelhafter Lehrbücher wieder hervorsuchen mufs. Weil seine Zeit sehr knapp ist, gelangt er nicht dazu, den Stoff zu durchdringen, sondern er ist genötigt, dem Gange des Lehrbuches blindlings zu folgen. Dafs man bei häufiger Durcharbeitung des Elementarstoffes nicht nur eine wesentliche Ersparnis an Gedanken- und Rechnungsarbeit erzielt, sondern in enger Verbindung damit höhere Gesichtspunkte fast von selbst einführt,*) das möchte ich für diesmal an dem concreten Fall der ebenen Trigonometrie kurz darlegen. Die einfachsten Sätze der Planimetrie und Algebra werden dabei vorausgesetzt.

Die erste Stufe soll wesentlich einen praktischen Zweck verfolgen und möglichst rasch zu den Anwendungen, also vor allem zur Auflösung des Dreiecks führen. In üblicher Weise führe man sin, cos, tg, cotg (sec und cosec sind überflüssig) im rechtwinkligen Dreieck ein. Die Lösungen der vier Aufgaben, aus einem der vier Ausdrücke jeweils die drei anderen zu berechnen, sind (abgesehen von den Folgen aus den Definitionen) lediglich Modificationen des Pythagoräischen Satzes. Auf Grund der Definitionen von sin, cos, tg, cotg und auf Grund der als bekannt vorausgesetzten Existenz ihrer Logarithmen wird die theoretische wie praktische Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks etwas Selbstverständliches. Man gehe sofort zum schiefwinkligen Dreieck über. Um hier überhaupt Trigonometrie einzuführen, bedarf man eines rechtwinkligen Dreiecks, also einer Höhe. Die Thatsache, dafs die Höhe gleich zwei rechtwinklige Dreiecke erzeugt, läfst (abgesehen von weiteren, die complicirter sind) drei trigonometrische Darstellungen zu:

*) Dabei gehe ich von dem anerkannten, aber keineswegs immer durchgeführten Satze aus, dafs der Lehrer für sich auf einem wesentlich höheren Standpunkt stehen soll, als der ist, den er den Schülern gegenüber einzunehmen genötigt wird.

(1) $S_a \equiv b \sin\gamma - c \sin\beta = 0$ (Sinussatz),

(2) $C_a \equiv b^2 + c^2 - a^2 - 2\,bc \cos\alpha = 0$ (Cosinussatz),

(3) $P_a \equiv a - b \cos\gamma - c \cos\beta = 0$ (Projectionssatz).

Diese drei Formelgruppen genügen schon zu einer rohen Auflösung des Dreiecks. Zur Verfeinerung werden, worauf geometrische Erfahrungen hinweisen, halbe Dreieckswinkel eingeführt

Die Anwendung von (2) oder auch von (3) auf das gleichschenklige Dreieck liefert sofort die Beziehungen zwischen sin und cos eines halben und ganzen Winkels. In einem schiefwinkligen Dreieck wird ein halber Dreieckswinkel $\frac{\alpha}{2}$, falls man das Auftreten fremder Stücke vermeiden will, am ungezwungensten durch Construction von $b + c$ resp. $b - c$ eingeführt. Die Anwendung von (1) auf die beiden so entstehenden Dreiecke liefert unmittelbar die Mollweide'schen und damit auch die Neper'schen Formeln. Die Einführung von $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ in (2) liefert die bekannten Verfeinerungen, sowie die schwierigere Formel für den Inhalt eines Dreiecks. Hinterher überzeugt man sich, dafs die erhaltenen Formeln auch für stumpfwinklige Dreiecke gültig bleiben, wenn man die Festsetzungen $\sin(2R - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(2R - \alpha) = -\cos\alpha$ trifft.

Damit ist alles Material gewonnen, um in der besten Weise die vier Aufgaben der Dreiecksauflösung zu erledigen, und die erste Stufe des Unterrichtes in der Trigonometrie hat damit einen befriedigenden Abschlufs gefunden. Eine Zeit von zwei bis drei Stunden genügt, um dieses Ziel zu erreichen.

Bei der zweiten Stufe fragt man bereits nach dem gegenseitigen Zusammenhange der Dreiecksformeln. Es ist nicht schwer, den Übergang von einer Gruppe zur anderen, unter Benützung des Satzes, dafs die Summe der Dreieckswinkel gleich $2R$ ist, mit Hülfe einfacher Eliminationen zu vollziehen. Durch Vergleich der Resultate erhebt man sich aber über die Trigonometrie des Dreiecks. So z. B. gelangt man auf zwei ganz ähnlichen Wegen zu dem Inhalt der Mollweide'schen Formeln, indem man das einemal irgend zwei Formeln der Gruppe (1), das anderemal der Gruppe (3) durch Addition resp. Subtraction combinirt. Die Gleichsetzung der Resultate ergiebt sofort die Richtigkeit der Formeln, die die Summe resp. Differenz zweier sin oder cos als Producte von sin resp. cos halber Summen und Differenzen von Winkeln darstellen, damit aber auch durch bekannte einfache Rechnung die der vier Formeln, die das Additionstheorem der Trigonometrie repräsentiren. Dabei haben die beiden auftretenden Winkel lediglich der Bedingung zu genügen, dafs ihre Summe nicht gröfser als zwei Rechte ist;

will man die Formeln auch von dieser Einschränkung befreien, so hat man nur die Festsetzungen $\sin(2R+\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(2R+\alpha) = -\cos\alpha$ hinzuzufügen.

Will man einen directen Beweis des Additionstheorems haben, so betrachte man ein Dreieck, dessen eine Ecke — um uns für den Augenblick der Sprache der analytischen Geometrie zu bedienen — im Anfangspunkt O eines rechtwinkligen Axensystems liegt, von dessen beiden weiteren Ecken B, C entweder die Abscissen oder die Ordinaten gleiche ev. entgegengesetzt gleiche Werte haben. Für den Inhalt dieses Dreiecks, dessen Figur für jegliche Lage von B, C leicht übersehbar ist, bediene man sich einmal der planimetrischen, das anderemal der trigonometrischen Elementarformel, so ergiebt sich auf Grund des Zusammenhanges zwischen rechtwinkligen und Polarcoordinaten die allgemeingültige Formel für $\sin(\alpha-\beta)$, (und hieraus durch blofse Rechnung die drei zugehörigen Formeln).

Auf der dritten Stufe nimmt man den Standpunkt der „Umkehrung“ ein. Man überzeugt sich, dafs, wenn zwischen irgend drei Längen a, b, c und irgend drei Winkeln α, β, γ die Relationen (2) oder auch (3) bestehen, und wenn man von uneigentlichen und nicht reellen Dreiecken absieht, in der That damit ein einziges Dreieck mit den Stücken a, b, c, α, β, γ definirt ist. Bei (2) würde das erst dann der Fall sein, falls man noch die Bedingung $\alpha+\beta+\gamma = 2R$, etwa in der trigonometrischen Form

$$(4) \qquad \cos(\beta+\gamma)+\cos\alpha = 0$$

hinzufügte. Man wird daher verlangen dürfen, dafs eine derartige für die Existenz eines Dreiecks charakteristische Formelgruppe als einziger Repräsentant der ganzen Dreieckstrigonometrie auftrete, und alle übrigen Gruppen aus dieser einen, ohne Zurückgreifen auf die Geometrie, durch rein algebraische Operationen hervorgehen, die alle fremden Factoren nach Möglichkeit vermeiden. Man kann diese Aufgabe auf verschiedene Arten lösen; ich will mich begnügen, um den Charakter der Betrachtung zu zeigen, (1), (2) und (4) aus (3) abzuleiten. Es empfiehlt sich, die Formeln (1), (3), des leichteren Vergleichs mit (2) halber, zu quadriren, also in der Gestalt zu schreiben:

$$(1') \qquad \Sigma_a \equiv b^2\sin^2\gamma - c^2\sin^2\beta = 0,$$

(a, b, c in cyklischer Folge zu nehmen),

$$(3') \qquad \Pi_{bc} \equiv (a - b\cos\gamma)^2 - (c\cos\beta)^2 = 0,$$

(die bei Ausschlufs uneigentlicher Dreiecke mit (1), (3) äquivalent sind), sowie (4) mit dem Factor $2bc$ zu versehen:

$$(4') \qquad R_a \equiv 2bc\,[\cos(\beta+\gamma)+\cos\alpha] = 0.$$

Dann finden zwischen den Ausdrücken Π, Σ, C, P folgende, in den sechs beliebigen Argumenten a, b, c, α, β, γ identische Relationen statt:

(5) $$\Pi_{bc} + \Pi_{cb} \equiv C_b + C_c,$$

(6) $$2\,C_a \equiv \Pi_{ac} + \Pi_{ca} + \Pi_{ab} + \Pi_{ba} - \Pi_{bc} - \Pi_{cb},$$

(7) $$2\,\Sigma_a \equiv \Pi_{ac} + \Pi_{ca} - \Pi_{ab} - \Pi_{ba} - \Pi_{bc} + \Pi_{cb},$$

(8) $$\begin{cases} C_a + \Sigma_a \equiv \Pi_{ac} + \Pi_{ca} - \Pi_{bc}, \\ C_a - \Sigma_a \equiv \Pi_{ab} + \Pi_{ba} - \Pi_{cb}, \end{cases}$$

(8ᵃ) $$\Pi_{ab} = C_b - \Sigma_c.$$

Die Formel (8ᵃ) darf als Repräsentant der ganzen Formelreihe (5) bis (8) gelten, denn diese folgen sofort wieder aus (8ᵃ). Diese Formel (8ᵃ) hat aber einen sehr durchsichtigen begrifflichen Inhalt; sie sagt aus, dafs und wie man die specifischen geometrischen Gedanken, die zu (1), (2), (3) führen, mit einander verknüpft, oder noch genauer, dafs und wie man irgend zwei dieser Gedanken nur mit Hülfe des dritten in einander überführen kann.

Dagegen ergiebt sich die einfachste*) Darstellung für R_a durch Beibehaltung der Ausdrücke P_a, S_a, nämlich:

(9) $$R_a \equiv P_a^2 + S_a^2 - C_a - C_b - C_c.$$

Die Auffassung auf der dritten Stufe läfst sich aber wiederum auf die ganze Trigonometrie ausdehnen. Da die explicite Ausrechnung der Resultate mit Schwierigkeiten verknüpft ist, so will ich mich auf ein leichtes Beispiel beschränken, dessen numerische Beherrschung eben noch glatt ausführbar ist. Es soll sich nur um die verschiedenen Formen der trigonometrischen Bedingung dafür handeln, dafs die Summe zweier Winkel α, β (mod. $4\,R$) gleich zwei Rechten ist.

Die meisten dieser Formen stellen die gemeinte Bedingung nicht rein dar, andererseits ist zu berücksichtigen, dafs bei vielen Anwendungen das Erfülltsein der Nebenbedingungen von vornherein ausgeschlossen ist. Wir begnügen uns hier mit den bekanntesten Gestalten der fraglichen Bedingung:

---

*) Will man das Auftreten von b und c in (9) vermeiden, so nimmt (9) mit Rücksicht auf die Identität $C_a + C_b = 2c\,P_c$ die complicirtere Form an:

(9ᵃ) $$(C_a + C_b)(C_a + C_c)\,R_a = 2\,P_b P_c \left(P_a^2 + S_a^2 - C_a - C_b - C_c\right).$$

$$(10)\quad \begin{cases} P \equiv 1 - \sin(\alpha + \beta) = 0, \quad \cos(\alpha + \beta) = 0, \\ A \equiv \sin\alpha - \cos\beta = 0, \quad B \equiv \sin\beta - \cos\alpha = 0, \\ S \equiv \sin 2\alpha - \sin 2\beta \equiv 0, \\ C \equiv \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 \equiv \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = 0. \end{cases}$$

Wir betrachten wieder α, β als zwei **beliebige** Winkel und suchen die numerischen Relationen (Syzygien) zwischen den linken Seiten der Gleichungen (10).

Zwischen den beiden ersten Ausdrücken, $P \equiv 1 - \sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ findet offenbar die eine Syzygie statt:

$$(11)\qquad P^2 + \cos^2(\alpha + \beta) \equiv 2P.$$

Wir lassen daher etwa $\cos(\alpha + \beta)$ beiseite, und fragen nach den Syzygien zwischen den fünf Ausdrücken

$$(12)\qquad P, A, B, S, C.$$

Vermöge der Functionaldeterminanten erkennt man, dafs zwischen irgend zwei der fünf Ausdrücke (12) eine Syzygie unmöglich ist. Andererseits zeigt die Elimination von α, β zwischen irgend drei der fünf Ausdrücke (12), dafs eine (nicht identisch verschwindende) Syzygie zwischen irgend drei der Ausdrücke (12) existirt, und zwar mit Rücksicht auf den vorangehenden Satz je nur eine einzige irreducible. Diese zehn Syzygien lassen sich alle mit den elementarsten Mitteln der Algebra angeben; wir führen hier nur die an, aus denen sich die übrigen leicht ableiten lassen:

$$(13)\quad \begin{cases} A^2 + B^2 = 2P, \\ (B^2 - A^2)^2(A^2 + B^2 - 4) + 4S^2(A^2 + B^2) = 0, \\ A^2B^2(A^2 + B^2 - 4) + C^2(A^2 + B^2) = 0, \\ [S^2B^4 + \{C^2 + B^2(B^2 - 2)\}^2](S^2 + 4C^2) = 4B^4S^2. \end{cases}$$

Trigonometrich lassen sich alle diese Syzygien leicht deuten, **sie umfassen den ganzen gegenseitigen Zusammenhang der Ausdrücke** (12).

Man kann aber noch einen Schritt weiter gehen und das Trigonometrische aus den letzten Untersuchungen ganz abstreifen. In den Gleichungen (10) bedeuten $\sin\alpha = x_1$, $\sin\beta = x_2$, $\cos\alpha = y_1$, $\cos\beta = y_2$ nichts anderes als vier Variable, die an die Relationen:

$$(14)\qquad P_1 \equiv x_1^2 + y_1^2 - 1 = 0, \quad P_2 \equiv x_2^2 + y_2^2 - 1 = 0$$

gebunden sind, während $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$ **definirt** werden durch:

$$(15)\quad \sin(\alpha \pm \beta) = x_1y_2 \pm x_2y_1, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = y_1y_2 \mp x_1x_2.$$

Combiniren wir dann P_1, P_2 mit irgend drei der Ausdrücke (12), so giebt es Wertsysteme (x_1, x_2, y_1, y_2), für die alle fünf Ausdrücke verschwinden, so dafs ihre Resultante identisch verschwindet.

Bildet man daher die (irreducible) Resultante von

$$(14^a) \qquad P_1 - x_1^2 - y_1^2 + 1, \quad P_2 - x_2^2 - y_2^2 + 1,$$

und von irgend drei der Ausdrücke:

$$(12^a) \qquad \begin{aligned} &P - (1 - x_1 y_2 - x_2 y_1), \\ &A - x_1 + y_2, \quad B - x_2 + y_1, \\ &S - 2x_1 y_1 - 2x_2 y_2, \quad C - y_1^2 - y_2^2 + 1, \end{aligned}$$

so erhält man die gesuchten Syzygien zwischen P_1, P_2 und irgend drei der Ausdrücke (12).

Auch hier sind die Rechnungen durchführbar*); wir teilen etwa folgende Syzygien mit:

$$(16) \qquad A^2 + B^2 - P_1 - P_2 = 2P,$$

$$\begin{aligned} &S^2(A^2 + B^2) + 4SAB(P_1 - P_2) \\ &+ (A^2 - B^2)^2[(A^2 + B^2 - 4) - 2(P_1 + P_2) \\ &+ (A^2 + B^2)(P_1 - P_2)^2] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &C^2(A^2 + B^2)(A^2 - B^2)^2 \\ &+ 2C[2(P_1 - P_2)(B^2 - A^2) \\ &- (B^2 + A^2)(B^2 - A^2)(B^2 P_1 - A^2 P_2)] \\ &+ A^2 B^2 (A^2 - B^2)^2 \{(A^2 + B^2 - 4) - 2(P_1 + P_2\} \\ &+ (A^2 B^2)(A^2 + B^2)(P_1 - P_2)^2 \\ &+ (A^2 + B^2)(A^2 P_2 - B^2 P_1)^2 + 4(P_1 - P_2)(A^2 P_2 - B^2 P_1) = 0. \end{aligned}$$

Man wird einwenden, dafs gerade auf diesem Wege — ganz ähnlich wie bei Kronecker's Arithmetisirung des Irrationalen — sehr einfache Beziehungen zwischen den so zweckmäfsig eingeführten trigonometrischen Irrationalitäten in eine grofse Reihe von schwer zu übersehenden numerischen Beziehungen zwischen ganzen Functionen „aufgelöst“ erscheinen.**) Abgesehen davon, dafs diese „schwere Übersehbarkeit“ oft nur eine scheinbare ist und nur durch das explicite Ausrechnen hervorgerufen wird, führen wir zu Gunsten unserer Betrachtungen an, dafs die Algebra systematische

*) Die entsprechende leichte Rechnung für die Relationen (5) bis (9) darf wohl dem Leser überlassen bleiben.

**) Ähnliche Erscheinungen treten auch bei den Modulargleichungen auf.

Methoden ausgebildet hat, um derartige Resultanten von ganzen Functionen zu bilden. Eine derartige Systematik fehlt aber der gewöhnlichen Trigonometrie.

Auf der nächst höheren Stufe würde man die Begriffe der Invarianten, der zugehörigen Syzygien und ihrer vollen Systeme einführen.

Über die Behandlung des Imaginären im Unterricht der höheren Schulen.

Von **Friedrich Pietzker** in Nordhausen.

Die neuen Lehrpläne der preufsischen Gymnasien nennen als einen Teil des Pensums der Unter-Prima die „imaginären Gröfsen", eine weitere Erläuterung fehlt. Man wird indessen annehmen dürfen, dafs damit eine systematische Einführung in das Wesen der ja den Schülern schon auf früheren Klassenstufen gelegentlich entgegengetretenen imaginären Gröfsen gemeint ist. Ich habe dieser Forderung wiederholt dadurch zu entsprechen gesucht, dafs ich — übrigens nicht in Unter-Prima, sondern in Ober-Prima — die Darstellung der complexen Gröfsen durch die Gaufs'sche Zahlenebene durchgenommen habe. Es ist mir auch, indem ich die Umkehrung der Richtung einer Linie als Multiplication mit dem Factor — 1 auffafste, gelungen, den Schülern die Drehung um einen rechten Winkel als Bild der Multiplication mit dem Factor $\sqrt{-1}$ plausibel zu machen, und indem ich die ganze Darstellung mit dem Moivre'schen Satz in Verbindung brachte, ihnen ein gewisses Verständnis dieser Darstellung zu vermitteln. Trotzdem hatte ich das Gefühl, dafs dies Verständnis mehr äufserlicher Art war, und zwar merkte ich, dafs die Schüler meist diese neue Auffassung des Imaginären nicht mit der Rolle in Zusammenhang zu bringen wufsten, die das Imaginäre bei seinem ersten Auftreten im Unterricht und auch vielfach weiterhin spielt, nämlich der des Gegensatzes zum Reellen. In dieser Eigenschaft deutet ja eine imaginäre Wurzel einer Gleichung geradezu die Unmöglichkeit der durch solche Gleichung zum algebraischen Ansatz gebrachten Aufgabe an. Ja man kann diese Seite des Imaginären auch nutzbar verwenden; z. B. zur Lösung von Maximum-Aufgaben, wenn diese auf Gleichungen zweiten Grades führen, und gewifs geschieht dies auch vielfach.

Da habe ich nun neuerdings eine andere Art der Behandlung des Imaginären in der Klasse versucht, deren Grundgedanke von Dühring herrührt. Zur Erläuterung dieses Gedankens will ich zu-

nächst auf Dühring's Stellung zu den negativen Gröfsen zurückgehen. Diesen will er eine eigentliche Berechtigung nicht zugestehen, weil der im Zeichen ausgedrückte Gegensatz eigentlich nicht Dingen, sondern nur Handlungen zukomme. Für ihn ist das Auftreten einer negativen Lösung auch nur ein Anzeichen dafür, dafs die eigentliche Aufgabe nicht lösbar sei. Fragt man z. B.: Nach wieviel Jahren wird eine 40 Jahre alte Person sechsmal so alt sein, als eine zehn Jahre alte, so pflegt man die Lösung, die man erhält, nämlich — 4, dahin zu deuten: Dieser Zustand bestand vor 4 Jahren. Dühring aber sagt: Auf die Frage giebt es keine Antwort, wohl aber zeigt die Lösung — 4 an, dafs auf die etwas veränderte Frage: „Vor wieviel Jahren war das genannte Altersverhältnis in Kraft?" die zutreffende Antwort „vor 4 Jahren" herausgekommen sein würde.

Entsprechend zeigt nun nach seiner Auffassung das Auftreten imaginärer Lösungen auch an, dafs zwar die eigentlich gestellte Aufgabe nicht lösbar ist, dafür aber bei einer gewissen Modification der Aufgabe reelle Lösungen auftreten, die sich von den imaginären Lösungen der eigentlich gestellten Aufgabe nur durch den Fortfall des Factors $\sqrt{-1}$ unterscheiden.

Ich habe diese Auffassung in einer meinerseits noch etwas veränderten Art, namentlich bei einem Anlafs in der Klasse durchgeführt, nämlich bei dem Auftreten imaginärer Werte der Coordinaten für die Schnittpunkte von Curven, also auch in Ober-Prima. Hier erscheint den Schülern die Angabe, dafs die Schnittpunkte eventuell imaginär werden, doch meist nur als eine gelehrte, der Systematik wegen gewählte Ausdrucksweise dafür, dafs es eben keine Schnittpunkte giebt; andererseits liegt ihnen die Frage nahe, warum denn diese Unmöglichkeit durch ganz bestimmte Werte der imaginären Coordinaten ihren Ausdruck findet; man sucht naturgemäfs nach einem diesem Sachverhalt zu Grunde liegenden, für den natürlichen Verstand fafsbaren Sinn. Nach Dühring's Auffassung bedeutet nun z. B. das Imaginärwerden der Schnittpunkte von Ellipsen weiter nichts, als dafs diesen Ellipsen Hyperbeln mit denselben Axen zugeordnet sind, die sich allemal dann in reellen Punkten schneiden, wenn die Schnittpunkte der Ellipsen imaginär werden, und umgekehrt. Noch instructiver ist das Beispiel des Schnitts der Geraden $y = fx + l$ mit der Parabel $y^2 = Px$. Verschiebt man die Gerade parallel mit sich selbst, ändert also bei constantem Wert von f die Gröfse l, so tritt der Fall ein, dafs die Parabel nicht mehr geschnitten wird. Dann schneidet aber die Gerade eine zweite Parabel von der Gleichung $\left(y - \frac{P}{f}\right)^2 = P\left(\frac{P}{2f^2} - x\right)$ in Punkten, deren Coordinaten sich von den Coordinaten des imaginären Schnittpunkts mit der ersten Parabel nur durch das Fehlen des Factors i bei den imaginären Bestandteilen unterscheiden. Beide Parabeln

sind congruent und haben eine gemeinschaftliche Tangente, die sich unter dem Winkel arctg$f$ gegen die Abscissenaxe neigt. Um auf die zweite Parabel zu kommen, mufs man die veränderliche Gröfse l eliminiren, und auf solche Eliminationsaufgabe kommt diese ganze Behandlung der einschlägigen Aufgaben immer hinaus. (Diese Bemerkung kennzeichnet meine eigene Behandlungsweise der Sache.)

Dühring, der bekanntlich neben seinen eigenen Arbeiten nichts anderes anerkennt, will die eben vorgetragene Auffassung als die einzig zulässige angesehen wissen und erklärt alle anderen Auffassungen vom Wesen des Imaginären für total falsch, verkehrt und sinnlos. Dafs ich auch abgesehen von dem Tone Dühring's, den ich mir natürlich nicht aneignen möchte, ihm hierbei sachlich nicht Recht gebe, brauche ich nach den soeben gegebenen Darlegungen wohl nicht erst auszuführen. In allen Auffassungen vom Wesen des Imaginären steckt etwas Subjectives, darum vertragen sie sich aber auch mit einander, es bringt eben jede eine besondere Seite des Sachverhalts zum Ausdruck.

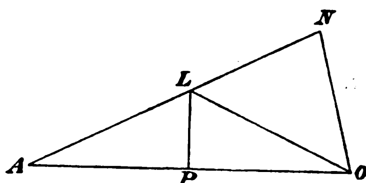
Für mich war die Durchnahme der Dühring'schen Auffassung ein Versuch, aber ein allem Anschein nach geglückter Versuch; die Schüler gingen ziemlich leicht darauf ein. Mafsgebend für mich war der Umstand, dafs man den Schülern, von denen doch nur ein ganz kleiner Bruchteil sich später speciell mathematischen Studien zuwendet, auf diesem Wege eine Auffassung vermittelt, bei der sie sich überhaupt etwas denken, bei allen anderen Behandlungsarten hat man das Gefühl, dafs sie das innere Verständnis der Schülermehrzahl übersteigen und also besser dem Hochschulunterricht vorbehalten bleiben. Die hier von mir versuchsweise in den Unterricht eingeführte Behandlung des Imaginären hat dann ferner noch den Vorzug, dafs der Charakter der imaginären Gröfsen als relativer Begriffe dabei sehr deutlich hervortritt; das tritt bei anderen Auffassungen leicht in den Hintergrund und wird, wie ich beobachtet zu haben glaube, bisweilen sogar völlig vergessen.

Über eine Stelle bei Gaufs, welche sich auf nichteuklidische Metrik bezieht.

Von **P. Mansion** in Gent (Belgien).

Nimmt man an, dafs die Winkelsumme eines Dreiecks weniger als zwei Rechte beträgt, so besteht zwischen der Hypotenuse a, der Kathete b und dem eingeschlossenen Winkel (a, b) eines rechtwinkligen Dreiecks bekanntlich die Gleichung

$$(1) \qquad \mathrm{Th}\, b = \mathrm{Th}\, a \cos(a, b).$$



Diese Annahme festhaltend, betrachten wir ein gleichschenkliges Dreieck AON, in welchem der Scheitelwinkel A höchstens dem Basiswinkel O bezw. N gleich und somit kleiner als 60^0 ist. Wir machen nun den Winkel AOL gleich dem Winkel A, wobei L auf AN liegt, und von dem Punkte L fällen wir das Lot LP auf AO. Setzen wir

$$AO = x, \quad AL = y, \quad LN = u = x - y,$$

dann besteht in dem rechtwinkligen Dreieck ALP nach (1) die Beziehung:

$$\text{Th}\,\tfrac{1}{2}x = \text{Th}\,y\cos A; \tag{2}$$

folglich nimmt y gleichzeitig mit x zu. Der gröfste Wert, den y annehmen kann, wenn der Winkel AOL nie den Winkel AON übersteigen soll, ist dann offenbar $y = X$, wobei X durch die Gleichung

$$\text{Th}\,\tfrac{1}{2}X = \text{Th}\,X \cdot \cos A, \tag{3}$$

die man auch in die Form

$$\text{Th}^2\,\tfrac{1}{2}X = 2\cos A - 1 \tag{4}$$

setzen kann, bestimmt ist. Die Gleichung (4) liefert einen reellen Wert für X, denn der Ausdruck $2\cos A - 1$ liegt zwischen 0 und 1, weil $\cos A > \frac{1}{2}$ ist zufolge unserer Annahme $A < 60^0$.

Aus der Gleichung (2) folgert man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\cos A} \cdot \frac{\text{Ch}^2 y}{\text{Ch}^2\frac{1}{2}x} \tag{5}$$

oder, nach einigen Umformungen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \text{Sh}^2 y \sin^2 A}{2\cos A}. \tag{6}$$

Somit wächst $\frac{dy}{dx}$ zugleich mit y, und folglich auch zugleich mit x.

Ferner hat man:

$$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{2\cos A} \cdot \frac{\text{Ch}^2 y}{\text{Ch}^2\frac{1}{2}x}. \tag{7}$$

Für $x = 0$ findet man $y = 0$ und

$$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{1}{2\cos A};$$

da $A < 60^0$, so ist dieser Wert von $\frac{du}{dx}$ positiv. Für $x = X$ wird auch $y = X$, und somit wird die Ableitung von u

$$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{1}{2\cos A} \cdot \frac{\mathrm{Ch}^2 X}{\mathrm{Ch}^2 \frac{1}{2} X} = 1 - \frac{\mathrm{Th}\, X}{2\,\mathrm{Th}\frac{1}{2} X} \cdot \frac{\mathrm{Ch}^2 X}{\mathrm{Ch}^2 \frac{1}{2} X} = 1 - \mathrm{Ch}\, X,$$

d. h. negativ.

Also, wenn x von 0 bis X wächst, so nimmt u zuerst zu, dann ab; mit anderen Worten, wenn x von X bis 0 abnimmt, so nimmt u zuerst zu, nachher ab.

Vorstehende Bemerkung hat Gaufs in seiner Besprechung der Theorie der Parallelen von Carl Reinhard Müller gemacht. (Göttingische gelehrte Anzeigen vom 28. October 1822, Gaufs' Werke IV, S. 368—370.) Müller hatte geglaubt beweisen zu können, dafs $u = LN$ mit $x = AN$ gleichzeitig abnimmt, indem er nachwies, dafs alle anderen Hypothesen über u, die er auf vier mögliche Fälle zurückführte, unmöglich sind. Gaufs bemerkt aber hierzu: „In dieser Aufzählung ist der mögliche Fall übergangen, dafs die Stücke anfangs fortschreitend zu- und dann fortschreitend abnähmen, und nach Rec. eigener Überzeugung (deren tiefer liegende Gründe hier aber nicht angeführt werden können) wäre dessen Erledigung gerade die Hauptsache und die eigentliche Auflösung des Gordischen Knotens.“

Um im Jahre 1822 eine so bestimmte Aussage über das Verhalten von u machen zu können, mufste Gaufs offenbar die Grundlagen der nichteuklidischen Metrik besitzen, z. B. die Formel (1), welche die ganze Metrik einschliefst.

Die obigen Bemerkungen hatte ich Herrn P. Stäckel mitgeteilt, der mit der Bearbeitung des auf die nichteuklidische Geometrie bezüglichen Teiles in Gaufs' Nachlafs beauftragt ist, und er hat mir hierauf folgendes geantwortet: „Ich bin ganz Ihrer Ansicht, dafs die von Ihnen hervorgehobene Stelle in der Besprechung von 1822 beweist, dafs Gaufs danach im Besitze der nichteuklidischen Metrik war. Allein ich möchte mir erlauben, Sie darauf aufmerksam zu machen, dafs eine Äufserung von Gaufs vorliegt, die der Zeit nach noch früher ist: ich meine den Brief an Gerling aus dem Februar 1819, von dem Sie ein Bruchstück in dem Buche über die Parallellinien von Engel und mir (Leipzig 1895) S. 246 abgedruckt finden. Hier heifst es: „dafs ich alle Aufgaben vollständig lösen kann, sobald die Constante C gegeben ist.“ Ich glaube Ihnen auch mitteilen zu dürfen, dafs in Gaufs' Nachlafs Briefe vorhanden sind, die es erlauben, mit Sicherheit festzustellen, dafs dieser bereits 1816 im Besitze der nichteuklidischen Trigonometrie gewesen ist.“

Über ein mathematisches Vocabularium in deutscher und französischer Sprache.

Von **Felix Müller** in Loschwitz.

Das im Manuscript vorgelegte Vocabularium ist aus der langjährigen Mitwirkung des Verf. an der Herausgabe des „Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik" entstanden. Jeder der beiden Teile enthält ein alphabetisches Verzeichnis von mehr als zehntausend Kunstausdrücken aus der reinen und angewandten Mathematik, unter Beifügung der einschlägigen Disciplinen und kurzer historischer Notizen über den Ursprung des mathematischen Begriffes. Der erste Teil bringt den französischen Text mit der deutschen Übersetzung des Kunstausdruckes; der zweite den deutschen Text mit dem französischen Kunstwort. Das Buch ist dem internationalen Mathematikercongreſs zu Paris im Jahre 1900 gewidmet, der u. a. eine Besprechung der mathematischen Nomenclatur auf sein Programm gesetzt hat.

Erster Abschnitt.

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie.

1. An der Schwelle der Wahrscheinlichkeitstheorie steht eine Reihe von Begriffen, welche der Mathematik fremd sind, und über deren Deutung die Discussion nicht abgeschlossen ist, ja heute lebhafter geführt wird denn je. Und doch ist, ehe die Rechnung einsetzt, eine Einigung über dieselben erforderlich, wenn anders den Resultaten eine bestimmte Bedeutung zukommen soll. Denn auf dem Boden jener Begriffe ruht das oberste Princip der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das ist die Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs; von der Fassung jener Begriffe hängen aber auch die Grenzen des Anwendungsgebietes unserer in vielfacher Beziehung merkwürdigen Theorie ab.

Sehen wir zu, was sich uns aus einer Analyse der einfachen Probleme, Würfelspiele betreffend, ergiebt, von welchen die Wahrscheinlichkeitsrechnung ihren Ausgang genommen hat, und die sich an die Namen Cardano[1]), Galilei[1]), Pascal[1]) und Fermat[1]) knüpfen, von welchen die beiden letztgenannten als die eigentlichen Begründer der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie gelten.

Einem erwarteten oder vermuteten Thatbestand liegen zwei Gattungen von Bedingungen zu Grunde. Die einen, von einem Fall zum anderen unverändert bleibend und dargestellt durch die verschieden bezeichneten Seiten eines Würfels oder deren Combinationen bei Benützung mehrerer Würfel, weisen eine deutliche Gliederung auf und lassen auf Grund derselben eine ziffernmäfsige Darstellung zu; die Gliederung besteht darin, dafs sich Fälle unterscheiden lassen, von welchen jeder, aber jedesmal nur einer verwirklicht werden kann; diese wieder scheiden sich in solche, durch deren Verwirklichung der erwartete oder vermutete Thatbestand erfüllt wird, und in solche, durch welche er nicht erfüllt wird.

Diesen constanten Bedingungen stehen andere gegenüber, welche mit der Verwirklichung des einen Falles verknüpft sind und sich unserer Einsicht in der Weise entziehen, dafs wir sie wohl benennen können, aber aufser Stande sind anzugeben, welchem der Fälle sie Realität verschaffen. Das bezeichnende Merkmal dieser zweiten Gattung von Bedingungen liegt in ihrer Veränderlichkeit von einem Falle

zum anderen und darin, daſs unserer Erkenntnis gegenüber ein Zusammenhang zwischen ihnen nicht besteht.

Über das Verhältnis der variablen Bedingungen zu den constanten wurde von Anfang an, wenn dies auch nicht ausdrücklich bemerkt worden ist, eine Annahme gemacht, dahin gehend, daſs sich der Complex der variablen Bedingungen zu den einzelnen Fällen, in welche der Complex der constanten Bedingungen aufgelöst wird, ganz gleichartig verhalte, sodaſs die Verwirklichung eines Falles nicht leichter erscheint als die irgend eines anderen.

Wir gehen nun daran, die Begriffe, welche aus dieser Analyse sich abstrahiren lassen, zu besprechen unter Berücksichtigung der Kritik, welche an ihnen geübt worden ist.

2. Thatbestände von der oben beschriebenen Art, welche aus den vorhandenen Bedingungen hervorgehen können, aber nicht hervorgehen müssen — sie bilden das Object der Wahrscheinlichkeitstheorie — werden als ungewisse Ereignisse bezeichnet im Gegensatze zu solchen, welche aus einem Complex gegebener Bedingungen mit Notwendigkeit hervorgehen.

Gegen die Bezeichnung „Ereignis" wendet sich Stumpf[1]) mit Recht, weil sie zu eng ist; man denkt im Sinne des Sprachgebrauchs dabei an ein Geschehen, während doch jede Urteilsmaterie, der gegenüber wir uns in einem dem obigen analogen Stande des Wissens und Nichtwissens befinden, den Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Betrachtungen bilden kann. Wenn z. B. von der Wahrscheinlichkeit gesprochen wird, der Inhalt einer vorliegenden Urne habe diese oder jene Zusammensetzung, so handelt es sich nicht um ein Geschehen, sondern um einen concreten Thatbestand; und wenn um die Wahrscheinlichkeit für die Wahrheit eines von mehreren Gesetzen gefragt wird, so liegt dieser Frage auch kein Geschehen, sondern sogar ein abstracter Thatbestand zu Grunde.

So richtig dieser Hinweis auf die Einschränkung ist, welche in der Wahl des Wortes Ereignis liegt, so erblicken wir in der Beibehaltung dieses von der mathematischen Litteratur seit jeher angewandten Terminus keine Gefahr für eine richtige Auffassung.

3. Die Fälle, in welche der Complex constanter Bedingungen sich auflöst, werden als mögliche Fälle, und insofern sie der Voraussetzung genügen, daſs die Verwirklichung des einen ebenso leicht zu erwarten ist als die irgend eines anderen, als gleichmögliche Fälle bezeichnet. Diejenigen darunter, mit deren Verwirklichung das erwartete oder vermutete Ereignis als eingetreten betrachtet wird, heiſsen insbesondere günstige Fälle, die anderen mitunter ungünstige oder dem Ereignis widrige Fälle. Diese Unterscheidung tritt gleichzeitig mit den ersten litterarischen Äuſserungen über Dinge der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf; besondere Benennungen scheint Jakob Bernoulli[1]) zuerst eingeführt zu haben; er nennt die günstigen Fälle

casus fertiles seu foecundi, die anderen casus steriles. Für gleichmögliche Fälle wird in neuerer Zeit, so von v. Kries[1]), auch die Bezeichnung „gleichberechtigte Annahmen" gebraucht. Derselben wäre der Vorzug zu geben, wenn die erstere nicht längst eingebürgert wäre; denn Möglichkeit ist ein absoluter Begriff, und von gleich- und ungleichmöglichen Annahmen zu sprechen im Grunde genommen nicht logisch.

Man hat der Gesamtheit der möglichen Fälle mit Einschlufs ihrer Gliederung in günstige und ungünstige in Bezug auf das in Betracht stehende Ereignis den Namen der Ursachen desselben beigelegt. Auch diese Namengebung verdient die abweisende Kritik, welche ihr durch Stumpf[1]) zuteil wird. Insofern man nämlich unter den Ursachen eines Ereignisses oder Erfolges alles das versteht, was vermöge des Causalitätsprincips denselben herbeiführt, ist die obige Bezeichnung nicht, wenigstens nicht immer zutreffend. Wohl gehören die Gestalt und Gröfse eines Würfels, die Verteilung seiner Masse, die verschiedene Bezeichnung der Seiten mit zu den Ursachen eines mit ihm erzielten Erfolges, machen sie aber nicht vollständig aus; sie bilden nur in der Gesamtheit der Ursachen das Bleibende. Stumpf selbst gebraucht dafür die Bezeichnung Chancen, wenn er auch hierunter in anderem Sinne wieder nur die günstigen Fälle verstanden wissen will; indessen wird dieses Wort von anderen Autoren wieder anders gebraucht, worauf wir weiter unten (Art. 5) noch zurückkommen.

Für den Complex der variablen Bedingungen, welche erst dann actuell werden, sobald es zur Realisirung eines Erfolges oder eines Thatbestandes kommt, gebraucht man den Namen Zufall (hasard); mit Rücksicht hierauf nennt man denn auch Ereignisse und Thatbestände, die wir an früherer Stelle (Art. 2) als ungewisse bezeichnet haben, auch vom Zufall abhängige oder zufällige Ereignisse. Wieder haben wir es mit einem Begriff zu thun, mit welchem im sprachlichen Verkehr die verschiedenartigsten Vorstellungen verbunden werden. Gegen die Gesetze des Denkens wird ein „zufälliges Geschehen" mitunter als ein ursachloses, als ein Geschehen bezeichnet, für welches die zureichenden Gründe nicht vorhanden waren; ein andermal will man darunter den Ausdruck für ein Geständnis unseres Geistes erblicken, die bedingenden Ursachen eines Ereignisses nicht oder nicht vollständig zu kennen; ein drittes Mal wieder soll der Zufall den scheinbaren Mangel jeglicher Ordnung im Geschehen bezeichnen gegenüber regelmäfsigen, durch bekannte Gesetze geordneten Vorgängen (s. Laplace[14])) u. s. w. Eine kritische Beleuchtung all der verschiedenen Auffassungen des Zufalls hat Windelband[1]) gegeben.

Wir werden auf diese Begriffe, zumal auf den fundamentalen der gleichmöglichen Fälle, noch zurückzukommen haben. Vorher

wollen wir uns mit dem grundlegenden Begriff unserer Theorie, dem der Wahrscheinlichkeit, beschäftigen.

4. Zu Beginn des Essai philosophique definirt Laplace[14]) die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als das Verhältnis der Anzahl der ihm günstigen Fälle zur Anzahl aller gleichmöglichen Fälle, das ist solcher Fälle, über deren Dasein wir in gleicher Unwissenheit sind.

Genau gesprochen, bezeichnet Laplace den so gebildeten Bruch als Mafs der Wahrscheinlichkeit, also als Mafs für ein Abstractes. Zum Unterschiede von diesem wird der genannte Bruch vielfach auch mit dem Namen mathematische Wahrscheinlichkeit belegt.

Das wesentlichste Moment in dieser Definition liegt in der Erklärung der gleichmöglichen Fälle; aufser derjenigen, welche im Contexte der Definition steht, führt Laplace kurz vorher noch die an, man „habe keinen Grund zu glauben, einer der Fälle werde eher eintreffen als die anderen“.

In der Auffassung dieses Merkmals der Fälle, von welcher die innere Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbruches ganz und gar abhängt und die der Kritik die meisten Angriffspunkte bietet, stehen gegenwärtig zwei Standpunkte einander schroff gegenüber: Auf dem einen wird über die Fälle aufser ihrer Unterscheidung oder Disjunction nur mehr gleiches Nichtwissen, — „und da Unwissenheit nur dann ihrem Mafse nach gleich gesetzt werden kann, wenn wir absolut Nichts darüber wissen, welcher von den unterscheidbaren Fällen eintreten wird“, — absolutes Nichtwissen vorausgesetzt; von dem anderen Standpunkte aus wird verlangt, „die Aufstellung der gleichmöglichen Fälle müsse eine in zwingender Weise und ohne jede Willkür sich ergebende sein“, sie müsse also dort, wo es sich um reale Vorgänge handelt, auf Grund eines objectiven Wissens geschehen.

Als Hauptvertreter der ersteren Richtung kann Stumpf[1]) genannt werden, die zweite knüpft sich an den Namen v. Kries[1])*). Man kann beide nicht besser kennzeichnen, als wenn man das zu Grunde liegende Princip im ersten Falle als das des mangelnden, im zweiten Falle als das des zwingenden Grundes benennt.

Um den Unterschied beider Auffassungen klar hervorzuheben, wollen wir charakteristische einfache Beispiele anführen.

Wenn ich von einer Urne blofs weifs, sie enthalte nur weifse und schwarze Kugeln, so befinde ich mich bezüglich der beiden Möglichkeiten „Weifs“ und „Schwarz“ im Zustande des absoluten Nichtwissens und habe daher die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weifsen Kugel mit $\frac{1}{2}$ anzusetzen. So im Sinne der ersten Auffassung;

---

*) Eine kürzlich erschienene Schrift Goldschmidt's[1]) bekämpft die Richtung Stumpf's und verteidigt die von v. Kries eingeschlagene.

nach der zweiten aber soll dieser Ansatz nur zulässig sein, wenn ich positiv weifs, die Urne enthalte die weifsen und schwarzen Kugeln in gleicher Anzahl.

Liegt ein von sechs ebenen Flächen begrenzter Körper vor, von dem ich nur weifs, die sechs Seiten seien in irgendwelcher Anordnung mit den Nummern 1 bis 6 bezeichnet, so habe ich, dem Principe des mangelnden Grundes folgend, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen einer bestimmten Nummer (wobei unter dem Eintreffen, damit es unzweideutig bestimmt sei, das Aufliegen der betreffenden Seite auf der Unterlagsfläche verstanden sein möge) mit $\frac{1}{6}$ zu bewerten. Nach dem Princip des zwingenden Grundes ist diese Bewertung nur dann eine begründete, wenn gewisse physische Bedingungen erfüllt sind, deren einfachste Form darin bestünde, dafs der Körper die Gestalt eines Würfels und seine Masse eine derartige Verteilung aufzuweisen hätte, dafs der Schwerpunkt mit dem geometrischen Mittelpunkt zusammenfällt; denn bei solchen Voraussetzungen bin ich genötigt, das Auffallen des Würfels auf die eine Seitenfläche für ebenso leicht möglich zu halten wie bezüglich jeder anderen.

Es mufs hervorgehoben werden, dafs auch bei Benützung des zweiten Princips in betreff gewisser Umstände gleiches, also absolutes Nichtwissen bezüglich aller möglichen Fälle herrschen mufs; im ersten Beispiel besteht dasselbe darin, dafs ich bei jeder Ziehung in völliger Unkenntnis über die Lagerung der Kugeln in der Urne mich befinde; im zweiten Falle bezieht sich das Nichtwissen auf den Effect der gesamten Bewegungen, welche dem Würfel beim Aufgreifen, Rütteln in einem Becher, beim Ausschleudern aus demselben erteilt werden und von einer Ruhelage zur anderen verlaufen.

Es unterliegt keinem Zweifel, dafs beide Principe logisch berechtigt sind. Wenn Stumpf[1]) sagt, dafs seine Deutung der gleichmöglichen Fälle mit der oben citirten Laplace'schen Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs im Einklange stehe, so ist auch dies zuzugeben, obwohl gesagt werden mufs, dafs die Interpretation, welche Laplace selbst seiner Definition in der Théorie analytique des probabilités[13]) gegeben hat, sich eher der zweiten Auffassung anpafst; zur Begründung dessen sei nur auf chap. VII: „De l'influence des inégalités inconnues qui peuvent exister entre des chances que l'on suppose parfaitement égales" hingewiesen. Übrigens nähert sich Stumpf dieser zweiten Auffassung, wenn er wiederholt betont, alles zur Verfügung stehende Wissen sei bei der Bildung der Wahrscheinlichkeit zu verwerten; dazu kann bemerkt werden, dafs dort, wo ein wirkliches Interesse mit der Aufstellung einer numerischen Wahrscheinlichkeit verbunden ist, wohl kaum jemals ein so unvollkommenes Wissen vorhanden sein werde wie in den zwei zur Illustration angeführten Beispielen.

Auf der anderen Seite wird aber auch selten ein so sicheres objectives Wissen vorhanden sein, wie es v. Kries[1]) verlangt. Um an ein früheres Beispiel anzuknüpfen, kann man mit sehr grofser Sicherheit aussagen, dafs bei einem Würfel, wie solche bei Spielen verwendet werden, und sei er noch so sorgfältig gearbeitet, Abweichungen von der geometrischen Form und von der Homogeneität der Masse platzgreifen werden derart, dafs nicht alle Seiten gleich leicht zu unterst fallen. Bei der Unmöglichkeit jedoch, die wirklich vorliegenden physischen Verhältnisse in dem Sinne in Rechnung zu bringen, um für jede Seite den Grad der Leichtigkeit zu bestimmen, und bei der völligen Unkenntnis darüber, welche Seiten im günstigen, welche im ungünstigen Sinne beeinflufst sind, bleibt nichts anderes übrig, als wieder das Princip des mangelnden Grundes heranzuziehen und für jede Seite die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ anzunehmen.

Diese Schlufsweise ist aber doch wesentlich verschieden von derjenigen, welche oben auf den „sechsflächigen Körper“ angewandt worden ist. Wir befinden uns hier in derjenigen Lage, welche immer dann eintritt, wenn es sich um die concrete Darstellung idealer Verhältnisse handelt. In einem Dreieck, das wir mit sichtbaren „Linien“ auf dem Papier zeichnen, werden die Winkel, soweit sie überhaupt bestimmt sind, nicht genau die Summe 180^0 geben; bei einem Mefsinstrument werden die einzelnen Teile nicht in aller Schärfe jene geometrischen Beziehungen erfüllen, welche die Theorie des Instruments verlangt; aus diesem Grunde giebt es auch nicht die wahren Werte der Gröfsen, welche wir damit messen. Man kann sagen, der wahre Wert einer wohldefinirten Gröfse bleibe immer unbekannt, ebenso wie der wahre Grad der Leichtigkeit für jede einzelne Seite eines bestimmten Würfels: dort schaffen wir uns Ersatz dafür durch Messung, hier durch eine logisch begründete Annahme. Der angenommene Wert $\frac{1}{6}$ wird vermutlich von dem aus den thatsächlichen Verhältnissen resultirenden Wert nur wenig abweichen, bei dem „sechsflächigen Körper“ aber kann er sich beträchtlich davon unterscheiden.

5. In deutlich ausgesprochener Weise stellt Poisson[8]) sich auf den Standpunkt, welcher hier als der zweite genannt worden ist. Er unterscheidet zwischen der abstracten Wahrscheinlichkeit oder der Chance eines einzelnen Falles, darunter den aus den wirklichen, physischen Verhältnissen resultirenden Grad der Leichtigkeit seiner Verwirklichung verstehend, und zwischen der subjectiven Wahrscheinlichkeit oder „probabilité“, die sich auf persönliche Informationen stützt. Seine Definition für den Wahrscheinlichkeitsbegriff lautet dahin, das Mafs der Wahrscheinlichkeit eines ungewissen Ereignisses sei das Verhältnis der Anzahl der diesem Ereignis günstigen Fälle zu der Anzahl aller möglichen, vorausgesetzt, dafs sie alle gleich möglich sind oder dafs sie alle dieselbe abstracte Wahrscheinlichkeit haben.

Diese Definition hat das logische Gebrechen, dafs sie das zu erklärende Wort bei der Erklärung selbst heranzieht; irrtümlich hat Stumpf[1]) infolge einer Ungenauigkeit in der Übersetzung des Essai philosophique durch Tönnies[14]) diesen Mangel auch der Laplace'schen Definition vorgehalten, dies aber in seiner unter[2]) genannten Arbeit berichtigt.

Eine ähnliche Unterscheidung zweier Vorstellungen hat v. Kries[1]) vorgenommen und als sehr wichtig für die Wahrscheinlichkeitstheorie bezeichnet. Er versteht unter „Chance“ oder präciser unter „objectiver Chance“ eine Wahrscheinlichkeit von allgemeiner Geltung, eine solche also, welche ein für allemal und für jedermann feststeht, wie etwa die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$, mit zwei Würfeln die Summe 12 zu werfen; dabei ist es gleichgiltig, ob man sich an das Princip des mangelnden oder an jenes des zwingenden Grundes bezüglich der einzelnen Würfelseiten hält. Solchen Wahrscheinlichkeiten stellt er diejenigen gegenüber, welche nur von individueller Bedeutung sind und durch Vermehrung der Kenntnisse sich verändern können.

6. An den von v. Kries formulirten Begriff der Chance knüpfen sich naturgemäfs wichtige Betrachtungen an, welche mit der Stellung der Wahrscheinlichkeitstheorie zur Logik in engen Beziehungen stehen. Man kann nämlich von einer rein formalen Gleichmöglichkeit, Gleichberechtigung oder Gleichwertigkeit der Einzelfälle, welche einem Wahrscheinlichkeitsurteil zu Grunde gelegt werden, sprechen, die auf combinatorischen Erwägungen allein beruht und von physischen Voraussetzungen ganz unabhängig ist. Von dieser Seite betrachtet, ruht die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf dem disjunctiven Urteil und bildet ein mathematisch formulirtes Capitel der Logik. Diese Beziehung, von F. A. Lange zuerst erkannt, ist namentlich durch Sigwart[1]) klargelegt worden; er leitet sie mit folgenden Worten ein: „Wo die Entscheidung einer Frage nicht möglich ist, aber das Gesuchte wenigstens auf eine endliche Anzahl von Möglichkeiten vermittelst eines disjunctiven Urteils eingeschränkt werden kann, dessen Glieder insofern gleichwertig sind, als sie für unsere Kenntnis gleiche Specialisirungen eines Allgemeinen oder gleiche Teile eines Gesamtumfangs darstellen, da beginnt die Schätzung der Wahrscheinlichkeit der einzelnen Möglichkeiten; ihr Mafs giebt ein Einheitsbruch, dessen Nenner die Anzahl der gleichwertigen Disjunctionsglieder ist.“

In der Aufstellung der einem vorgelegten Problem entsprechenden Disjunction liegt in der That eine der wesentlichen und eigentümlichen Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und in der Beurteilung dessen, ob die Disjunction eine vollständige sei, das heifst, ob die Glieder derselben gleichberechtigt seien in dem oben ausgesprochenen Sinne, eine ihrer gröfsten Schwierigkeiten, welche Übung in scharfem Urteilen erfordert. Erst wenn die Disjunction vollzogen ist, tritt die Mathematik in ihre Rechte; sie hat die sämtlichen Dis-

junctionsglieder sowie diejenigen, welche einem vermuteten Thatbestand günstig sind, zu zählen, um daraus den Wahrscheinlichkeitsbruch zu bilden.

Es ist bemerkenswert, dafs gerade die ersten Fragen in Dingen der Wahrscheinlichkeit mit der Beurteilung dieser formalen oder logischen Gleichwertigkeit der Fälle zusammenhingen. Wenn Galilei[1]) seinem Freunde die richtige Erklärung dafür gab, warum er bei dem Knöchelspiel (Würfeln mit 3 Würfeln) die Summe 10 häufiger beobachte als 9, und ebenso 11 öfter als 12, so lag der Grund darin, dafs er die vollständige Disjunction erkannte, während der Freund seine Schlüsse auf einer unvollständigen aufbaute; dieser zählte für die Summen 9, 10, 11, 12 gleich viel günstige Fälle, nämlich

1, 2, 6	1, 3, 6	1, 4, 6	1, 5, 6
1, 3, 5	1, 4, 5	1, 5, 5	2, 4, 6
1, 4, 4	2, 2, 6	2, 3, 6	2, 5, 5
2, 2, 5	2, 3, 5	2, 4, 5	3, 3, 6
2, 3, 4	2, 4, 4	3, 3, 5	3, 4, 5
3, 3, 3	3, 3, 4	3, 4, 4	4, 4, 4;

Galilei aber erkannte, dafs bei Individualisirung der Würfel ein Glied wie 1, 4, 4 sich in 3, und ein Glied wie 1, 2, 6 sich weiter in 6 Glieder auflöst, während beispielsweise 3, 3, 3 eine weitere Auflösung nicht zuläfst; erst dann hat man es mit gleichwertigen Möglichkeiten zu thun, und ihre Anzahlen sind nicht unter einander gleich, sondern beziehungsweise

25, 27, 27, 25.

Bemerkenswerte Beispiele unvollständiger Disjunction oder unrichtiger Aufstellung gleich möglicher Fälle bieten Leibniz[1]) und D'Alembert[1]), welch' letzterer zu Fragen der Wahrscheinlichkeitstheorie überhaupt eine eigentümliche Stellung eingenommen hat. Leibniz zählt für die Summen 12 und 11 bei zwei Würfeln je einen, für die Summe 7 drei Fälle. D'Alembert's irrtümliche Analyse des Problems: Die Wahrscheinlichkeit zu finden, bei zweimaligem Aufwerfen einer Münze einmal Wappen zu werfen, ist in die meisten späteren Schriften als Beispiel unrichtiger Auffassung aufgenommen worden; auch Laplace[14]) hat an derselben Kritik geübt. D'Alembert unterscheidet drei Fälle: W, W; S, W; S, S*) und setzt, dieselben als gleichberechtigt haltend, die verlangte Wahrscheinlichkeit mit $\frac{2}{3}$ an, während sie sich bei richtiger Disjunction in die vier gleichberechtigten Fälle W, W; W, S; S, W; S, S mit $\frac{3}{4}$ ergiebt.

In den Lehrbüchern wird von gleichmöglichen Fällen in der Regel nur in diesem formalen Sinne gesprochen. Dafs dabei Irrtümer unterlaufen können, dafür geben zwei sehr beachtenswerte Werke der

*) W = Wappen, S = Schrift.

jüngsten Zeit ein merkwürdiges Beispiel, insofern sie ein und dasselbe Problem aus verschiedenen Gesichtspunkten behandeln und beidemale zu falschen Schlüssen gelangen. Bertrand[3]) stellt gleich zu Beginn seines „Calcul des probabilités“ die Aufgabe: Es liegen drei äufserlich völlig gleiche Kästchen A, B, C mit je zwei Schubladen vor; A enthält in jeder Lade eine Goldmünze, B in jeder eine Silbermünze, C in der einen eine Goldmünze, in der andern eine Silbermünze. Auf die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, in einem beliebig ausgewählten Kästchen eine Gold- und eine Silbermünze zu treffen, erfolgt die richtige Antwort $\frac{1}{3}$; denn die drei gleichberechtigten Disjunctionsglieder sind hier durch die drei Kästchen dargestellt, und nur eines davon ist dem erwarteten Ereignis günstig. — Nun wird der Fall abgeändert: Man hat in dem gewählten Kästchen eine Lade geöffnet und eine Goldmünze darin erblickt; wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die andere Lade eine Silbermünze enthalte? Die einzig richtige Antwort ist $\frac{1}{2}$; denn jetzt liegen nur zwei gleichberechtigte Disjunctionsglieder vor, repräsentirt durch die Kästchen A, C, und eines davon ist günstig. Bertrand giebt diese Lösung zunächst auch, verwirft sie aber gleich als falsch, nachdem er die merkwürdige Frage gestellt: Wie sollte das Öffnen einer Lade genügen, um die Wahrscheinlichkeit zu ändern und von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{2}$ zu heben? Nicht das Öffnen der Lade, wohl aber die Wahrnehmung ihres Inhaltes übt Einflufs, weil es unser Wissen vermehrt und die Zahl der Disjunctionsglieder vermindert. Bertrand versucht die Ungleichwertigkeit der beiden Fälle A und C darzuthun und construirt zu diesem Zwecke einen ähnlichen Sachverhalt, indem er von jeder Gattung hundert, im Ganzen also dreihundert Kästchen annimmt; damit aber, dafs er nun von jedem der dreihundert Kästchen eine Lade geöffnet denkt, während vorhin nur eine geöffnet ward, wird die Analogie gestört und sind die aus ihr gezogenen Schlüsse hinfällig. — Poincaré[1]) nimmt das Problem in der zweiten Fassung wieder auf und ist gleichfalls bemüht, die Ungleichwertigkeit der Fälle A und C darzuthun; wenn ihm dies scheinbar gelingt, so liegt es daran, dafs er die beobachtete, also sichere Thatsache nicht beachtet.

7. In seiner eingehenden Kritik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs kommt Stumpf[1]) auch auf das Zeitmoment zu sprechen, und im Gegensatz zu Lotze[1]), der den Wahrscheinlichkeitsbegriff nur auf künftige Ereignisse bezogen wissen will, vertritt er den gewifs ganz correcten Standpunkt, dafs die Wahrscheinlichkeit eine von der Zeit unabhängige Function der Urteilsmaterie sei. In den mathematischen Schriften über Wahrscheinlichkeitstheorie ist diese Auffassung thatsächlich auch immer geübt worden, und Poisson[8]) hat ihr in den ersten Zeilen seiner „Recherches sur la probabilité . . .“ bestimmten Ausdruck verliehen. Wenn nach der Wahrscheinlichkeit gefragt wird, mit einem Würfel 4 zu werfen, so ist es für die Er-

wartung völlig gleichgiltig, ob der Wurf erst nach kürzerer oder längerer Zeit gemacht werden soll oder ob er schon und wann immer gemacht worden ist; in letzterem Falle ist es auch gleichgiltig, ob wir den Erfolg constatiren können oder nicht.

Hiermit darf jedoch nicht verwechselt werden der Umstand, dafs es mitunter nötig ist, bei Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen auf eine bestimmte Aufeinanderfolge, also Zeitfolge der Ereignisse zu achten; so spricht man von einem beobachteten, a priori ungewissen, Ereignis, das man unwillkürlich in die Vergangenheit verlegt, und von einem damit zusammenhängenden erwarteten Ereignis, das man sich als ein künftiges vorstellt; aber nicht allein, dafs es auf die zwischen den beiden wirklich verflossene Zeit nicht ankommt, darf man beide Vorgänge auch in die Vergangenheit oder beide in die Zukunft verlegen, die Schlüsse bleiben immer dieselben.

Auf Grund einer Kritik, aus welcher wir einzelne Momente schon in den Art. 2, 4 angeführt haben, kommt Stumpf[1]) zu der folgenden Definition: „Jede beliebige Urteilsmaterie nennen wir $\frac{n}{N}$ wahrscheinlich, wenn wir sie auffassen können als eines von n Gliedern (günstigen Fällen) innerhalb einer Gesamtzahl von N Gliedern (möglichen Fällen), von denen wir wissen, dafs eines und nur eines wahr ist, dagegen schlechterdings nicht wissen welches.“

Durch die Wahl der Bezeichnung „Urteilsmaterie“ will er jede Einschränkung des Anwendungsgebietes der Wahrscheinlichkeitsrechnung hintanhalten, beziehungsweise alle bereits gemachten Anwendungen, die sich ja nicht immer auf Ereignisse bezogen haben, umfassen.

8. Mit dem Worte Wahrscheinlichkeit verbindet der gemeine Verstand die Vorstellung des Gegensatzes einer Notwendigkeit und erblickt in dem numerischen Wert ein Mafs der Erwartung. Laplace[13, 14]) hat es gar nicht für notwendig erachtet, auf die Bedeutung des Wortes näher einzugehen. Poisson[8]) stellt als Definition an die Spitze, die Wahrscheinlichkeit eines ungewissen Ereignisses sei der Grund, welchen wir haben, zu glauben, dafs es stattfinden wird oder stattgefunden hat. v. Kries[1]) erblickt die charakteristische Eigentümlichkeit jeder Wahrscheinlichkeitsaussage darin, dafs sie die mehr oder minder grofse Berechtigung einer Erwartung angiebt, dafs aber jedesmal auch die Nichterfüllung derselben als möglich erscheint.

Stumpf[1]) modificirt die letztere Erklärung dahin, dafs er von einem Mafs unserer vernünftigen Erwartung gesprochen wissen will; denn auch seelische Affecte sind häufig mit bestimmend für die Stärke unserer Erwartung. Um die Beziehung auf die Zukunft, welche in dem Worte „Erwartung“ erblickt werden kann, zu verwischen, schlägt er das Wort „Vermutung“ vor.

Wenn wir an die verschiedenen Deutungen der Gleichmöglichkeit zurückdenken, so ist wohl die Frage berechtigt, ob die vernünftige Erwartung auch immer eine gleich begründete sei. Das Maſs der Begründung wird von dem Umfang positiver Kenntnisse abhängen. Wenn wir von einer Urne nur wissen, sie enthalte bloſs weiſse und schwarze Kugeln, von einer anderen dagegen, daſs beiderlei Kugeln in gleicher Anzahl vorhanden sind, so wird wohl jeder zugeben, daſs das mit $\frac{1}{2}$ bewertete Maſs der Erwartung im zweiten Falle besser begründet ist als im ersten. Stumpf[1]) spricht in diesem Sinne von einem Unterschiede des Erkenntniswertes von Wahrscheinlichkeitsurteilen, während Meinong[1]) zwei Dimensionen derselben unterscheidet, die eine bestehend in der Wahrscheinlichkeit, die andere im Erkenntniswert; Nitsche[1]) hebt gleichfalls hervor, daſs es sich bei jedem Wahrscheinlichkeitsansatze noch um die Sicherheit handle, mit der die möglichen Fälle als gleichmöglich betrachtet werden können; demgemäſs habe man Dimensionen der Wahrscheinlichkeit zu unterscheiden. Alle diese Bezeichnungen geben in mehr oder weniger passender Weise einer bestimmten Einsicht in das Wesen der Sache Ausdruck — wir würden am ehesten mit Stumpf von einem Unterschiede des Erkenntniswertes bei den oben angeführten zwei Urteilen reden —, weisen aber auf Umstände hin, die sich der Rechnung entziehen.

An die Bemerkung, daſs sich die Wahrscheinlichkeit in Gewiſsheit verwandelt und ihr Ausdruck gleich Eins wird, wenn alle Fälle einem Ereignis günstig sind, knüpft Laplace[13]) die Worte an, unter diesem Gesichtspunkte seien Gewiſsheit und Wahrscheinlichkeit vergleichbar, „obwohl ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Zuständen des Geistes bestehe, wenn ihm eine Wahrheit streng bewiesen ist, oder wenn er noch eine kleine Quelle des Irrtums wahrnimmt". Laplace will hierdurch die unüberbrückbare Kluft andeuten, die zwischen einer noch so groſsen Wahrscheinlichkeit und der Gewiſsheit besteht. Ebenso stehen die Dinge, wenn einem Ereignis kein Fall günstig ist; das Ereignis ist dann unmöglich und der Ausdruck seiner Wahrscheinlichkeit Null.

Diese beiden Grenzfälle sind im Wesen von einander nicht verschieden: ihr gemeinsames Merkmal ist die Notwendigkeit des Erfolgs, der Mangel jeden Zweifels. Insofern wäre es zutreffender, das Intervall (0, 1), welches mit Ausschluſs seiner Grenzen die Wahrscheinlichkeiten umfaſst, geometrisch nicht durch eine gerade Strecke, sondern durch einen Kreis vom Umfange Eins darzustellen; ein Punkt des Umfanges wäre das Bild der Notwendigkeit, und zwar auf der einen Seite der Notwendigkeit des Geschehens, auf der anderen Seite der Notwendigkeit des Nichtgeschehens.

Nicht immer und überall hat die Stellung der Wahrscheinlichkeit zur Gewiſsheit diese Auffassung erfahren. Fries[1]), einer der

ersten, welche in Deutschland die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie einer philosophischen Kritik unterzogen haben, sagt in der Einleitung, „was wir nach Graden der Gewiſsheit behaupten, nennen wir wahrscheinlich“. Er führt dies später dahin aus, jedes Urteil sei eine Frage, zu welcher wir, um das Urteil zur Behauptung zu erheben, in der Antwort Gründe beibringen müssen; diese bestimmen die Gewiſsheit der Behauptung. Sind die Gründe vollständig, so ist es auch die Gewiſsheit; enthält die Antwort nur teilweis Gründe, so erheben sich über Ungewiſsheit und Zweifel allmählich verschiedene Grade der Gewiſsheit. Die Darstellung ist unhaltbar, weil die Gewiſsheit etwas Absolutes, der Gradation nicht Fähiges ist.

Die Deutung, das Wahrscheinliche stehe zwischen Wahrem und Falschem in der Mitte, wird von Stumpf[1]) als unrichtig zurückgewiesen. Abgesehen davon, daſs es zwei ganz verschiedene Einteilungen unserer Urteile sind, wenn wir das eine Mal wahre und falsche, ein andermal wahrscheinliche Urteile verschiedenen Grades und sichere Urteile unterscheiden, kann ja ein Wahrscheinlichkeitsurteil sich ebenso gut auf die Wahrheit wie auf die Falschheit einer Annahme beziehen.

De Morgan[2]) definirt die mathematische Gewiſsheit als die Grenze, welcher sich unser Eindruck (impression) nähert in dem Maſse, als unser Wissen gröſser und gröſser wird, und die nie erreicht wird, solange noch was immer für ein Zweifel übrig bleibt. Es erscheint uns nicht unzweckmäſsig, den Begriff der Gewiſsheit mit dem der Grenze in Verbindung zu bringen; die Grenze kann in der That etwas vorstellen, was im Wesen verschieden ist von den Gliedern, die sich ihr immer mehr nähern; ein anschauliches Beispiel hierfür bietet eine convergirende Reihe rationaler Zahlen, die eine irrationale Zahl zur Grenze hat.

Besondere Aufmerksamkeit haben die Wahrscheinlichkeiten erregt, welche den Grenzen 1 und 0 sehr nahe liegen. Buffon[1]) nannte eine von der Einheit sehr wenig verschiedene Wahrscheinlichkeit moralische Gewiſsheit; Condorcet[4]) wendet sich gegen diese Bezeichnung, weil sie dazu führe, zwei Dinge von wesentlich verschiedener Natur mit einander zu vermengen, die Wahrscheinlichkeit und die Gewiſsheit; es sei dies genau so, wie wenn man die Asymptote einer Curve vermengte mit einer Tangente in einem sehr fernen Punkte. Todhunter[1]) findet diesen Vergleich nicht glücklich gewählt; mir will es scheinen, als ob er das Wesen der Sache ganz gut träfe. — Es weicht nicht sehr von der Buffon'schen Meinung ab, wenn De Morgan[2]) einen sehr hohen Grad von Wahrscheinlichkeit als praktische Gewiſsheit bezeichnet; nur betont er dabei das subjective Moment und sagt, es müsse der Eindruck ein solcher sein, daſs der Gedanke an die Gegenwahrscheinlichkeit gänzlich zurück-

trete. — Nicht zutreffend finde ich es, wenn Stumpf[1]) von unendlich wahrscheinlichen Urteilen spricht.

Sehr kleine Wahrscheinlichkeitswerte haben D'Alembert[3]) Anlafs gegeben, zwei Arten der Möglichkeit zu unterscheiden. Er nennt metaphysisch möglich ein Ding, das nicht absurd ist; dagegen physisch möglich ein Ding, dessen Eintreffen nicht zu aufsergewöhnlich ist im gewöhnlichen Lauf der Dinge. Hundertmal nach einander mit zwei Würfeln den Pasch 6, 6 zu werfen, sei metaphysisch möglich, aber physisch unmöglich, weil es nie vorgekommen sei und nie vorkommen werde. Die letztere Behauptung ist jedenfalls kühn; was hätte wohl D'Alembert zu dem nach einem Berichte in Grunert's Archiv (Bd. 47, p. 457) vorgekommenen Fall gesagt, wo bei einem Whistspiel jeder der vier Spielenden nur Blätter einer Farbe erhielt? Man wirft wohl sofort die Frage auf: Bei welchem Werte der Wahrscheinlichkeit soll die physische Unmöglichkeit beginnen?

Auch Cournot[1]) unterscheidet zwischen physischer (factischer) und metaphysischer oder logischer (absoluter) Unmöglichkeit; aber seine Begriffsbestimmungen sind viel schärfer und correct. Er bezeichnet es beispielsweise als physisch unmöglich, einen schweren Kegel auf seiner Spitze auf einer horizontalen Ebene in die Gleichgewichtslage zu stellen, oder eine Münze auf einen quadratisch getäfelten Boden so zu werfen, dafs ihr Mittelpunkt mit dem Kreuzungspunkt der Diagonalen einer Tafel zusammenfällt; er abstrahirt daraus die Definition, ein physisch unmögliches Ereignis sei ein solches, dessen Wahrscheinlichkeit unendlich klein (wir möchten sagen, von Null nicht zu unterscheiden) ist, das aber logisch doch denkbar ist. Wenn Cournot weiter hervorhebt, physische und logische Unmöglichkeit seien wesentlich verschiedene Begriffe und es gebe kein Mittel, den Übergang von dem einen zum anderen zu bewerkstelligen, so stellt er sich damit auf den richtigen Standpunkt, den Laplace bezeichnet hat.

9. Die Definition der Wahrscheinlichkeit, welche jetzt zunächst uns beschäftigt und die wir in den Art. 4, 5 und 7 in drei dem Wesen nach übereinstimmenden Formulirungen kennen gelernt haben, setzt die Auflösung des einem Problem zu Grunde liegenden Wissensstoffes in gleichberechtigte Einzelfälle, die Zählung aller sowie derjenigen voraus, welche das fragliche Ereignis herbeizuführen geeignet sind. Dieser directe Weg — man könnte ihn als das Verfahren der Zählung der Chancen bezeichnen — ist denn auch bei den ersten Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung allein betreten worden. Es handelte sich durchwegs um Probleme, welche Glücksspiele betrafen, und die Verfolgung des angedeuteten Weges bei ihrer Lösung hat wesentlich zur Entwicklung eines Zweiges der Mathematik beigetragen, der mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung fortan in der engsten Verbindung blieb, nämlich der Combinationslehre. Die

ersten Anfänge dieser Lehre fallen der Zeit und der Person nach mit jenen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zusammen; denn Pascal[1]), der sich mit Fermat[1]) in den Ruhm der Begründung der letzteren teilt, hat auch den ersten namhaften Beitrag zur combinatorischen Analysis gegeben in seiner unter[2]) genannten Schrift. An Pascal reihten sich Leibniz[2]) und Wallis[1]), und in Jakob Bernoulli's[1]) „Ars conjectandi", einem für die Wahrscheinlichkeitsrechnung grundlegenden Werke, begegnen wir bereits einer systematischen Darstellung der Permutationen und Combinationen.*)

Aus der Behandlung zahlreicher, mitunter sehr verwickelter Probleme entwickelten sich allmählich Regeln, dazu bestimmt, gewisse häufig wiederkehrende Schlüsse, wie sie sich bei den verschiedenen Modalitäten der Concurrenz mehrerer Ereignisse bei Bildung eines Wahrscheinlichkeitsurteiles ergeben, in correcter schematischer Weise darzustellen. Diese Regeln, anfangs zahlreich, reducirten sich schliefslich auf einige wenige Sätze, welchen Laplace[13]) in Form von Principien strenge Fassung gab. Durch diese Sätze ist es möglich geworden, den häufig sehr umständlichen directen Weg zu umgehen und die Lösung complicirter Aufgaben durch entsprechende Analyse zu vereinfachen und durchsichtiger zu gestalten.

10. Der einfachste Fall der Concurrenz mehrerer Ereignisse besteht darin, dafs mit dem Eintreffen jedes einzelnen ein gewisser vorbezeichneter Erfolg eingetreten ist, dafs aber von jenen Ereignissen nur eines eintreffen kann. Die Wahrscheinlichkeit des bezeichneten Erfolges kommt dann gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse, unter welchen der Erfolg subsumirt ist.

Der Ursprung dieses Satzes liegt in folgender Erwägung. Zerfallen die g Fälle, welche unter m gleichmöglichen Fällen einem Ereignis E günstig sind, von irgend einem Gesichtspunkte betrachtet in Gruppen von $g_1, g_2, \cdots g_r$ Fällen derart, dafs $g = g_1 + g_2 \cdots + g_r$ und dafs die Fälle der 1., 2., $\cdots$ r-ten Gruppe beziehungsweise das Ereignis $E_1, E_2, \cdot\cdot E_r$ zu verwirklichen geeignet sind, so ist die Wahrscheinlichkeit von E gleich

$$\frac{g}{m} = \frac{g_1 + g_2 + \cdot\cdot + g_r}{m} = \frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m} + \cdots + \frac{g_r}{m}.$$

Bedient man sich zur Darstellung jedes in diesem Ansatze vorkommenden Wahrscheinlichkeitsbruches eines Buchstabens — eine Einführung, die trotz ihrer scheinbaren Einfachheit für die mathematische Entwicklung der Theorie bedeutungsvoll war und von De Moivre[1,2]) zum erstenmale geübt wurde — so schreibt sich die Gleichung einfacher

$$p = p_1 + p_2 \cdots + p_r.$$

*) S. Todhunter[1]), p. 64 flg., Cantor M.[1]), III., p. 328 flg.

Die Ereignisse E_1, E_2, $\cdots E_r$ sind Arten oder Specialfälle des Ereignisses E, nach dessen Wahrscheinlichkeit gefragt wird.

Laplace[14]), der den vorstehenden Satz als zweites Princip aufführt, giebt ihm eine andere Fassung, indem er die Ereignisse E_1, E_2, $\cdots E_r$ als ungleich mögliche günstige Fälle des Ereignisses E auffafst. Er kommt dadurch zu der Regel, dafs die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, wenn die Fälle nicht gleichmöglich sind, gefunden wird, indem man die bezüglichen Wahrscheinlichkeiten der einzelnen günstigen Fälle bestimmt und ihre Summe bildet.

Man pflegt die auf solche Weise, d. h. durch Summirung einzelner Wahrscheinlichkeiten gefundene Wahrscheinlichkeit als vollständige oder totale Wahrscheinlichkeit zu bezeichnen. Zutreffend hat Reuschle[1]) den logischen Inhalt obigen Satzes gekennzeichnet, indem er p eine Wahrscheinlichkeit des Entweder-Oder (entweder E_1 oder $E_2 \cdots$) nennt.

11. Ein weiterer Fall der Concurrenz mehrerer Ereignisse besteht darin, dafs ein vorbezeichneter Erfolg dann und nur dann verwirklicht ist, wenn jene Ereignisse zusammentreffen. Ob das Zusammentreffen ein gleichzeitiges oder successives, ist für die Bildung des Wahrscheinlichkeitsurteils irrelevant; mafsgebend aber ist der Umstand, ob die Verwirklichung des einen Ereignisses Einflufs übt auf die Wahrscheinlichkeit der anderen, oder ob ein solcher Einflufs nicht stattfindet. Im ersten Falle nennt man die einzelnen Ereignisse von einander abhängig, im zweiten unabhängig.

Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen zweier oder mehrerer unabhängigen Ereignisse ist gleich dem Producte ihrer Wahrscheinlichkeiten.

Dieser Satz ergiebt sich durch Combination der gleichmöglich gedachten Fälle, welche den einzelnen Ereignissen zu Grunde liegen. Angenommen, dem Ereignis E_1 wären von m_1 unter einander gleich möglichen g_1 Fälle günstig; $m_2, g_2; \cdots m_r, g_r$ hätten die analoge Bedeutung für $E_2, \cdots E_r$; und das Ereignis E, auf welches unsere Erwartung gerichtet ist, bestehe in dem Zusammentreffen von E_1, $E_2, \cdots E_r$. Bildet man alle Combinationen aus je einem möglichen Fall von E_1 mit einem solchen von $E_2, \cdots$ und einem von E_r, so sind die $m = m_1 m_2 \cdots m_r$ so entstandenen Combinationen wieder gleichmögliche Fälle, und nur aus ihnen ist eine Verwirklichung von E denkbar; und zwar sind einer solchen nur jene $g = g_1 g_2 \cdots g_r$ Fälle günstig, welche durch Combination günstiger Fälle von E_1, $E_2, \cdots E_r$ entstehen. Hiernach kommt die Wahrscheinlichkeit von E gleich

$$\frac{g}{m} = \frac{g_1 g_2 \cdots g_r}{m_1 m_2 \ldots m_r} = \frac{g_1}{m_1} \frac{g_2}{m_2} \cdots \frac{g_r}{m_r},$$

was sich in einfacheren Zeichen durch die Gleichung

$$p = p_1 p_2 \cdots p_r$$

darstellt.

Sind die Fälle, aus welchen E_1 hervorgeht, andere als die von $E_2, \cdots$ und von E_r, so kann das Zusammentreffen ebensowohl ein gleichzeitiges, wie auch ein successives sein; in letzterem Falle ist die Reihenfolge der Successionen ohne Einfluſs auf die Wahrscheinlichkeit. Wenn dagegen E_1, $E_2, \cdots E_r$ aus demselben Complex möglicher Fälle hervorgehen, in welchem Falle $m_1 = m_2 = \cdots = m_r$ ist, so ist nur successives Eintreffen denkbar. Kommt zu der letzteren Voraussetzung noch die hinzu, daſs $E_2, \cdots E_r$ sämtlich mit E_1 übereinstimmen, so daſs es sich um die r-malige Wiederholung dieses einen Ereignisses E_1 handelt, so wird wegen $p_1 = p_2 = \cdots = p_r$

$$p = p_1{}^r.$$

Gegen die hier ausgesprochenen Grundsätze sind wiederholt Bedenken erhoben worden. Es ist beispielsweise die Frage aufgeworfen worden, ob es für die Wahrscheinlichkeit eines bezeichneten Erfolges gleichgiltig ist, wenn man seine eventuelle Verwirklichung das eine Mal durch das Werfen von r Würfeln, Münzen od. dgl., das andere Mal durch das r-malige Werfen eines Würfels, einer Münze od. dgl. herbeizuführen sucht. D'Alembert[5]), der an den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung mehrfache und man kann sagen meist miſslungene Kritik geübt hat, verneinte diese Frage. Er meint, es sei „physisch" leichter möglich, eine Münzseite eine bestimmte Anzahl Male beim gleichzeitigen Werfen von r Münzen zu treffen, als daſs dieselbe Seite sich in der nämlichen Anzahl wiederhole, wenn eine Münze r-mal geworfen wird. Dies sucht er aber nicht vielleicht aus einer etwa vorhandenen Unregelmäſsigkeit der Münzen zu erklären, das soll vielmehr bei vollkommen regelmäſsigen Münzen richtig sein. Bei einer Unregelmäſsigkeit, welche die Seiten in unbekannter Weise ungleich macht, wären die beiden auseinandergehaltenen Fälle wirklich ungleich, aber gerade im entgegengesetzten Sinne, als D'Alembert dies behauptet. Wie Laplace[13]) im VII. Cap. gezeigt hat, ist bei mehrmaligem Werfen einer Münze die Wahrscheinlichkeit für eine n-malige Wiederholung einer Seite gröſser als bei gleichzeitigem Werfen einer entsprechenden Anzahl von Münzen.

Es war eine der ersten Fragen, welche gestellt und gelöst worden sind, bei wie vielen Versuchen auf das Eintreffen eines Ereignisses von bekannten Chancen mit Vorteil zu wetten ist. Bezeichnet q die Wahrscheinlichkeit des Nichteintreffens dieses Ereignisses in einem Versuch, so hängt die Lösung jener Frage von der Gleichung

$$\tfrac{1}{2} = 1 - q^n$$

ab; die nächste ganze Zahl, welche über der Wurzel n dieser Gleichung

liegt, giebt die Antwort. Chevalier de Meré, der durch seine an Pascal gerichteten, Spiele betreffenden Fragen diesem den Anlafs zu mathematischen Studien nach einer ganz neuen Richtung gegeben, konnte nicht begreifen, warum bei vier Würfen mit Vorteil auf das Erscheinen von 6 gerechnet werden dürfe, nicht aber bei vierundzwanzig Würfen mit zwei Würfeln auf das Erscheinen von Pasch 6. In Unkenntnis des wahren Zusammenhangs, den aber Pascal[1]) erkannt hatte, erblickte er hierin einen Widerspruch mit der Proportion $4:6 = 24:36$, in welcher das Vorderglied jedes Verhältnisses die Anzahl der Versuche, das Hinterglied die Zahl der möglichen Fälle bedeuten soll.

12. Der Satz an der Spitze des vorigen Artikels bezieht sich auf unabhängige Ereignisse; Laplace[14]) führt ihn als drittes Princip an. Sein viertes Princip bezieht sich auf abhängige Ereignisse. Man kann ihm folgende Fassung geben: Die Wahrscheinlichkeit für das successive Eintreffen von E_1, E_2, $\cdots E_r$, wenn das Eintreffen eines dieser Ereignisse die Wahrscheinlichkeit der folgenden beeinflufst, ist das Product aus der Wahrscheinlichkeit von E_1 mit der Wahrscheinlichkeit von E_2 nach Eintreffen von $E_1, \cdots$ multiplicirt mit der Wahrscheinlichkeit von E_r, nach Eintreffen von E_1, E_2, $\cdots E_{r-1}$.

Man kann diesen Satz ebenso auf combinatorischem Wege beweisen wie den vorigen; nur bedeuten m_2, g_2 nicht mehr die Anzahlen der möglichen und günstigen Fälle, welche dem Ereignis E_2 ursprünglich entsprechen, sondern diejenigen, welche nach dem Erscheinen von E_1 stattfinden u. s. w.

Erfolge, welche in dem Zusammentreffen mehrerer Ereignisse bestehen, hat man als zusammengesetzte Ereignisse bezeichnet. Reuschle[1]) nennt die Wahrscheinlichkeiten solcher Ereignisse bezeichnend Wahrscheinlichkeiten des Sowohl-alsauch (sowohl E_1 alsauch $E_2 \cdots$).

Es ist indessen nicht nötig, dafs das Zusammentreffen in dem jetzt discutirten Falle ein successives sei; dafs es sich auch um ein gleichzeitiges Eintreffen handeln könne, zeigt das Beispiel, an welchem Laplace das Princip erläutert. Es liegen drei äufserlich gleiche Urnen A, B, C vor; zwei davon enthalten nur weifse, eine nur schwarze Kugeln. Man zieht aus zwei der Urnen je eine Kugel und fragt nach der Wahrscheinlichkeit, dafs beide weifs sind. Die Wahrscheinlichkeit, aus einer beliebigen der Urnen eine weifse Kugel zu holen, ist $\frac{2}{3}$; hat dieser erste Zug wirklich eine weifse Kugel gebracht, so ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer der übrigen Urnen eine weifse Kugel zu ziehen, nur mehr $\frac{1}{2}$; infolge dessen die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Dafs dies auch dann gilt, wenn man gleichzeitig in zwei Urnen langt und je eine Kugel hervorholt, ist so zu erkennen, dafs unter den 3 gleichmög-

lichen Combinationen der Urnen zu zweien nur eine vorhanden ist, welche, wenn sie ergriffen wird, das erwartete Ereignis verwirklicht.

13. Poincaré[1]) hat die Sätze der Artikel 10—12 aus einer gemeinsamen Grundlage wie folgt abgeleitet.

Bezüglich zweier Ereignisse A, B können vier verschiedene Annahmen gemacht werden, nämlich:

Annahme AB : beide Ereignisse treten ein; Zahl der günstigen Fälle α
„ AB': A tritt ein, B nicht; „ „ „ „ β
„ $A'B$: B tritt ein, A nicht; „ „ „ „ γ
„ $A'B'$: keines von beiden tritt ein; „ „ „ „ δ.

Vorausgesetzt sei, dafs alle Fälle gleich möglich sind.

Aus diesen Daten können die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse bestimmt werden, und zwar:

$$(A) \quad p_1 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

$$(B) \quad p_2 = \frac{\alpha + \gamma}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

$$(A \text{ oder } B) \quad p_3 = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

$$(A \text{ und } B) \quad p_4 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

$$(A, \text{ wenn } B) \quad p_5 = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$$

$$(A, \text{ wenn } B') \quad p_6 = \frac{\beta}{\beta + \delta}$$

$$(B, \text{ wenn } A) \quad p_7 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$(B, \text{ wenn } A') \quad p_8 = \frac{\gamma}{\gamma + \delta}.$$

I. Können die beiden Ereignisse nicht zusammen eintreffen, so ist $\alpha = 0$; dann aber wird $p_1 = \frac{\beta}{\beta + \gamma + \delta}$, $p_2 = \frac{\gamma}{\beta + \gamma + \delta}$, $p_3 = \frac{\beta + \gamma}{\beta + \gamma + \delta}$, folglich

$$p_3 = p_1 + p_2,$$

und dies ist der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.

II. Die beiden Ereignisse sind unabhängig von einander, wenn die fünfte und sechste und ebenso die siebente und achte Hypothese gleichwertig sind. Zur Gleichwertigkeit des ersten Paares ist erforderlich, dafs $p_5 = p_6$ oder dafs $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$; dann aber ist auch

$p_7 = p_8$, d. h. es besteht auch Gleichwertigkeit im zweiten Paare. Unter solchen Umständen ist aber

$$p_1 p_2 = \frac{\alpha^2 + \alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma}{(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2} = \frac{\alpha^2 + \alpha(\beta + \gamma) + \alpha\delta}{(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma + \delta},$$

d. h. es ist

$$p_4 = p_1 p_2.$$

Darin liegt aber der Satz von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit unabhängiger Ereignisse.

III. Ein Blick auf die oben zusammengestellten Brüche läfst erkennen, dafs

$$p_4 = p_1 p_7 = p_2 p_5.$$

Hierin aber spricht sich der Satz von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit abhängiger Ereignisse aus, einmal in der Form, dafs das Ereignis A vorausgeht und B folgt, das andere Mal für die umgekehrte Reihenfolge.

14. In der correcten Anwendung der Sätze über totale und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit liegt die Kunst der Bildung richtiger Wahrscheinlichkeitsurteile, zunächst der apriorischen. Je mehr sich die Umstände, unter welchen ein solches Urteil zu bilden ist, von denjenigen einfachen Verhältnissen entfernen, welche der Begründung jener Sätze zu Grunde lagen, um so schärfere Aufmerksamkeit ist erforderlich.

Bezüglich des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit macht De Morgan[2]) die wichtige Bemerkung, „es müsse beachtet werden, dafs jede Art des Eintreffens als zufällig betrachtet werden müsse unter den Arten, von welchen eine verwirklicht werden soll“.

Angenommen, es lägen zwei Urnen P (3 weifse, 4 schwarze Kugeln) und Q (4 w., 3 s. K.) vor; gefragt sei nach der Wahrscheinlichkeit des Ziehens einer weifsen Kugel, wenn man in eine beliebige der Urnen greift. Hier liegt der Fehlschlufs nahe, von einem Ereignis zu sprechen, das auf zwei Arten, aber nur auf eine von beiden eintreffen kann, und demgemäfs ohne weiteres den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit anzuwenden; im vorliegenden Beispiel weist das so gefundene Resultat $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$ selbst auf die Unhaltbarkeit des Schlusses hin. Es mufs beachtet werden, dafs es selbst wieder zufällig ist, auf welche der beiden Arten das erwartete Ereignis zustande kommt, und diese Rücksichtnahme führt zu dem Ansatz $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{2}$, indem der Satz von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit unabhängiger Ereignisse sich mit dem von der totalen Wahrscheinlichkeit combinirt.

Allgemein, aus einer beliebigen von zwei Urnen P (a w., b s. K.) und Q (a' w., b' s. K.) eine weifse Kugel zu ziehen, hat zur Wahr-

scheinlichkeit das arithmetische Mittel der auf die einzelnen Urnen bezüglichen Wahrscheinlichkeiten des erwarteten Ereignisses

$$\frac{\frac{a}{a+b}+\frac{a'}{a'+b'}}{2},$$

und dieser Satz läſst sich auf beliebig viele Urnen ausdehnen, wenn man bezüglich der einzelnen in gleicher Ungewiſsheit sich befindet.

Der Gedanke, die Inhalte der Urnen P, Q in einer Urne zu vereinigen, führt nur bedingungsweise zu dem richtigen Resultate. Der Grund hierfür liegt in folgender Erwägung. Solange die Kugeln getrennt sind, stellen sie gleichmögliche Fälle dar, insofern es gleich leicht ist, in die eine oder in die andere Urne zu greifen und aus ihr diese oder jene Kugel zu ziehen. Wenn hingegen die Kugeln vereinigt, aber noch weiter als zwei Gattungen von Kugeln unterschieden werden, so hört die Gleichmöglichkeit der Fälle auf; die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel der Gattung P zu treffen, ist $\frac{a+b}{a+b+a'+b'}$, und die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel der Gattung Q zu ergreifen, ist $\frac{a'+b'}{a+b+a'+b'}$; daher die Wahrscheinlichkeit, eine weiſse Kugel zu ziehen,

$$\frac{a+b}{a+b+a'+b'}\cdot\frac{a}{a+b}+\frac{a'+b'}{a+b+a'+b'}\cdot\frac{a'}{a'+b'}=\frac{a+a'}{a+b+a'+b'};$$

sie ist also genau so groſs, als ob alle Kugeln als von einerlei Gattung angesehen würden.

Poincaré[1]), der dieses Beispiel zur Illustration ungleich möglicher Fälle vorführt, bemerkt, die Vereinigung der Urnen führe nur dann zum richtigen Resultate, wenn $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}\cdot$ Aber auſser diesem ganz speciellen Falle giebt es noch einen allgemeineren, der immer herbeigeführt werden kann: er besteht darin, daſs beide Urnen gleich viele Kugeln enthalten. Ist $a+b \lesseqgtr a'+b'$, so bestimme man die ganzen Zahlen λ, λ' so, daſs $\lambda\,(a+b)=\lambda'\,(a'+b')=N$, und denke sich die Urnen P, Q substituirt durch zwei andere P_1 (λa w., λb s. K.), Q_1 ($\lambda' a'$ w., $\lambda' b'$ s. K.); diese vereinigt, geben eine Urne, welche dem Ziehen einer weiſsen Kugel dieselbe Wahrscheinlichkeit verleiht, wie sie oben gefunden wurde, nämlich

$$\frac{\lambda a+\lambda' a'}{2N}=\frac{\frac{N}{a+b}\,a+\frac{N}{a'+b'}\,a'}{2N}=\frac{\frac{a}{a+b}+\frac{a'}{a'+b'}}{2}.$$

Daſs eine solche Abänderung der Urneninhalte, wie sie hier von P auf P_1 und von Q auf Q_1 vorgenommen wurde, im Hinblick auf die Wahrscheinlichkeiten statthaft ist, erkennt man arithmetisch

unmittelbar; dafs sie auch sachlich, das heifst mit Rücksicht auf das Mafs der Erwartung zulässig sei, hat Laplace[14]) durch eine eigentümliche Betrachtung zu erweisen gesucht ([13]), Introd., p. IV—V).

Bertrand[3]) hat die Frage aufgeworfen, ob die Sätze von der totalen und zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit auch anwendbar seien auf Wahrscheinlichkeiten, welche nicht auf Grund einer Disjunction gleich möglicher Fälle erhalten worden sind. Man kann nämlich einem Ereignis gegenüber, das die Merkmale des Zufälligen an sich trägt, indem es eintreten kann aber nicht einzutreffen braucht, und indem wir wenigstens über einen Teil der Bedingungen seiner Verwirklichung in Unwissenheit uns befinden, durch Abwägung der bekannten Gründe für und gegen sein Eintreffen zu einer Wahrscheinlichkeitsbestimmung gelangen, welche aber, als von dem Wissen der betreffenden Person abhängig, den Charakter der Subjectivität an sich trägt. Hat man eine solche Bestimmung vorgenommen und etwa den Wert $\frac{a}{b}$ erhalten, so ist damit die Erklärung abgegeben, dafs das betreffende Ereignis in Bezug auf die ihm entgegengebrachte Erwartung gleich zu achten sei dem Ziehen aus einer Urne mit b Kugeln, wovon a weifs sind, wenn das Erscheinen einer Kugel dieser Farbe von Interesse ist. Dem wirklichen Thatbestand, sei er welcher Natur immer, kann vom wahrscheinlichkeitstheoretischen Standpunkte dieses schematische Bild substituirt werden, und daraus ergiebt sich weiter, dafs man nun auch alle weiteren Consequenzen ziehen könne, sofern nur auch die sonstigen Bedingungen erfüllt sind; Addition und Multiplication solcher Wahrscheinlichkeiten kann nur dann zu brauchbaren Resultaten führen, wenn die Unabhängigkeit der zugehörigen Ereignisse verbürgt ist. Denn auch der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit erfährt eine Abänderung, sobald die Ereignisse, von welchen nur eines eintreffen soll, in der Weise von einander abhängen, dafs sie auch zugleich eintreffen können. Wie nämlich aus der Zusammenstellung in Art. 13 hervorgeht, besteht zwischen den vier Wahrscheinlichkeitswerten p_1, p_2, p_3, p_4 die Beziehung

$$p_3 + p_4 = p_1 + p_2,$$

der zufolge

$$p_3 = p_1 + p_2 - p_4$$

ist, sodafs unter solchen Umständen die Wahrscheinlichkeit, dafs von den Ereignissen A, B nur eines eintrifft, gleichkommt der Summe ihrer einzelnen Wahrscheinlichkeiten vermindert um die Wahrscheinlichkeit ihres Zusammentreffens.

Zur Illustration seien die folgenden Beispiele Bertrand's angeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dafs es an einem Ort in einem bestimmten Jahr Eis geben werde, dürfte nicht als Summe der Wahrscheinlichkeiten desselben Thatbestandes bezüglich der einzelnen Monate

gebildet werden; denn weder ist das Ereignis auf einen Monat beschränkt, noch sind die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Monate unabhängig von einander. — Hat man sich für die Wahrscheinlichkeit, dafs es morgen frieren werde, den Wert $\frac{1}{3}$, und dafs es morgen schneien werde, den Wert $\frac{1}{4}$ gebildet, so ist keineswegs $\frac{1}{12}$ die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider Erscheinungen; denn für diesen Schlufs mangelt es an der Unabhängigkeit derselben. — Hätte man für die Wahrheit der Prognosen zweier Meteorologen die Wahrscheinlichkeitswerte p, p' acceptirt, so würde daraus doch nicht der Wert $(1-p)\,(1-p')$ für die Wahrscheinlichkeit resultiren, dafs eine von beiden gemachte Prognose falsch sei; denn die Voraussagen sind nicht unabhängig von einander.

15. Im Entwicklungsgange der Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung mufste als eine der ersten die Frage nach der correcten und vollständigen Aufstellung der Möglichkeiten sich einfinden, welche aus dem Zusammentreffen zweier oder mehrerer Ereignissphären entspringen. Den logischen Inhalt dieser Frage hat in jüngster Zeit Sigwart[1]) am schärfsten gekennzeichnet, als er die Bedeutung des disjunctiven Urteils für die Wahrscheinlichkeitstheorie weiter ausführte. Nach seiner Darstellung beruht ein jedes Wahrscheinlichkeitsurteil auf einem hypothetisch-disjunctiven Urteil, welch' letzteres blofs aussagt, wie vielerlei mögliche Fälle unter einer bestimmten Voraussetzung eintreten können. So kann, wenn die Münze A geworfen wird, entweder Kopf (Ak) oder Schrift (As) nach oben fallen. Wird noch eine zweite Münze B geworfen, so verbinden sich ihre Möglichkeiten Bk und Bs mit jenen der vorigen zu den vier möglichen Fällen

$$Ak, Bk;\quad Ak, Bs;\quad As, Bk;\quad As, Bs.$$

Dadurch entsteht also ein neues disjunctives Urteil, das auf einer Combination zweier Disjunctionen beruht. Die oben berührte Frage kommt also auf die correcte Combination zweier oder mehrerer Disjunctionen zu einem neuen disjunctiven Urteil zurück.

Die Analogie dieses Vorganges mit der Multiplication zweier oder mehrerer Polynome ist bald erkannt worden. Sind $E_1', E_2', \cdots E_{n'}'$ die Eventualitäten einer Disjunction; $E_1'', E_2'', \cdots E_{n''}''$ die einer zweiten; $\cdots E_1^{(i)}, E_2^{(i)}, \cdots E_{n^{(i)}}^{(i)}$ die einer i-ten: so bilde man, die Symbole als Zahlen auffassend, das Product

$$\left(E_1'+E_2'+\cdots+E_{n'}'\right)\left(E_1''+E_2''+\cdots+E_{n''}''\right)\cdots\left(E_1^{(i)}+E_2^{(i)}+\cdots+E_{n^{(i)}}^{(i)}\right)$$
$$=E_1'\,E_1''\cdots E_1^{(i)}+E_1'\,E_1''\cdots E_2^{(i)}+\cdots$$

Ersetzt man dann das Zeichen $+$ durch das Wort „oder" und sieht die Multiplication als eine formale Combination der so entstandenen

Disjunctionen an, so giebt die rechte Seite die combinirte Disjunction mit ihren $n' n'' \cdots n^{(i)}$ Gliedern. Waren die Eventualitäten jeder Disjunction gleichmögliche Fälle, so sind es auch die Eventualitäten $E_1' E_1'' \cdot\cdot E_1^{(i)}, E_1' E_1'' \cdot\cdot E_2^{(i)} \cdots$ der Combination.

Befinden sich unter den Eventualitäten jeder Disjunction Gruppen von gleichen Gliedern, so verallgemeinert sich die obige Formel dahin, dafs nun

$$\left(\alpha_1' E_1' + \alpha_2' E_2' + \cdot\cdot + \alpha_{n'}' E_{n'}'\right)\left(\alpha_1'' E_1'' + \alpha_2'' E_2'' + \cdot\cdot + \alpha_{n''}'' E_{n''}''\right)\cdot\cdot$$
$$\cdot\cdot\left(\alpha_1^{(i)} E_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)} E_2^{(i)} + \cdots + \alpha_{n^{(i)}}^{(i)} E_{n^{(i)}}^{(i)}\right) = A\, E_1' E_1'' \cdots E_1^{(i)} + \cdots,$$

wobei die einzelnen α ganze positive Zahlen bedeuten; der Coefficient A zählt, auf wie viele Arten die ihm folgende Verbindung von Eventualitäten entsteht.

Von dieser Darstellung De Morgan's[2]) unterscheiden sich die Sätze, welche De Moivre[2]) in der Introduction seiner berühmten „Doctrine of chances“ der Lösung von Wahrscheinlichkeitsproblemen zu Grunde gelegt hat, nur dadurch, dafs die Zeichen der Eventualitäten fortgelassen sind. De Moivre erklärt die Bedeutung der Glieder des Productes

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd,$$

wenn a die Anzahl der Fälle für das Eintreffen, b jene für das Nichteintreffen eines Ereignisses bedeutet und c, d die analoge Bedeutung für ein zweites von dem ersten unabhängiges Ereignis haben. Hiervon ist nur ein Schritt zu thun, um die Bedeutung der Glieder der Entwicklung von $(a + b)^n$ zu erkennen. Auf diesem theoretischen Material fufst zum grofsen Teil die Lösung der Aufgaben, welche De Moivre in dem genannten Werke vorgeführt hat und deren Zahl sich von der ersten Auflage zur dritten von 53 auf 74 vermehrt hat. Wie Cantor[1]) hervorhebt, gewinnt dadurch das Werk ein einheitliches Gepräge, welches seinen Wert erhöht.

Noch besser war die Bedeutung der obigen Sätze ausgenützt, als man statt der Anzahlen der Fälle die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der Eventualitäten einsetzte; die Glieder der Entwicklung geben dann unmittelbar die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen zusammengesetzten Ereignisse, die früher notwendige Division durch die Anzahl aller möglichen Fälle entfällt.

16. Eine der wichtigsten und fruchtbarsten Methoden zur Lösung von Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung besteht in deren Zurückführung auf Differenzengleichungen. Angenommen zunächst, die Wahrscheinlichkeit, um die es sich handelt, hänge nur von einem ganzzahligen Zeiger x ab und sei mit u_x bezeichnet. Die zu den auf einander folgenden Werten von x gehörigen Werte von u_x

bilden dann eine Reihe, und es läſst sich immer auf Grund der Daten des Problems zwischen mehreren successiven Gliedern dieser Reihe eine Relation herstellen, die nunmehr den analytischen Inhalt des Problems in der gedrängtesten Form darstellt. Eine solche Relation, weil sie auch ausgedrückt werden kann durch das niedrigste der Glieder und seine auf einander folgenden Differenzen, wird eine Differenzengleichung genannt, und zwar eine gewöhnliche, weil nur ein variabler Index bei u vorkommt. Hängt die fragliche Wahrscheinlichkeit von zwei ganzzahligen Zeigern x, y ab, und wird sie demgemäſs mit $u_{x,y}$ bezeichnet, so tritt an die Stelle einer Wertreihe ein zweifach ausgedehntes Wertefeld; eine Relation, die sich nun aus einer Gruppe von Werten dieses Feldes auf Grund der Daten des Problems herstellen läſst, kann abermals in Differenzen, welche teils nach dem einen, teils nach dem anderen Zeiger genommen sind und partielle Differenzen heiſsen, umgesetzt werden und wird dementsprechend eine partielle Differenzengleichung genannt. Ähnliches gilt für drei und mehr variable Zeiger.

Man kann nun, auf die niedersten Elemente u_x, respective $u_{x,y}, \cdots$ zurückgehend, deren Werte sich in der Regel aus der Natur der Aufgabe leicht ergeben, mit Hilfe der Differenzengleichung zu den folgenden Elementen fortschreiten und auf diesem Wege schlieſslich zu jenem Element gelangen, das gerade in Frage steht. Diesem zumeist mühsamen und schwerfälligen Verfahren steht ein anderes gegenüber, das als Integration der Differenzengleichung bezeichnet wird und dessen Ziel dahin gerichtet ist, das allgemeine Element u_x, $u_{x,y}, \cdots$ einzig und allein als Function der Daten des Problems und des Zeigers x, respective der Zeiger x, y; $\cdots$ darzustellen.

De Moivre[2]) war es, der in seiner „Doctrine of chances“ zuerst derlei Methoden unter dem Namen der recurrenten Reihen zur Lösung von Wahrscheinlichkeitsaufgaben anwandte; es handelte sich dabei um lineare Differenzengleichungen verschiedener Ordnungen*) mit constanten Coefficienten. Todhunter[1]) bezeichnet diesen Teil des genannten Werkes als eine der bedeutendsten Leistungen De Moivre's auf diesem Gebiete. Später hat Lagrange[1]) in einer für die damalige Zeit epochemachenden Arbeit die Theorie der Differenzengleichungen aufgenommen, ihre Integration gefördert und auf deren Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung hingewiesen.

In der Behandlung partieller Differenzengleichungen und ihrer Anwendung auf Wahrscheinlichkeitsprobleme traten Lagrange[3]) und Laplace[1]) fast gleichzeitig mit namhaften Arbeiten auf; Lagrange

*) Die Ordnung einer Differenzengleichung wird analog wie die einer Differentialgleichung nach der höchsten darin auftretenden Differenz oder nach dem Zeigerabstand der höchsten und niedersten darin vorkommenden Elemente bestimmt.

spricht dabei von „recurrenten Reihen, deren Glieder auf mehrere verschiedene Arten variiren", Laplace von recurro-recurrenten Reihen.

Alle diese Methoden, welche auf der Rechnung mit endlichen Differenzen beruhen, sind in diesem Jahrhundert durch den namentlich von englischen Mathematikern, darunter insbesondere Boole[1]), ausgebildeten Operationscalcul auf einfachere Formen zurückgeführt und der Anwendung zugänglicher gemacht worden.

Zur Illustration dieses modernen Verfahrens diene das folgende, einer Darstellung Crofton's[4]) entnommene Beispiel.

Welches ist die Wahrscheinlichkeit, bei n-maligem Aufwerfen einer Münze mindestens zweimal nach einander Kopf zu treffen?

Der Anzahl 2^n der möglichen Fälle steht eine noch unbekannte Anzahl u_n der günstigen Fälle gegenüber. Denkt man sich die Zahl der Würfe um 3 vermehrt, so enthält u_{n+3} die Zahl u_{n+2} doppelt, weil aus jedem Fall von u_{n+2} ein Fall von u_{n+3} entsteht, ob der letzte Wurf Kopf oder Schrift ergiebt; dazu kommen aber noch jene Fälle, wo Kopf in den zwei letzten Würfen, Schrift im vorangehenden Wurf und keine Wiederholung von Kopf in den n ersten Würfen erscheint; die Anzahl dieser Fälle ist $2^n - u_n$. Demnach führt das Problem zu der Differenzengleichung dritter Ordnung

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + 2^n - u_n.$$

Ist E das Zeichen für jene Operation, welche u_n in u_{n+1} verwandelt, sodaſs $Eu_n = u_{n+1}$, so schreibt sich diese Gleichung nach Trennung des Operationszeichens vom Subject:

$$(E^3 - 2E^2 + 1)\,u_n = 2^n$$

oder

$$(E - 1)(E^2 - E - 1)\,u_n = 2^n;$$

sind also α, β die Wurzeln der Gleichung $E^2 - E - 1 = 0$, so ist

$$u_n = 2^n + A + B\alpha^n + C\beta^n$$

das allgemeine Integral; es setzt sich zusammen aus dem particulären Integral 2^n der gegebenen und aus dem vollständigen Integral der auf Null reducirten Gleichung $u_{n+3} - 2u_{n+2} + u_n = 0$.

Behufs Bestimmung der Constanten A, B, C beachte man, daſs dem erwarteten Ereignis bei 1 Wurf kein günstiger Fall, bei 2 Würfen ein solcher und bei 3 Würfen deren drei (KKS, SKK, KKK) entsprechen. Hiernach ist

$$0 = 2 + A + B\alpha + C\beta,$$
$$1 = 4 + A + B\alpha^2 + C\beta^2,$$
$$3 = 8 + A + B\alpha^3 + C\beta^3,$$

und daraus berechnet sich, wenn man auf die Bedeutung von α, β Rücksicht nimmt,

$$A = 0, \quad B = \frac{\alpha^2}{\beta - \alpha}, \quad C = \frac{\beta^2}{\alpha - \beta},$$

sodafs

$$u_n = 2^n - \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta}.$$

Nun ist $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$; durch Einsetzung dieser Werte, Entwicklung nach der Binomialformel und entsprechende Reduction ergiebt sich:

$$u_n = 2^n - \frac{n+2}{2^{n+1}}\left\{1 + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3} 5 + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} 5^2 + \cdots\right\};$$

daraus folgt durch Division mit 2^n die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$p_n = 1 - \frac{n+2}{2^{2n+1}}\left\{1 + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3} 5 + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} 5^2 + \cdots\right\}.$$

Der eben gelösten Aufgabe stellen wir die folgende gegenüber: Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in n Würfen mindestens einmal eine Folge von dreimal Kopf oder Schrift sich einstellt?

Bezeichnet man wie vorhin die Anzahl der günstigen Fälle mit u_n, so schliefst u_{n+3} zunächst wieder das Doppelte von u_{n+2} ein, weil jeder der letztgenannten Fälle einen Fall von u_{n+3} giebt, ob man Kopf oder Schrift hinzufügt; aufserdem aber giebt jeder der $2^n - u_n$ Fälle, wo in n Würfen keine Folge von dreimal Kopf oder Schrift vorkam, Anlafs zu einem Fall von u_{n+3}; denn endet er mit K, so füge man SSS hinzu, und endet er mit S, so schliefse man mit KKK ab. Demnach ist

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + 2^n - u_n.$$

Das Problem führt also auf die nämliche Differenzengleichung, und die weitere Verfolgung der Rechnung mit den Ausgangswerten $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 2$ ergiebt ein Endresultat, aus welchem hervorgeht, dafs es gleich wahrscheinlich ist, in n Würfen wenigstens einmal die Folge KK zu treffen, wie in $n + 1$ Würfen mindestens einmal eine der Folgen KKK, SSS wahrzunehmen.

Die ununterbrochene mehrmalige Folge eines von zwei einander ausschliefsenden Ereignissen in einer gegebenen Anzahl von Versuchen ist wiederholt Gegenstand der Untersuchung gewesen, namentlich bei englischen Mathematikern, welche eine solche Erscheinung „run of luck“ nennen. De Morgan[2]) hat gezeigt, dafs entgegen der weitverbreiteten Meinung, welche darin etwas Aufsergewöhnliches erblickt, gerade das Fehlen solcher ununterbrochener Wiederholungen in einer grofsen Reihe von Versuchen überraschen müfste; dabei

spricht er von einem run of luck erst dann, wenn es sich mindestens um dreimalige Wiederholung desselben Falles handelt.

17. Laplace hat die Integration der Differenzengleichungen und mit dieser die analytische Theorie der Wahrscheinlichkeiten auf ein neues mathematisches Hilfsmittel gestützt, auf die von ihm begründete Theorie der erzeugenden Functionen (fonctions génératrices). Dieselbe ward von ihm zuerst in dem unter[6]) genannten Mémoire veröffentlicht und ist von hier fast unverändert in die „Théorie analytique des probabilités"[13]) übergegangen, worin sie den ersten Teil des ersten Buches ausmacht.

Der Grundgedanke dieser Lehre besteht in Folgendem. Es sei u eine Function von t, welche in eine nach positiven ganzen Potenzen dieser Variablen fortschreitende Reihe sich entwickeln läſst; in dieser Entwicklung

$$u = P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + \cdots + P_x t^x + \cdots$$

ist der Coefficient P_x von t^x im allgemeinen eine Function des (ganzzahligen) Zeigers x. Laplace nennt nun u die erzeugende Function von P_x und umgekehrt P_x die von u erzeugte Function.

Aus dieser Definition folgert man leicht die folgenden Thatsachen:

Ist u die erzeugende Function von P_x, v jene von Q_x, so ist $u \pm v$ die erzeugende Function von $P_x \pm Q_x$.

Ist u die erzeugende Function von P_x, so erzeugt $\frac{u}{t^n}$ die Function P_{x+n}.

Aus dem Zusammenhang dieser beiden Sätze ergeben sich wichtige Folgerungen.

Wenn u erzeugende Function von P_x ist, so wird durch $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)$ die Function $P_{x+1} - P_x = \triangle P_x$ erzeugt; mithin erzeugt $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2$ die Function $\triangle P_{x+1} - \triangle P_x = \triangle^2 P_x$, allgemein $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i$ die Function $\triangle^i P_x$. Hiermit ist schon der Zusammenhang mit der Differenzenrechnung hergestellt; kennt man nämlich die erzeugende Function der Functionsfolge $P_0, P_1, \cdots P_x, \cdots$, so kann man aus derselben durch eine einfache algebraische Operation die erzeugenden Functionen ihrer verschiedenen Differenzenreihen herstellen.

Ist ferner u erzeugende Function von P_x, und

$$s = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \cdots + \frac{q}{t^n}$$

eine ganze Function von $\frac{1}{t}$, so erzeugt us die Function

$$aP_x + bP_{x+1} + cP_{x+2} + \cdots + qP_{x+n} = \nabla P_x.$$

Durch Wiederholung dieses Schlusses kommt man zu der Erkenntnis,

daſs us^i die Function $\nabla^i P_x$ erzeugt; dabei bedeutet $\nabla^2 P_x$ dasjenige, was aus ∇P_x wird, wenn man in dem zugehörigen Ausdruck jedes P_x durch das entsprechende ∇P_x ersetzt u. s. w.

Man kann sich des weiteren die Frage vorlegen, was durch $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-1}$ und allgemein durch $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-i}$ erzeugt werde, wenn u die erzeugende Function von P_x ist. Die Antwort ergiebt sich aus dem Ansatz

$$\begin{aligned} u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-1} &= (t+t^2+t^3+\cdots)(P_0+P_1t+P_2t^2+\cdots) \\ &= P_0t+(P_0+P_1)t^2+(P_0+P_1+P_2)t^3+\cdots \\ &\quad +(P_0+P_1+\cdots+P_{x-1})t^x+\cdots, \end{aligned}$$

welcher zeigt, daſs $P_0+P_1+\cdots+P_{x-1}=\Sigma P_x$ die von $z=u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-1}$ erzeugte Function ist. Wiederholt man diesen Schluſs, so ergiebt sich, daſs durch $z=u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-i}$ die Function $\Sigma^i P_x$ erzeugt wird; dabei bedeutet $\Sigma^2 P_x$ dasjenige, was aus ΣP_x wird, wenn in dem zugehörigen Ausdruck jedes P_x durch das entsprechende ΣP_x ersetzt wird u. s. w.

Umgekehrt, ist z die erzeugende Function von ΣP_x, so erzeugt $z\left(\frac{1}{t}-1\right)$ die Function P_x, nach früherem $\triangle\Sigma P_x$, sodaſs die durch $\triangle$ und Σ angezeigten Operationen invers sind. Allgemein, ist z die erzeugende Function von $\Sigma^i P_x$, so erzeugt $z\left(\frac{1}{t}-1\right)^i$ die Function P_x, muſs also, wenn man die Entwicklung nach t auf positive ganze Potenzen beschränkt, mit u übereinstimmen, so daſs

$$z\left(\frac{1}{t}-1\right)^i = u+\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\cdots+\frac{F}{t^i},$$

woraus

$$z=\frac{ut^i+At^{i-1}+Bt^{i-2}+\cdots+F}{(1-t)^i},$$

wobei $A, B, \cdots F$ Constanten bedeuten, welche den willkürlichen Constanten, die bei den i successiven Integrationen $\Sigma^i P_x$ sich einstellen, entsprechen.

Es sei wieder u erzeugende Function von P_x und $s = a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n$ mit den constanten Coefficienten $a_0, a_1, \cdots a_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} us &= (a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n)(P_0+P_1t+P_2t^2+\cdots) \\ &= a_0P_0+(a_0P_1+a_1P_0)t+(a_0P_2+a_1P_1+a_2P_0)t^2+\cdots \\ &\quad +(a_0P_x+a_1P_{x-1}+\cdots+a_nP_{x-n})t^x+\cdots \end{aligned}$$

Ist nun P_x eine solche Function, daſs für alle $x > n$ die Relation

$$a_0 P_x + a_1 P_{x-1} + \cdots a_n P_{x-n} = 0 \qquad (\alpha)$$

besteht, so reducirt sich us auf die ersten n Glieder, d. h. es wird

$$us = A_0 + A_1 t + \cdots + A_{n-1} t^{n-1},$$

wenn zur Abkürzung

$$a_0 P_0 = A_0, \quad a_0 P_1 + a_1 P_0 = A_1, \cdots \cdot$$
$$a_0 P_{n-1} + a_1 P_{n-2} + \cdots + a_{n-1} P_0 = A_{n-1}$$

gesetzt wird. Daraus folgt: Genügt die Function P_x der linearen homogenen Differenzengleichung (α), so hat sie zur Erzeugenden die Function

$$u = \frac{A_0 + A_1 t + \cdots + A_{n-1} t^{n-1}}{s}$$

mit den willkürlichen Constanten $A_0, A_1, \cdots A_{n-1}$.

Bezüglich der Ausdehnung des Begriffs der erzeugenden Function auf zwei Variable genüge die folgende Andeutung. Läſst u als Function zweier Variablen t, v sich nach positiven ganzen Potenzen derselben entwickeln, so hat die Entwicklung die Form

$$\begin{aligned} u = P_{00} &+ P_{10} t + P_{20} t^2 + \cdots + P_{x0} t^x + \cdots \\ &+ P_{01} v + P_{11} tv + P_{21} t^2 v + \cdots + P_{x1} t^x v + \cdots \\ &+ P_{02} v^2 + P_{12} tv^2 + P_{22} t^2 v^2 + \cdots + P_{x2} t^x v^2 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ P_{0y} v^y + P_{1y} tv^y + P_{2y} t^2 v^y + \cdots + P_{xy} t^x v^y + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

und es wird u als die erzeugende Function von $P_{x,y}$ bezeichnet. Die partiellen Differenzen $\triangle_x P_{x,y}$ und $\triangle_y P_{x,y}$ werden erzeugt durch die Functionen $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)$, $u\left(\frac{1}{v} - 1\right)$ beziehungsweise; desgleichen erkennt man, daſs die $(i+k)$-te Differenz $\triangle_x^i \triangle_y^k P_{x,y}$ zur erzeugenden Function den Ausdruck $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i \left(\frac{1}{v} - 1\right)^k$ hat. Hingegen ergiebt sich, wenn z die erzeugende Function des $(i+k)$-fachen Integrals $\Sigma_x^i \Sigma_y^k P_{x,y}$ bedeutet, während u die erzeugende Function von $P_{x,y}$ ist, daſs

$$z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i \left(\frac{1}{v} - 1\right)^k = u + \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \cdots + \frac{F}{t^i} + \frac{A'}{v} + \frac{B'}{v^2} + \cdots + \frac{F'}{v^k},$$

worin $A, \cdots F$; $A', \cdots F'$ willkürliche Constante in der Anzahl $i + k$ bedeuten.

Ist es gelungen, für eine unbekannte Function P_x, resp. $P_{x,y}$, auf Grund der Differenzengleichung, der sie zu genügen hat, die erzeugende Function abzuleiten, so führt deren Entwicklung in eine Potenzreihe zur Bestimmung von P_x, resp. $P_{x,y}$ selbst.

Zur Illustration diene das folgende Problem:

Von zwei Spielern A, B fehlen dem ersten x, dem zweiten y Punkte, um das Spiel zu gewinnen; derjenige von beiden, welcher zuerst die fehlenden Punkte erlangt hat, gewinnt. Wie grofs ist für A die Wahrscheinlichkeit, das Spiel zu gewinnen, vorausgesetzt, dafs bezüglich des einzelnen Punktes die Chancen beider gleich stehen?

Bezeichnet man die verlangte Wahrscheinlichkeit mit $P_{x,y}$ und denkt sich das Spiel um einen Punkt fortgesetzt, so kann zweierlei eintreten: entweder gewinnt ihn A (Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$) oder B (Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$); im ersten Falle hat A für das Gewinnen des ganzen Spiels die Wahrscheinlichkeit $P_{x-1,y}$, im zweiten Falle aber die Wahrscheinlichkeit $P_{x,y-1}$; mithin ist:

$$(\beta) \qquad P_{x,y} = \tfrac{1}{2} P_{x-1,y} + \tfrac{1}{2} P_{x,y-1},$$

und dies ist die Differenzengleichung, um deren Lösung es sich handelt.

Ist u die erzeugende Function von $P_{x,y}$, so construire man mit Hilfe derselben die Function $u\left(1 - \frac{t}{2} - \frac{v}{2}\right)$; ihre Entwicklung gestaltet sich nach dem oben für u gegebenen Schema wie folgt:

$$u\left(1 - \frac{t}{2} - \frac{v}{2}\right)$$

$$= \sum \left(P_{x,y} - \tfrac{1}{2} P_{x-1,y} - \tfrac{1}{2} P_{x,y-1}\right) t^x v^y + \sum P_{0x,} t^x - \tfrac{1}{2} \sum P_{x-1,0} t^x$$
$$+ \sum P_{0,y} v^y - \tfrac{1}{2} \sum P_{0,y-1} v^y;$$

die erste Summe bezieht sich auf alle $x > 0$, $y > 0$; die zwei nächsten auf alle $x > 0$, die beiden letzten auf alle $y > 0$; das solchermafsen nicht auftretende $P_{0,0}$ hat ohnehin den Wert Null, weil der Fall, dafs keinem der Spieler ein Punkt noch fehlt, nicht eintreten kann.

Die erste der Summen verschwindet kraft der Gleichung (β); die beiden nächsten verschwinden gleichfalls, weil jedes $P_{x,0} = 0\,(x > 0)$, da A nicht gewinnen kann, wenn dem B kein Punkt mehr fehlt; die beiden letzten Summen verwandeln sich in $\sum\limits_1^\infty v^y - \frac{1}{2} \sum\limits_2^\infty v^y$, weil jedes $P_{0,y} = 1\,(y > 0)$, da A notwendig gewinnt, wenn ihm kein Punkt mehr fehlt, und $P_{0,0} = 0$ ist.

Hiernach ist

$$u\left(1 - \frac{t}{2} - \frac{v}{2}\right) = \frac{v}{1-v} - \frac{v^2}{2(1-v)},$$

und die erzeugende Function von $P_{x,y}$:

$$u = \frac{v\left(1 - \frac{v}{2}\right)}{\left(1 - v\right)\left(1 - \frac{t}{2} - \frac{v}{2}\right)}.$$

Entwickelt man zunächst nach t, so wird

$$u = \frac{v}{1 - v} \frac{1}{1 - \frac{t}{2\left(1 - \frac{v}{2}\right)}}$$

$$= \frac{v}{1 - v}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{t}{1 - \frac{v}{2}} + \frac{1}{2^2}\frac{t^2}{\left(1 - \frac{v}{2}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{2^x}\frac{t^x}{\left(1 - \frac{v}{2}\right)^x} + \cdots\right\};$$

das mit $\frac{t^x}{2^x}$ behaftete Glied dieser Entwicklung hat zum zweiten Factor

$$\frac{v}{1 - v}\left(1 - \frac{v}{2}\right)^{-x}$$

$$= \left(v + v^2 + v^3 + \cdots\right)\left(1 + \frac{x}{1}\frac{v}{2} + \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2}\frac{v^2}{2^2} + \cdots\right),$$

und der Coefficient von v^y hierin ist

$$\sum_{0}^{y-1}{}_{\mu} \frac{x(x+1)\cdots(x+\mu-1)}{1 \cdot 2 \cdots \mu}\frac{1}{2^\mu}.$$

Mithin ist der Coefficient von $t^x v^y$ aus der ganzen Entwicklung von u, also das verlangte $P_{x,y}$ oder die Wahrscheinlichkeit, dafs A gewinnen werde,

$$P_{x,y} = \frac{1}{2^x}\left\{1 + \frac{x}{1}\frac{1}{2} + \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2}\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{x(x+1)\cdots(x+y-2)}{1 \cdot 2 \cdots (y-1)}\frac{1}{2^{y-1}}\right\}.$$

Die Theorie der erzeugenden Functionen hat in späteren Schriften über Wahrscheinlichkeitsrechnung wenig Aufnahme gefunden; sie hat auch, namentlich seit der Ausbildung des Operationscalculs, an Bedeutung eingebüfst. Nichtsdestoweniger mufs sie unter den bedeutendsten Leistungen genannt werden, welche sich an Laplace's Namen knüpfen.

18. Unter den sehr zahlreichen Problemen, welche im Laufe der Zeit gestellt und gelöst worden sind, giebt es einige, welche immer wieder die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich zogen, und an denen die verschiedenen Methoden ihre Kraft zu erproben hatten; so sind denn diese Probleme mit der Entwicklungsgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufs engste verknüpft. Einige derselben sollen hier in Kürze verfolgt werden.

Das Teilungsproblem, von den französischen Geometern „problème des partis“, von den englischen „problem of points“ genannt, verdient schon aus dem Grunde besondere Beachtung, weil es zu denjenigen gehört, welche den Impuls zur Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie gegeben haben. In seiner einfachsten Form ward es von einem Nichtmathematiker, dem Chevalier de Meré, Pascal[1]) zur Lösung vorgelegt: Von zwei Spielern fehlt jedem eine gegebene Anzahl von Punkten zum Gewinnen des Spieles; wie haben sie sich in den Einsatz zu teilen, wenn sie ohne das Spiel zu beenden sich trennen?

Es ist bemerkenswert, dafs Pascal sofort ein Verfahren angiebt, welches in viel späterer Zeit zur allgemeinen Lösung des Problems benutzt worden ist: er stellt sich auf den Standpunkt, das Spiel sei noch um einen Punkt fortgesetzt worden, und aus den sich ergebenden Eventualitäten leitet er die Lösung ab; die Betrachtung wird lediglich an besonderen Fällen durchgeführt. Eine andere Methode giebt Fermat[1]) an, dem Pascal die Aufgabe im Briefwechsel mitgeteilt hatte; dieselbe beruht auf dem Gedanken, dafs nach einer bestimmten Anzahl von Punkten das Spiel sicher zur Entscheidung kommen müfste, und zwar ist diese Anzahl gleich der um 1 verminderten Summe der den Spielern fehlenden Punkte; es werden dann auf combinatorischem Wege die Möglichkeiten aufgestellt, welche sich aus der so bestimmten Fortsetzung des Spieles ergeben können; durch Zählung der dem einen und dem anderen Spieler günstigen Combinationen ergeben sich die Chancen, und auf diese allein kommt es bei Beantwortung der Frage an.

Huygens[1]) und Jakob Bernoulli[1]) hielten sich bei Behandlung der von ihnen vorgeführten besonderen Fälle an diese Methoden; ersterer ging insofern weiter, als er die Aufgabe unter einfachen Annahmen auf drei Spieler ausdehnte; letzterer gab in den Zusätzen zu Huygens' Tractat, den er in seine „Ars conjectandi“ aufnahm, eine Tabelle, welche die Chancen liefert für alle Fälle, wo dem einen Spieler bis zu 9, dem anderen bis 7 Punkte fehlen.

Die allgemeine Lösung ist zum ersten Male von Montmort[1]) mitgeteilt worden. Während die bisher erwähnten Autoren an der Annahme festhielten, bezüglich des einzelnen Punktes seien die Chancen beider Spieler gleich, war De Moivre[1, 2]) der erste, welcher diese Wahrscheinlichkeiten als verschieden voraussetzte. Auf dieser Annahme beruhen denn auch die Resultate Montmort's, welcher dem Spieler A die Wahrscheinlichkeit p zuweist, einen einzelnen Punkt zu gegewinnen, und von ihm annimmt, dafs ihm m Punkte noch fehlen; für den zweiten Spieler B heifsen die analogen Zahlwerte q und n. In moderner Schreibweise und mit der Abkürzung $r = m + n - 1$ lautet dann Montmort's Resultat für die Wahrscheinlichkeit, dafs A das Spiel gewinnen werde, in der einen Form

$$p^r + \frac{r}{1} p^{r-1} q + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} p^{r-2} q^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(m+1)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} p^m q^{n-1}, \quad (\alpha)$$

in der zweiten Form

$$p^m \left\{ 1 + mq + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} q^2 + \cdots + \frac{m(m+1)\cdots(r-1)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} q^{n-1} \right\}; \quad (\beta)$$

die auf B bezüglichen Resultate ergeben sich durch gleichzeitige Vertauschung von p, q und m, n. Unter der — hier zutreffenden — Voraussetzung $p + q = 1$ stimmen die Ausdrücke (α) und (β) überein, wie sich durch Eliminirung von p und Vergleichung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von q erweisen läſst.

Die Formel (α) beruht auf dem Fermat'schen Gedanken und auf der Binomialformel, für welche Montmort, nebenbei bemerkt, eine Ableitung durch Wahrscheinlichkeitsschlüsse giebt. Bezüglich der gliedweisen Interpretation der Formel (β) sei auf die deutsche Bearbeitung von Meyer's „Cours“ [1]) verwiesen.

In dem unter [3]) angeführten Mémoire hat Lagrange das Teilungsproblem wieder aufgegriffen und als erstes Beispiel der Anwendung der endlichen Differenzenrechnung auf Wahrscheinlichkeitsaufgaben behandelt.

Trembley[1]), der sich gleichfalls mit dem Teilungsproblem befaſst, kehrt zwar wieder zur combinatorischen Methode zurück; seine Untersuchung ist aber insofern bemerkenswert, als sie sich auch auf drei und vier Spieler erstreckt.

Laplace kam auf das problème des partis wiederholt zurück; zum erstenmal behandelte er dasselbe in dem in anderer Beziehung wichtigen Mémoire[2]), nahm es in den unter[3]) genannten Untersuchungen über die Integration von Differenzengleichungen wieder auf, um es zugleich auf drei Spieler auszudehnen; in der „Théorie analytique“ [13]) (art. 7 und 8) führte er dessen Lösung in vollster Allgemeinheit für beliebig viele Spieler durch unter Anwendung der Methode der erzeugenden Functionen; indessen muſs bemerkt werden, daſs die richtigen Resultate, von dem Fall zweier Spieler abgesehen, erst im vierten Supplement zu suchen sind, während die betreffenden Formeln im Hauptwerk mit Unrichtigkeiten behaftet erscheinen. Für den speciellen Fall $p = q = \frac{1}{2}$ haben wir den Gang dieser Lösungsart im vorigen Artikel angedeutet, und es stimmt das dort gefundene Resultat mit der Formel (β) dem Sinne nach überein.

Von neueren Darstellungen des Teilungsproblems erwähnen wir die von Mansion[1]), Catalan[3]) und Spitzer[1]), von welchen die letztere sich lediglich mit speciellen Fällen befaſst.

Bemerkenswert ist noch die Darstellung der Resultate durch bestimmte Integrale, welche in Meyer's[1]) „Cours“ (d. Bearb., p. 83) zu finden ist. Bei zwei Spielern und mit den oben eingeführten Bezeichnungen haben A, resp. B die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\int\limits_0^p x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx}{\int\limits_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx}, \text{ beziehungsweise } \frac{\int\limits_0^q x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dx}{\int\limits_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dx},$$

das Spiel zu gewinnen.

19. Ein weiteres Problem, das durch seine historische Entwicklung und die von ihm gemachten Anwendungen gröfseres Interesse beansprucht und eine besondere Bedeutung noch dadurch erlangt hat, dafs es für ein wichtiges Anwendungsgebiet, nämlich für die Fehlertheorie, von fundamentaler Bedeutung geworden ist, hat seinen Ursprung in Würfelspielen genommen. Wir wollen es gleich zu Beginn dieser Ausführung nach demjenigen, welcher zuerst die allgemeine Lösung veröffentlicht hat, das Moivre'sche Problem nennen.

Schon in Huygens'[1]) berühmtem Tractat „De Ratiociniis in Ludo Aleae" finden sich einzelne Aufgaben vor, in welchen es auf die Zählung der Chancen für die verschiedenen Summen ankommt, die mit zwei gewöhnlichen Würfeln fallen können. Jakob Bernoulli[1]) hat in den Zusätzen und Ausführungen, welche er in seiner „Ars conjectandi" dem obigen Tractat beigefügt hat, den Gegenstand um ein beträchtliches weitergeführt; er giebt ein mechanisches Verfahren an und benützt es zur Construction einer Tabelle, um die den möglichen Summen bei 2, 3, 4, · · · Würfeln günstigen Fälle zu zählen. Zunächst wird die Zahlenreihe, bestehend aus sechs 1, welche die Fälle für die Summen 1 bis 6 bei einem Würfel angiebt, sechsmal unter einander gesetzt, jedoch so, dafs sie jedesmal um ein Glied nach rechts vorrückt; sodann werden die Verticalsummen gebildet. Mit ihrer elfgliedrigen Reihe wird ebenso verfahren wie mit der ersten u. s. f.; dadurch ergeben sich die Zahlen der günstigen Fälle für die Summen 2, 3, · · · 12 bei zwei, für die Summen 3, 4, · · · 27 bei drei Würfeln u. s. w. Der Anfang dieses Schemas ist also der folgende:

1	1	1	1	1	1										
	1	1	1	1	1	1									
		1	1	1	1	1	1								
			1	1	1	1	1	1							
				1	1	1	1	1	1						
					1	1	1	1	1	1					
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1					
	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				
		1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1			
			1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1		
				1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	
					1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Die mathematische Begründung dieses Verfahrens liegt darin, dafs Bernoulli die Analogie erkannt hat, welche zwischen den gesuchten Zahlen und den aufeinanderfolgenden Potenzen des Polynoms $x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ besteht. In der That geht die Bildung dieser Potenzen durch successive Multiplication mit dem Polynom nach solchen Gesetzen vor sich, dafs der Coefficient von x^s in der Entwicklung von $(x^1 + x^2 + \cdots + x^6)^n$ die Anzahl der Arten angiebt, auf welche die Summe s bei einem Wurf mit n Würfeln entstehen kann; man braucht diesen Coefficienten nur durch 6^s zu dividiren, um die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt jener Summe zu erhalten.

Aus der Verallgemeinerung dieser Würfelaufgabe entsteht nun das Moivre'sche Problem, dem man eine der folgenden Fassungen geben kann: Es sind n Würfel vorhanden, jeder mit f Seiten, die mit den Nummern 1 bis f bezeichnet sind; dieselben werden beliebig hingeworfen; man soll die Anzahl der Arten bestimmen, auf welche die durch die oberen Würfelseiten angezeigte Summe einer gegebenen Zahl p gleich sein kann. — Oder: Eine Urne enthält f Kugeln, welche der Reihe nach mit 1 bis f bezeichnet sind; man greift blindlings in die Urne, zieht eine Kugel hervor und legt sie, nachdem man die auf ihr verzeichnete Nummer notirt hat, wieder zurück; auf wie viele Arten kann in n Ziehungen die Summe p entstehen?

Die Formel, welche die Lösung dieser Aufgabe enthält, ist zuerst ohne Beweis von De Moivre[1]) in dessen „Mensura Sortis" veröffentlicht worden; sie lautet, wenn man $p - n = s$ setzt:

$$\frac{n(n+1)\cdots(n+s-1)}{1\cdot 2\cdots s} - \frac{n}{1}\,\frac{n(n+1)\cdots(n+s-f-1)}{1\cdot 2\cdots(s-f)}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{n(n+1)\cdots(n+s-2f-1)}{1\cdot 2\cdots(s-2f)} - \cdots \qquad (\alpha)$$

und ist so weit fortzusetzen, als die in den Gliedern auftretenden Factoren positiv bleiben. Den Beweis dazu, der darauf beruht, dafs die gesuchte Anzahl als Coefficient von x^p in der Entwicklung von $(x^1 + x^2 + \cdots + x^f)^n$ oder, was auf das nämliche hinauskommt, als Coefficient von x^{p-n} in der Entwicklung von $(1 + x + \cdots + x^{f-1})^n = (1 - x^f)^n (1 - x)^{-n}$ sich ergiebt, hat De Moivre[4]) in den „Miscellanea Analytica" gegeben, gewifs unabhängig von Montmort[1]), welcher in der zweiten Auflage seines „Essai" die Formel zwar ableitet, aber auf einem anderen umständlichen Wege.

Laplace[13]) läfst in der „Théorie analytique" dem Problem in einer etwas abgeänderten Formulirung eine sehr eingehende Behandlung angedeihen. Er nimmt zunächst an, eine Urne enthalte $n + 1$ Kugeln, die durch die Nummern 0, 1, $\cdots n$ unterschieden sind; man zieht eine Kugel und legt sie nachher wieder zurück; gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit, dafs nach i Ziehungen die erlangte Summe s sein werde.

Die Analyse, durch welche **Laplace** zur Lösung dieser Aufgabe kommt, gehört zu den schwierigsten in dem genannten Werke; viel einfacher läfst sich das von ihm gefundene Resultat

$$\frac{1}{(n+1)^i}\left\{\frac{(s+1)(s+2)\cdots(s+i-1)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}-\frac{i}{1}\frac{(s-n)(s-n+1)\cdots(s+i-n-2)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}\right.$$
$$\left.+\frac{i(i-1)}{1\cdot 2}\frac{(s-2n-1)(s-2n)\cdots(s+i-2n-3)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}-\cdots\right\} \quad (\beta)$$

nach der vorhin beschriebenen Methode ableiten, wie dies auch von **Lubbock**[1]) und **De Morgan**[2]) befolgt worden ist.

Von dieser Formel hat **Laplace** dann den Übergang zu dem Wurf mit i Würfeln, deren $n+1$ Seiten mit den Nummern $1, 2, \cdots n+1$ bezeichnet sind, hergestellt; wird jetzt die erzielte Summe s' genannt, so hat man blofs $s = s' - i$ zu setzen, um aus (β) die nun geltende Formel

$$\frac{1}{(n+1)^i}\left\{\frac{(s'-1)(s'-2)\cdots(s'-i+1)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}\right.$$
$$-\frac{i}{1}\frac{(s'-n-2)(s'-n-3)\cdots(s'-i-n)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}$$
$$\left.+\frac{i(i-1)}{1\cdot 2}\frac{(s'-2n-3)(s'-2n-4)\cdots(s'-i-2n-1)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}-\cdots\right\} (\gamma)$$

zu erhalten. Man überzeugt sich leicht, dafs der in der grofsen Klammer enthaltene Ausdruck mit (α) übereinstimmt; es braucht nur die Correspondenz der Buchstaben: $n = i$, $p = s'$, $f = n + 1$, $s = s' - i$ beachtet zu werden.

Mit der Formel (β) hat **Laplace** den Grenzübergang $\lim s = \infty$ und $\lim n = \infty$ $\left(\text{bei endlichem und bestimmtem} \lim \frac{s}{n}\right)$ ausgeführt, jedoch nur das Resultat mitgeteilt. In anschaulicher Weise und einer Form, die für gewisse Anwendungen vorbereitet, hat diesen Grenzübergang **De Morgan**[2]) vollzogen. Er nimmt an, die Kugeln seien statt mit $0, 1, \cdots n$ mit $0, 1\theta, 2\theta, \cdots n\theta$ markirt; dann drückt (β) die Wahrscheinlichkeit aus, dafs die in i Ziehungen zustandegekommene Summe $s\theta$ sein werde. Wird nun

$\left.\begin{array}{l}\lim n = \infty\\ \lim s = \infty\end{array}\right\}$ $\lim \theta = 0$, jedoch so, dafs $\lim n\theta = N$ die höchste zu ziehende Zahl, $\lim s\theta = S$ die Summe ist, nach deren Wahrscheinlichkeit gefragt ist, so liefert (β) zunächst den Ausdruck

$$\frac{\theta}{1\cdot 2\cdots(i-1)N}\left\{\left(\frac{S}{N}\right)^{i-1}-\frac{i}{1}\left(\frac{S}{N}-1\right)^{i-1}\right.$$
$$\left.+\frac{i(i-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{S}{N}-2\right)^{i-1}-\cdots\right\};$$

derselbe bedeutet, da θ die kleinste Änderung vorstellt, deren S fähig ist, und daher mit dS zu bezeichnen ist, die Wahrscheinlichkeit einer zwischen S und $S + dS$ liegenden Summe. Integrirt man ihn in Bezug auf S zwischen den Grenzen 0 und S, so ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, dafs die in i Ziehungen erzielte Summe zwischen 0 und S liegen werde, und zwar gleich

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots i}\left\{\left(\frac{S}{N}\right)^i - \frac{i}{1}\left(\frac{S}{N}-1\right)^i + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{S}{N}-2\right)^i - \cdots\right\}. \quad (\delta)$$

Gegenüber der bisherigen Fassung läfst das Moivre'sche Problem eine Verallgemeinerung in dem Sinne zu, dafs die bisher als gleich vorausgesetzten Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Würfelseiten oder Kugeln für möglich erachtet werden. Dieser Auffassung entspricht die folgende Formulirung des Problems, in der es grundlegend geworden ist für die Theorie der Beobachtungsfehler: „In einer Urne befinden sich $\sum_{-m}^{m} {}_r N_r$ Marken; N_{-m} davon sind mit $-m$, N_{-m+1} mit $-m+1, \cdots N_{-1}$ mit -1, N_0 mit 0, N_1 mit $1, \cdots N_m$ mit m beschrieben; man vollführt n Ziehungen, die gezogene Marke jedesmal zurücklegend, nachdem die darauf verzeichnete Zahl notirt worden ist. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die beobachtete Summe ns sein werde?"

Formell ist die Lösung dieser Aufgabe durch einen Bruch gegeben, dessen Zähler der Coefficient von x^{ns} in der Entwicklung

$$(N_{-m}x^{-m} + N_{-m+1}x^{-m+1} + \cdots + N_0x^0 + \cdots + N_mx^m)^n$$

und dessen Nenner $\left(\sum_{-m}^{m} N_r\right)^n$ ist. Auf die weitere analytische Durchführung dieses Gedankens werden wir im sechsten Abschnitt (Art. 56) zu sprechen kommen.

Schliefslich möge einer Behandlung des Moivre'schen Problems in der ursprünglichen Form, Würfelversuche betreffend, aus neuerer Zeit durch Bierens de Haan[1]) gedacht werden.

20. Ein Problem, das zur höchsten Anspannung der Kräfte der Analysis Anlafs gab und dessen Geschichte sich an die bedeutendsten Namen im Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung knüpft, ist dasjenige, welches in der englischen Litteratur seit De Moivre den Namen „problem of duration of play" führt und das wir als Problem der Spieldauer bezeichnen wollen.

Sein Ursprung ist in der letzten von den fünf Aufgaben zu suchen, welche Huygens[1]) am Schlusse seiner Schrift „De ratiociniis etc." zur Lösung vorgelegt hat. Sie lautet folgendermafsen: Zwei Spieler A und B haben jeder 12 Spielmarken und spielen mit drei Würfeln unter solchen Bedingungen, dafs A dem B eine Marke

giebt, wenn die Summe 11 fällt, dagegen B dem A eine, wenn 14 fällt; Gewinner ist derjenige von beiden, welcher zuerst alle Marken hat. Es soll gezeigt werden, dafs die Chaneen von A und B sich verhalten wie 244 140 625 zu 282 429 536 481.

Jakob Bernoulli[1]), der Huygens' Schrift in seiner „Ars conjectandi" commentirte, gab die Lösung für ein verallgemeinertes Problem, jedoch ohne den Beweis dafür mitzuteilen. Der Spieler A habe m, jener B n Marken und ihre Chancen für ein einzelnes Spiel mögen sich verhalten wie $a:b$; der Verlierende in jedem Spiele giebt seinem Gegner eine Marke; es ist für jeden der Spieler die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dafs er alle Marken seines Gegners gewinnen werde.

Die Lösung der Aufgabe in dieser Gestalt bietet den modernen Hilfsmitteln gegenüber keine Schwierigkeit. Bezeichnet man für den Spieler A in dem Augenblicke, wo er x Marken besitzt, die Wahrscheinlichkeit, alle Marken an sich zu bringen, mit u_x, so führt die Fortsetzung um ein Spiel zu der Differenzengleichung

$$u_x = \frac{a}{a+b} u_{x+1} + \frac{b}{a+b} u_{x-1};$$

ihr allgemeines Integral ist

$$u_x = C_1 + C_2 \left(\frac{b}{a}\right)^x;$$

da aber $u_0 = 0$ und $u_{m+n} = 1$ sein mufs, so lautet die endgiltige Lösung

$$u_x = \frac{a^{m+n} - a^{m+n-x} b^x}{a^{m+n} - b^{m+n}};$$

am Beginn des Spiels ist aber $x = m$, daher die Wahrscheinlichkeit

$$\text{für } A\colon \frac{a^n(a^m - b^m)}{a^{m+n} - b^{m+n}}, \quad \text{für } B\colon \frac{b^m(a^n - b^n)}{a^{m+n} - b^{m+n}}. \qquad (\alpha)$$

Todhunter[1]) bemerkt, dafs diese von J. Bernoulli gegebene Formel zum erstenmal in dem Briefwechsel zwischen Daniel Bernoulli und Montmort vorkommt; veröffentlicht und mit einem Beweis versehen wurde sie zuerst von De Moivre[1]) in der „Mensura sortis". Später hat auch Laplace[5]) das Problem in der hier besprochenen Form behandelt.

Aber erst durch die Fragestellung, welche Montmort und De Moivre dem Problem gegeben, ist es zu einem der schwierigsten der Wahrscheinlichkeitsrechnung geworden und hat jenen Sinn erlangt, welcher in seinem Namen angedeutet ist. De Moivre's[2]) Formulirung ist die folgende: Zwei Spieler A und B haben beziehungsweise m und n Marken, und ihre Chancen, das einzelne Spiel zu gewinnen, verhalten sich wie a zu b; der Verlierende giebt jedesmal

seinem Gegner eine Marke; verlangt wird die Wahrscheinlichkeit, daſs, wenn oder bevor eine bestimmte Anzahl von Spielen durchgeführt ist, einer der Spieler alle Marken des Gegners an sich gebracht hat.

Was De Moivre zur Lösung dieser Aufgabe beigebracht hat, bildet ohne Zweifel den wichtigsten Teil seiner beiden Hauptwerke, der „Mensura sortis“ und der „Doctrine of chances“; er selbst giebt der gerechten Befriedigung über diese seine Leistung in der Vorrede zu dem letztgenannten Werke beredten Ausdruck. Die Resultate, die er ohne Beweis hingestellt hat, sind durch die späteren Forschungen als richtig erwiesen worden.

Er giebt zuerst mechanische Regeln für den einfacheren Fall $m = n$ an, wo also beide Spieler am Beginn des Spieles gleich viele Marken besitzen, läſst dann diese Einschränkung fallen und stellt die allgemeinen Regeln auf; zum Schlusse specialisirt er das Problem dahin, daſs der Spieler A ein unbegrenztes Vermögen besitze oder daſs m unendlich sei. Auch für diesen Specialfall giebt er zwei mechanische Verfahren an, deren zweites auf der später von Laplace[13]) abgeleiteten Formel beruht, nach welcher die Wahrscheinlichkeit, daſs der Spieler A seinen Gegner B bei dem $(n + 2x)$-ten Spiele oder vorher ruinirt haben werde, gleichkommt

$$a^n \Big\{ 1 + nab + \frac{n(n+3)}{1 \cdot 2} a^2 b^2 + \frac{n(n+4)(n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b^3 + \cdots + \frac{n(n+x+1)(n+x+2) \cdots (n+2x-1)}{1 \cdot 2 \cdots x} a^x b^x \Big\}, \qquad (\beta)$$

vorausgesetzt, daſs $a + b = 1$ oder daſs a, b schon die Wahrscheinlichkeiten sind, welche A und B für das Gewinnen des einzelnen Spieles besitzen.

Vor De Moivre schon hat Montmort[1]) mit der Lösung des vorliegenden Problems unter der vereinfachenden Voraussetzung, daſs bei dem einzelnen Spiel die Chancen beider Teilnehmer gleich stehen, erfolgreich sich beschäftigt und Daniel Bernoulli veranlaſst, dem Problem seine Aufmerksamkeit zuzuwenden; De Moivre nimmt auf diese Vorarbeiten Bezug, hat sie aber weitaus überholt.

Lagrange[3]) hat an dem Problem der Spieldauer die Leistungsfähigkeit seiner Methoden für die Integration von Differenzengleichungen erprobt und glänzend erwiesen. Er behandelt dasselbe zuerst unter der Annahme, daſs A ein unbegrenztes Vermögen besitze, und liefert dabei den Beweis für die Richtigkeit einer der beiden mechanischen Regeln, welche De Moivre für diesen Fall aufgestellt hatte. Für das allgemeine Problem liefert er zwei Lösungen und gelangt wieder zur Begründung einer der Regeln, welche De Moivre für den Fall $m = n$ gegeben hat.

Laplace hat wiederholt mit dem Problem sich beschäftigt und schliefslich die Ergebnisse seiner eigenen und der Untersuchungen von Lagrange in dem inhaltreichen, aber zugleich schwierigen Artikel 10 der „Théorie analytique“ zusammengefafst. Schon in der ersten Arbeit[1]), die er der Wahrscheinlichkeitsrechnung widmet, deutet er einen Weg zur Lösung des Problems an, von den einfachsten Bedingungen $m = n$, $a = b$ ausgehend. In den Untersuchungen über die Integration von Differenzengleichungen[3]) behandelt er einen Fall, der in die „Théorie analytique“ nicht aufgenommen wurde und darin besteht, dafs drei elementare Wahrscheinlichkeiten p, q, r unterschieden werden, die erste, dafs A, die zweite, dafs B, die dritte, dafs keiner von beiden das einzelne Spiel gewinnt.*) In dem wichtigen unter[5]) angeführten Mémoire wird die Aufgabe in der ursprünglichen einfachen Form gelöst, für welche wir oben die Formel (α) angeführt haben. Wie De Moivre[2]), so hat auch Laplace sich mit der Entwicklung von Näherungsrechnungen für die Lösung unseres Problems befafst, die dann zur Anwendung zu kommen hätten, wenn m, n grofse Zahlen sind; die in dieser Richtung in dem unter[11]) genannten Mémoire erzielten Resultate sind dann auch in die „Théorie analytique“ übergegangen und bilden den Schlufs des bezeichneten Artikels.

Auf combinatorischem Wege hat Öttinger[2]) in den §§ 33 und 34 seiner „Wahrscheinlichkeitslehre“ das Problem zum Gegenstande eingehender Untersuchung gemacht; die am Schlusse von ihm geübte Kritik an einigen Resultaten De Moivre's und Laplace's ist schon von Todhunter[1]) als unzutreffend gekennzeichnet worden.

21. Zu einer grofsen Zahl wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen hat das Lotteriespiel in seinen verschiedenen Formen**), insbesondere die Genueser Lotterie, die in einigen Staaten als öffentliche Einnahmequelle eingeführt worden ist und zum Teil noch besteht, Anlafs gegeben. Wir wollen hier jedoch nur zwei Probleme näher betrachten, die mathematisches Interesse bieten und in der Entwicklungsgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Rolle spielen.

Das erste Problem betrifft die Sequenzen oder Ziffernfolgen. Es ist von Euler[6]) und von Johann Bernoulli[2]) unter zwei verschiedenen Auffassungen behandelt worden. In einer Ziehung von der Structur 7, 8, 52, 53, 54 sprechen beide von einer zweigliedrigen und einer dreigliedrigen Sequenz; in einer Ziehung von der Art 7,

---

*) Dies würde allerdings dem von Huygens ursprünglich gestellten Problem entsprechen.

**) Eine complicirte Form, unter dem Namen „jeu de loto“ als Gesellschaftsspiel bekannt, bei welcher die Nummern 1—90 auf Gruppen von je 6 Karten zu je 15 Nummern nach gewissen Gesetzen verteilt sind, ist von Du Hays[1]) theoretisch untersucht worden.

8, 89, 90, 1 erblickt jedoch Euler zwei zweigliedrige Sequenzen, Bernoulli hingegen, der sich die neunzig Nummern cyklisch angeordnet denkt und daher auf 90 wieder 1 folgen läfst, eine zwei- und eine dreigliedrige Ziffernfolge.

Euler fand, wenn aus n Nummern 2, 3, 4, 5 Nummern gezogen werden, als Wahrscheinlichkeit, dafs keine Ziffernfolge auftreten werde, beziehungsweise

$$\frac{n-2}{n}, \quad \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}, \quad \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)}, \quad \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)};$$

Bernoulli giebt ohne Beweis an, dafs man, um diese Formeln seiner Auffassung anzupassen, nur durchwegs n zu ersetzen habe durch $n-1$; Todhunter[1]) hat die Angabe als richtig erwiesen.

Eingehend ist das Problem von Beguelin[1]) nach einer eigentümlichen combinatorischen Methode behandelt worden; derselbe gab auch für beide Auffassungen allgemeine Formeln. Als Beispiel mögen einige davon hierher gesetzt werden. Besteht die Lotterie aus n Nummern und werden in jeder Ziehung 5 davon gehoben, so ist die Anzahl der günstigen Fälle

	nach Euler	nach Bernoulli
für eine 5-gliedrige Sequenz	$n-4$	n
für eine 4-gliedrige Sequenz	$(n-5)(n-4)$	$n(n-6)$
für eine 3-gliedrige combinirt mit einer 2-gliedrigen . . .	$(n-5)(n-4)$	$n(n-6)$
blofs für eine 3-gliedrige Sequenz . .	$\frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{1\cdot 2}$	$\frac{n(n-7)(n-6)}{1\cdot 2}$
für zwei 2-gliedrige Sequenzen	$\frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{1\cdot 2}$	$\frac{n(n-7)(n-6)}{1\cdot 2}$
blofs für eine 2-gliedrige Sequenz . .	$\frac{(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\frac{n(n-8)(n-7)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}$;

man braucht, um die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten zu erhalten, diese Zahlen nur durch $\binom{n}{5}$ zu dividiren.

Das zweite, mathematisch weitaus bedeutendere Problem ist das der Erschöpfung einer vorgegebenen Reihe von Nummern oder aller Nummern der Lotterie in einer bezeichneten Anzahl von Ziehungen. Sein Ursprung führt auf De Moivre[2]) zurück, und zwar auf die folgende von ihm gelöste Aufgabe: Es ist die Erwartung des A zu bestimmen, wenn er es unternimmt, mit einem Würfel von einer

gegebenen Anzahl (n) Seiten in einer bestimmten Anzahl (x) von Würfen eine Anzahl (m) bestimmt bezeichneter Seiten zu treffen. Das Resultat, zu welchem De Moivre durch ein Inductionsverfahren gelangt und das er in Worten ausdrückt, besteht in moderner Bezeichnung darin, dafs die Anzahl der günstigen Fälle gegeben ist durch

$$\Delta^m (n-m)^x = n^x - \binom{m}{1}(n-1)^x + \binom{m}{2}(n-2)^x - \cdots + (-1)^m (n-m)^x;$$

dividirt man sie durch n^x, so ergiebt sich die verlangte Wahrscheinlichkeit; dieselbe hat nur so lange einen von Null verschiedenen Wert, als $x > m$ ist. Um die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, dafs alle Würfelseiten in den x Würfen zum Vorschein kommen, hat man $m = n$ zu setzen; dies giebt

$$\Delta^x 0^x = n^x - \binom{n}{1}(n-1)^x + \binom{n}{2}(n-2)^x - \cdots + (-1)^{n-1} n\, 1^x.$$

als Anzahl der günstigen Fälle, die durch n^x zu dividiren wäre.

De Moivre kommt auch auf den bemerkenswerten Specialfall zu sprechen, dafs $x = n$ sei, dafs also die n Würfelseiten in n Würfen sämtlich erscheinen sollen; offenbar müssen sie dann ohne Wiederholung in einer der $1 \cdot 2 \cdots n$ Permutationen sich einstellen, und so ergiebt sich denn durch eine Wahrscheinlichkeitsbetrachtung das algebraische Resultat

$$n^n - \frac{n}{1}(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(n-2)^n - \cdots + (-1)^{n-1} n \cdot 1^n = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Auf das Lotteriespiel wurde De Moivre's Problem durch Laplace und Euler übertragen. Die Frage ist nun die folgende: Eine Lotterie besteht aus n Nummern, wovon r in jeder Ziehung gehoben und dann wieder zurückgelegt werden; es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dafs nach i Ziehungen eine bestimmte Anzahl der Nummern oder alle erschienen sein werden.

Euler[8]) findet, ohne auf die Arbeiten seiner Vorgänger, De Moivre und Laplace, Bezug zu nehmen, auf inductivem Wege für die Anzahl der günstigen Fälle, dafs in x Ziehungen mindestens $n - \nu$ von den n Nummern gehoben werden, den Ausdruck*)

$$\binom{n}{r}^x - \binom{n}{\nu+1}\binom{n-\nu-1}{r}^x + (\nu+1)\binom{n}{\nu+2}\binom{n-\nu-2}{r}^x - \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{1 \cdot 2}\binom{n}{\nu+3}\binom{n-\nu-3}{r}^x + \cdots;$$

---

*) Es ist gerade diese Arbeit Euler's, in welcher er das Zeichen $\binom{n}{r}$ für den Binomialcoefficienten einführt.

setzt man darin $\nu = 0$, so zählt der Ausdruck die günstigen Fälle für das Erscheinen aller Nummern; da nun in x Ziehungen höchstens xr Nummern gezogen werden können, so bemerkt Euler, es müsse der Ausdruck

$$\binom{n}{r}^x - n\binom{n-1}{r}^x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\binom{n-2}{r}^x - \cdots$$

Null sein, wenn $n > xr$, und für $n = xr$ müsse er sich in das Product

$$\frac{1\cdot 2 \cdots n}{(1\cdot 2\cdots r)^x}$$

zusammenziehen; denn in diesem Falle darf in der zweiten Ziehung keine Nummer aus der ersten, in der dritten keine Nummer aus den zwei ersten, u. s. f. erscheinen, und die Anzahl solcher Anordnungen ist

$$\binom{n}{r}\binom{n-r}{r}\binom{n-2r}{r}\cdots\binom{r}{r} = \frac{n!}{(r!)^x};$$

es ist dies wieder ein Beispiel der Summirung einer Reihe durch Wahrscheinlichkeitsschlüsse.

Am eingehendsten hat Laplace das Problem behandelt; es bildete den Gegenstand seiner ersten Arbeit[1]) auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die analytische Durchführung der Formeln für den Fall, dafs n und i sehr grofse Zahlen sind, erfolgte in dem unter[8]) angeführten Mémoire; das Ergebnis all dieser Untersuchungen ist im Artikel 4 der „Théorie analytique" zusammengefafst.

Höchst bemerkenswert ist, dafs die Methode, welche er befolgt, mit jener De Moivre's übereinstimmt und dafs sich auch beide Fassungen des Problems im Wesen als übereinstimmend erweisen. Das Resultat, welches er für die Wahrscheinlichkeit findet, dafs in i Ziehungen alle Nummern erschöpft sein werden, hat bei Laplace[13]) die compendiöse Form

$$\left\{\frac{\Delta^n[s(s-1)\cdots(s-r+1)]^i}{[n(n-1)\cdots(n-r+1)]^i}\right\}_{s=0};$$

die praktische Ausführung dieser Formel wird aber um so beschwerlicher, je gröfser n (und somit auch i) ist. Es ist aber eine andere, auch von De Moivre[2]) schon gestellte Frage, welche Laplace analytisch weiter verfolgt bis zur Gewinnung practicabler Gleichungen, die Frage nämlich nach derjenigen Anzahl von Ziehungen, welche ausgeführt werden müfsten, um mit gegebener Wahrscheinlichkeit das Erscheinen aller Nummern erwarten zu dürfen. Er führt zwei Näherungsrechnungen durch, um zu einem approximativen Werte von i zu gelangen; die eine derselben stützt sich auf die im zweiten Teile des ersten Buches entwickelten Theorien über die Functionen grofser Zahlen und verbürgt grofse Schärfe; die andere stellt ein

etwas roheres Näherungsverfahren dar, von dem auch De Moivre bei seinem oben besprochenen Problem Gebrauch gemacht hat. Indessen führten beide Methoden zu wesentlich gleichen Resultaten. Ist die gegebene Wahrscheinlichkeit, mit welcher die Erschöpfung der Nummern erwartet wird, $\frac{1}{2}$, so giebt die erste Methode für i die Formel

$$i = \frac{n-2}{5} \sqrt[n]{2} \left[1 - \frac{1}{2n} - \frac{16}{10\,in} - \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)\right] \log \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2} - 1},$$

woraus sich für $n = 90$ der Wert $i = 85 \cdot 53 \cdots$ berechnet; der zweiten Methode zufolge ist das i unter der gleichen Annahme aus der Gleichung

$$\left[1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right]^n = \tfrac{1}{2}$$

zu berechnen, welche für $n = 90$ den Wert $i = 85 \cdot 204 \cdots$ liefert. Man wettet also bei 85 Ziehungen noch mit einem kleinen Nachteil 1 gegen 1 auf das Erscheinen aller Nummern.

22. Ein weiteres Problem, das sich ständiger Aufmerksamkeit der Mathematiker bis in die jüngste Zeit zu erfreuen hatte, betrifft das zuerst von Montmort[1]) behandelte Rencontre-Spiel, bei den englischen Autoren „game of treize“ genannt. Sein ursprünglicher Wortlaut ist der folgende: Dreizehn mit den Nummern 1, 2, $\cdots$ 13 bezeichnete Karten werden in eine Urne gegeben und gut vermischt, dann einzeln nach einander herausgezogen; es wird die Wahrscheinlichkeit gesucht, dafs wenigstens eine Karte dabei in der sovielten Ziehung erscheint, als es die auf ihr verzeichnete Nummer anzeigt. Das allgemeine Resultat, wenn n die Anzahl der Karten ist, lautet

$$1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdots n}. \qquad (\alpha)$$

In verallgemeinerter Form und scharfsinniger Weise hat De Moivre[2]) das Problem wieder aufgenommen. Eine Reihe von n mit Buchstaben in alphabetischer Ordnung bezeichneten Elementen wird willkürlich angeordnet; es soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dafs p ausgewählte Elemente an ihrem richtigen Platze erscheinen, q andere ihren natürlichen Platz verändern, während die $n - p - q$ übrigen von jeder Einschränkung frei bleiben. De Moivre setzt zuerst alle Buchstaben als einzeln vorkommend voraus und nimmt dann an, dafs jeder einzelne eine bestimmte Anzahl Male vorkomme. Das für den ersten Fall gewonnene von De Moivre in Worten ausgedrückte Resultat lautet in Zeichen

$$\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-p+1)}$$

$$\times \left[1 - \frac{q}{1}\,\frac{1}{n-p} + \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2}\,\frac{1}{(n-p)(n-p-1)} - \cdots\right], \text{ wenn } p > 0 \quad (\beta)$$

und

$$1 - \frac{q}{1}\frac{1}{n} + \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2}\frac{1}{n(n-1)} - \cdots, \text{ wenn } p = 0; \qquad (\gamma)$$

setzt man in (γ) $q = n$, so ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, dafs kein Element seinen natürlichen Platz einnimmt; diese von 1 subtrahirt liefert die Wahrscheinlichkeit, dafs mindestens eines an seinem Platze erscheint, in Übereinstimmung mit (α).

Euler[1]) hat dem Problem eine eigene Untersuchung gewidmet und bereits die Bemerkung gemacht, dafs für $\lim n = \infty$ das Resultat (α) sich in $1 - e^{-1}$ verwandelt.

Unabhängig von seinen Vorgängern scheint Lambert[1]) zu der Aufgabe gelangt zu sein, der er folgende interessante Fassung gab: Jemand hat n Briefe und n Couverts geschrieben; er steckt die Briefe ohne Wahl in die Couverts; wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs alle Briefe oder eine bezeichnete Anzahl derselben in die richtigen Couverts kommen?

Laplace[13]) widmet dem Rencontrespiel den Artikel 9 der „Théorie analytique". Er setzt eine Urne mit $n \times r$ Kugeln voraus, wovon r mit 1, r mit 2, $\cdots r$ mit n bezeichnet sind, und stellt die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dafs mindestens eine Kugel, dann dafs mindestens s Kugeln ihrem Range gemäfs gezogen werden. Für den ersten Fall gewinnt er die Formel

$$1 - \frac{(n-1)r}{1 \cdot 2(nr-1)} + \frac{(n-1)(n-2)r^2}{1 \cdot 2 \cdot 3(nr-1)(nr-2)} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)r^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(nr-1)(nr-2)(nr-3)} + \cdots, \qquad (\delta)$$

welche sich für $r = 1$ sofort in jene (α) verwandelt; die Lösung der zweiten Frage ist durch die Formel gegeben:

$$\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-s+1)r^{s-1}}{1 \cdot 2 \cdots s(nr-1)(nr-2)\cdots(nr-s+1)} \times \left\{1 - \frac{s}{s+1}\frac{(n-s)r}{nr-s} + \frac{s}{s+2}\frac{(n-s)(n-s-1)r^2}{1 \cdot 2(nr-s)(nr-s-1)} - \cdots\right\}. \qquad (\varepsilon)$$

Die erste Formel wird unter der Voraussetzung, dafs rn eine sehr grofse Zahl ist, einer Approximation unterzogen.

In abgeänderter Fassung hat Catalan[1]) das Problem behandelt. Aus einer Urne, welche m mit verschiedenen Buchstaben bezeichnete Kugeln enthält, werden diese successive einzeln gezogen und die Buchstaben vermerkt; wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs bei Wiederholung der nämlichen Procedur n Kugeln wieder an derselben Stelle erscheinen wie vorhin? Die Antwort findet sich in der Formel

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n}\left[1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} - \cdots + \frac{(-1)^{m-n}}{1 \cdot 2 \cdots (m-n)}\right], \qquad (\zeta)$$

welche für $n = 0$ und $\lim m = \infty$ wieder zu e^{-1} als Wahrscheinlichkeit führt, dafs keine Kugel nach ihrem Range erscheint.

Eine auf einfachen combinatorischen Betrachtungen beruhende Lösung des Rencontrespiels hat Lampe[1]) gegeben.

23. Ein eigentümliches Wechselspiel, dem das Interesse der Mathematiker in hohem Mafse sich zuwandte, dessen allgemeine Lösung aber erst Laplace gelungen ist, führt nach Todhunter[1]) den Namen des Problems von Waldegrave, weil dieser es war, welcher Montmort das betreffende Spiel zur mathematischen Untersuchung vorlegte. In ihrer allgemeinen Fassung lauten die Regeln des Spiels wie folgt: Von $n+1$ Spielern spielen zwei mit einander, der Verlierende erlegt einen Franc, der Gewinnende spielt mit dem nächsten; wieder erlegt der Verlierende einen Franc, während der Gewinnende mit dem nächsten Spieler weiterspielt; dies geht so fort, bis es einem gelingt, alle noch folgenden Spieler zu besiegen; zu dem Verlierenden des ersten Spiels wird erst zurückgekehrt, wenn alle Spieler darangekommen sind; ihm reiht sich der Verlierende des zweiten Spiels an u. s. f. Das Spiel ist als ein reines Zufallsspiel gedacht, sodafs bei jedem Gange die Chancen der beiden Gegner gleichstehen.

Es sind verschiedene Fragen gestellt worden, so die nach der Wahrscheinlichkeit eines jeden der Spieler, das Spiel zu gewinnen, nach seiner Erwartung, nach der Wahrscheinlichkeit, dafs das Spiel in oder vor einem bestimmten Gange enden werde. Von Montmort[1]) wurden diese Fragen unter der Voraussetzung dreier Spieler erörtert, wie dies von Waldegrave auch verlangt war; Nicolaus Bernoulli, der mit Montmort über diesen Gegenstand im Briefwechsel stand, ging bereits auf beliebig viele Spieler ein; seine Untersuchungen sind gleichfalls bei Montmort[1]) mitgeteilt.

Doch war De Moivre der erste, welcher eine Lösung des Problems publicirt hat, und zwar in der „Mensura sortis"[1]), wo er sich auf drei Spieler beschränkt; in der „Doctrine of chances" giebt er eine sehr klare und vollständige Darlegung, erweitert die Aufgabe auf vier Spieler und macht Andeutungen über die allgemeine Lösung.

Laplace[13]) ist nicht blofs, was die Zahl der Spieler anlangt, sondern auch in der Fragestellung über seine Vorgänger hinausgegangen; seine Untersuchungen bilden den Inhalt des 11. Artikels der „Théorie analytique". Er bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dafs das Spiel gerade bei dem x-ten Gange endet; dafs es bei diesem oder vorher schliefst; er sucht ferner die Wahrscheinlichkeit, dafs der r-te Spieler aus der Reihenfolge gerade beim x-ten Gange Gewinner sein werde.

Die erste dieser Fragen führt auf die Differenzengleichung

$$z_x = \frac{1}{2} z_{x-1} + \frac{1}{2^2} z_{x-2} + \frac{1}{2^3} z_{x-3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} z_{x-n+1},$$

wenn z_x die fragliche Wahrscheinlichkeit bedeutet. Laplace unter-

läſst es, darauf aufmerksam zu machen, daſs diese Gleichung für $x = n$ nicht Geltung hat; und doch ist dieser Umstand für die Verfolgung seines Verfahrens, das auf den erzeugenden Functionen basirt, sehr wichtig. De Morgan[2]), der dieses Versehen aufgedeckt hat, macht bei diesem Anlasse eine recht zutreffende Bemerkung über Laplace's knappe, dem Leser wenig entgegenkommende Schreibweise. Als erzeugende Function von z_x ergiebt sich auf Grund obiger Gleichung

$$u = \frac{1}{2^n} \frac{t^n(2-t)}{1-t+\frac{t^n}{2^n}},$$

und daraus durch Entwicklung nach t das erste Resultat

$$z_x = \frac{1}{2^n} - \frac{x-2n+1}{2^{2n}} + \frac{(x-3n+1)(x-3n+4)}{1\cdot 2\cdot 2^{3n}}$$
$$- \frac{(x-4n+1)(x-4n+2)(x-4n+6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^{4n}} + \cdots; \quad (\alpha)$$

von der Reihe sind so viel Glieder zu nehmen, als der Quotient $\frac{x}{n}$ ganze Einheiten enthält.

Die zweite der oben angeführten Wahrscheinlichkeiten hat zur erzeugenden Function die frühere dividirt durch $1-t$, also $\frac{u}{1-t}$, und ihr Ausdruck ist

$$\frac{x-n+2}{2^n} - \frac{(x-2n+1)}{1\cdot 2\cdot 2^{2n}}(x-2n-4)$$
$$+ \frac{(x-3n+1)(x-3n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^{3n}}(x-3n+6) - \cdots \quad (\beta)$$

Die Theorie eines dem Waldegrave'schen ähnlichen Wechselspiels für drei Spieler hat Poisson[7]) zum Gegenstande einer Abhandlung gemacht; Roger[1]) hat die Untersuchung auf beliebig viele Spieler ausgedehnt.

24. Ein neues Moment tritt in der Wahrscheinlichkeitstheorie zutage, wenn nach der Wahrscheinlichkeit eines Thatbestandes gefragt wird, dessen verschiedene Modalitäten von einer oder von mehreren stetig veränderlichen Gröſsen abhängen. Wohl geht es bei einer solchen Sachlage an, einen einzelnen möglichen oder günstigen „Fall" durch eine entsprechende Wertecombination der Variablen zu charakterisiren; aber eine Erschöpfung der Fälle durch Zählung wird unthunlich; vielmehr bilden die möglichen und die günstigen Fälle je eine stetige Mannigfaltigkeit, also unzählbare (unendliche) Mengen.

Probleme dieser Art betrafen zuerst und auch später vornehmlich

geometrische Gebilde; die Frage war darnach gerichtet, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dafs ein aus einer definirten Formen-, Lagen- oder Gröfsenmannigfaltigkeit geometrischer Gebilde willkürlich herausgegriffenes Individuum gewissen geometrischen Bedingungen genüge. Aber auch andere Aufgaben, welche nicht ursprünglich in diesem Gewande erscheinen, lassen sich durch entsprechende Deutung der auftretenden Variablen auf geometrisches Gebiet übertragen. Man kann daher passend diesen Zweig der Wahrscheinlichkeitsrechnung als Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeit bezeichnen; Crofton[1]) hat dafür den Namen „local probability" gewählt, neben welchem bei den englischen Mathematikern, welche an der Ausbildung dieser Theorie das gröfste Verdienst beanspruchen dürfen, auch die Bezeichnung „geometrical probability" gebräuchlich ist.

Die beiden principiellen Fragen, welche sich hier darbieten, gehen dahin, was an die Stelle der bisher geübten Zählung der Fälle zu treten und welche Gestaltung die Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zu erhalten habe, damit sie auch die Probleme der geometrischen Wahrscheinlichkeit umfasse.

Als Ausgangspunkt für die Beantwortung der ersten dieser Fragen darf füglich eine andere, engere Frage angesehen werden, welche in analytischer Formulirung gerichtet ist nach einem Mafs für die Menge der Werte einer reellen Variablen, die in ein durch zwei gegebene reelle Zahlen begrenztes Intervall fallen, in geometrischer Fassung nach einem Mafs für die Menge der Punkte, welche in einer durch zwei gegebene Punkte begrenzten Strecke einer Geraden angenommen werden können.

Die Antwort hierauf hängt mit der Deutung des Begriffs der Gleichberechtigung aller Werte der Variablen, respective aller Punkte der Geraden eng zusammen. Man hat hierunter den kurzen Ausdruck für die Voraussetzung zu verstehen, dafs beliebige aber gleiche Intervalle aus dem Gebiet der reellen Zahlen gleiche Wertmengen der Variablen, ebenso dafs beliebige aber gleiche Strecken der Geraden gleiche Punktmengen enthalten, sodafs die Wert- oder Punktmenge nicht abhängt von der Lage, sondern nur von der Gröfse des Intervalls, respective der Strecke.

Daraus ergiebt sich denn der Grundsatz, dafs die Menge der Werte einer reellen Variablen in einem Intervall gemessen werden könne durch die Gröfse des letzteren, d. h. durch den Unterschied zwischen seiner oberen und unteren Grenze, sowie dafs die Menge der Punkte in einer geradlinigen Strecke durch die Länge dieser gemessen werden könne.

Treffen zwei Variable x, y, oder deren drei, x, y, z, zusammen, so ist diesem Grundsatz zufolge das Product $dxdy$, beziehungsweise $dxdydz$, ein Mafs für die Menge der Wertverbindungen, welche den Intervallen $(x, x+dx)$, $(y, y+dy)$, respective $(x, x+dx)$, $(y, y+dy)$,

$(z, z + dz)$ gleichzeitig entnommen sind, also auch ein Maſs für die Menge jener geometrischen Gebilde, welche durch Werte der Variablen aus diesen Intervallen bestimmt sind; und die Integrale

$$\iint\limits_{K} dx\, dy, \qquad \iiint\limits_{K'} dx\, dy\, dz$$

bedeuten in demselben Sinne Maſse für diejenigen Mengen von Wertverbindungen, welche den durch die Integrationsgebiete K, K' charakterisirten Mannigfaltigkeiten angehören. Man kann, an die geometrische Bedeutung solcher Integrale für den Fall, daſs die zwei, respective drei Variablen als rechtwinklige Coordinaten interpretirt werden, anknüpfend sagen, daſs die Menge der Wertverbindungen in einer Mannigfaltigkeit gemessen werden könne durch deren Inhalt.

Die analytische Begründung dieses Satzes ist bei Czuber[5]) in der Einleitung auf ein von Dirichlet*) gelegentlich zahlentheoretischer Untersuchungen aufgestelltes Princip gestützt. In der Untersuchung der vorliegenden fundamentalen Frage, mit welcher Brunn[1]) seine Abhandlung über ein von v. Kries[1]) stammendes Paradoxon eröffnet, vermissen wir jeden Hinweis auf die Voraussetzung der Gleichberechtigung aller Punkte.

Auf die Notwendigkeit, den Wahrscheinlichkeitsbegriff so zu definiren, daſs er auch die Fälle geometrischer Wahrscheinlichkeit umfasse, ist schon Cournot[1]) im § 18 zu sprechen gekommen. Die von ihm vorgeschlagene Fassung, die mathematische Wahrscheinlichkeit als „das Verhältnis der Ausdehnung der einem Ereignis günstigen Fälle zu der Ausdehnung aller möglichen Fälle“ zu definiren, ist jedoch unhaltbar. Dagegen möchte sich wohl die folgende Definition empfehlen: Die mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist das Verhältnis aus dem Inhalt der Mannigfaltigkeit der ihm günstigen Fälle zu dem Inhalt der Mannigfaltigkeit aller als gleichberechtigt vorausgesetzten Fälle. Ist die Mannigfaltigkeit eine discrete, so wird ihr Inhalt durch Zählung der Elemente (Fälle) ermittelt, also durch eine natürliche Zahl und die Wahrscheinlichkeit selbst durch einen rationalen Bruch dargestellt; ist die Mannigfaltigkeit eine stetige, so wird ihr Inhalt durch Messung gefunden, und zwar kommt derselbe gleich dem über die Mannigfaltigkeit ausgedehnten Integral

$$\iint \cdots \int dx\, dy \cdots dv, \tag{α}$$

wenn $x, y, \cdots v$ die unabhängigen Variablen bedeuten, durch welche ein Element der Mannigfaltigkeit bestimmt ist.

---

*) Crelle Journ., Bd. 19, p. 329.

Die Wahl der unabhängigen Variablen hängt mit der Auffassung zusammen, welche man in dem einzelnen Falle der Ausdrucksweise unterlegt, es werde ein Element aus der Mannigfaltigkeit willkürlich herausgegriffen. Wenn über diese Auffassung in manchen Fällen, so wenn es sich um die willkürliche Annahme eines Punktes in einer Geraden oder in der Fläche einer ebenen Figur oder in einem Teile des Raumes handelt, eine Meinungsverschiedenheit kaum auftauchen kann, ist sie in anderen Fällen strittig, so wenn ein Punkt auf einer krummen Linie oder eine Sehne im Kreise od. dgl. beliebig angenommen werden soll. Enthält das Problem selbst keinen Anhaltspunkt hierfür, so mufs es als unbestimmt erklärt werden und kann je nach der Auffassung zu verschiedenen Lösungen führen. Beispiele solcher Art bietet die einschlägige Litteratur in grofser Zahl.

Das Integral (α) setzt gleichförmige Verteilung der Wertverbindungen $x\,|\,y \cdots |\,v$ in der Mannigfaltigkeit, oder anschaulich gesprochen, gleichförmige Verteilung der Punkte $x\,|\,y\,|\cdots|\,v$ in dem die Mannigfaltigkeit vertretenden mehrdimensionalen Raume voraus. Wendet man darauf eine simultane Transformation an, indem man statt der früheren die neuen Variablen $x', y', \cdots v'$ einführt, so sind die Punkte $x'\,|\,y'\,|\cdots|\,v'$ in dem transformirten Raume nicht mehr gleichförmig verteilt; vielmehr bedeutet in dem neuen Integral

$$\int\!\!\int \cdots \int |\,J\,|\,dx'dy' \cdots dv' \qquad (\beta)$$

der absolute Wert der Jacobi'schen Determinante die relative Dichtigkeit der Punkte an der Stelle $x'\,|\,y'\,|\cdots|\,v'$ oder in deren nächster Umgebung.

Über die Auffassung der ungefähren oder willkürlichen Annahme eines Elementes in einer continuirlichen Mannigfaltigkeit sind vielfach Controversen geführt worden, zumal in den „Educational Times“, wo im Laufe der letzten Decennien überaus zahlreiche Probleme der geometrischen Wahrscheinlichkeit gelöst worden sind.*) Im „Periodico di Matematica, VI“ und in der „Rivista di Matem., I“ sind zwischen Cesàro und Vivanti Erörterungen darüber geführt worden, was man bei Problemen mit unendlich vielen möglichen Fällen hinzufügen müsse, um sie bestimmt zu machen; der erstere von beiden bezeichnet die Dichtigkeit der Werte der Variablen als das strittige Element. Indessen läfst sich eine in der Formulirung eines Problems gelegene Unbestimmtheit durch keinerlei Discussion endgiltig beseitigen.

25. Fragen der geometrischen Wahrscheinlichkeit würden nach dem Vorausgeschickten naturgemäfs ein Anwendungsgebiet der In-

*) S. Band X (Juli—Decbr. 1868) eine diesbezügliche Erörterung von Woolhouse und Band XXXIII (Januar—Juni 1880) eine solche von Monro.

finitesimalrechnung bilden. Indessen sind diesem directen Verfahren durch die Complicirtheit der Integrale und die Schwierigkeit der Grenzbestimmung ziemlich enge Schranken gesteckt. Was auf diesem Gebiete, namentlich von englischen Mathematikern, bisher geleistet worden ist und Interesse verdient, das besteht vielmehr in einer Wendung der Schwierigkeiten durch verschiedene Betrachtungen, die eine Vereinfachung und mitunter die völlige Umgehung schwieriger Integrationen ermöglichen. Insbesondere zählt auch die Verbindung von Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeit mit solchen über geometrische Mittelwerte zu den vereinfachenden Hilfsmitteln, wie in den folgenden Artikeln an einigen charakteristischen Beispielen gezeigt werden soll.

Hier möge die Bemerkung Platz finden, dafs die Infinitesimalrechnung viel früher in die Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt worden ist, als Aufgaben geometrischer Natur aufgetreten sind. Der erste, welcher von ihr Anwendung machte, war Daniel Bernoulli[3])[5]), und zwar geschah dies gelegentlich der Behandlung statistischer Fragen; die an sich unstetigen Vorgänge wurden dabei als continuirlich verlaufend angesehen, und die einer differentiellen Änderung der Zeit entsprungenen Änderungen der statistischen Zustände fanden ihre Darstellung in einer Gleichung, deren Integration die Lösung des Problems ergab. Die Neuheit des Verfahrens veranlafste Bernoulli, in einer anderen Abhandlung[4]) förmliche Regeln für die Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Wahrscheinlichkeitsaufgaben zu entwickeln.

Die mit Resultaten, welche sich auf discrete Gesamtheiten von Fällen beziehen, vollführten Grenzübergänge, wie sie im vorangehenden wiederholt berührt worden sind, bedeuten im Wesen auch nichts anderes als den Übergang zur Continuität oder zur geometrischen Wahrscheinlichkeit. Einer der bemerkenswertesten darunter ist wohl der, welchen Laplace gelegentlich der Behandlung des Moivre'schen Problems vorgenommen hat und der in Art. 19 besprochen worden ist; auf das so gewonnene Grenzresultat ist denn auch die Lösung einer Frage gegründet worden, welche ihrem Wesen nach in das Gebiet der geometrischen Wahrscheinlichkeit gehört. Laplace suchte nämlich die schon von Daniel[2]) und Johann Bernoulli behandelte Frage, ob wohl die Anordnung der Planetenbahnen gegen die Ekliptik und die Gleichheit ihrer Umlaufsrichtungen ein Werk des Zufalls sein könne, auf die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit zu stützen, dafs die Summe der Bahnneigungen innerhalb jener Grenzen zu suchen wäre, die sie wirklich einhält, wenn alle Neigungen gleich wahrscheinlich wären.

26. Der einfachste Satz über den Zusammenhang zwischen geometrischer Wahrscheinlichkeit und geometrischen Mittelwerten ist der folgende: „Ist K ein variables Gebiet von ein, zwei, drei · · ·

Dimensionen, das von einem festen Gebiet A derselben Dimensionszahl eingeschlossen wird; ist ferner $M(K)$ der Mittelwert, welcher K vermöge seiner Veränderlichkeit zukommt, so ist die Wahrscheinlichkeit, ein in A beliebig angenommener Punkt falle in das Gebiet K, gleich $\frac{M(K)}{A}$".

Bezeichnet nämlich $\omega(K)dK$ die Wahrscheinlichkeit, dafs im Augenblicke des Versuchs K einen zwischen K und $K + dK$ liegenden Wert annimmt, so ist

$$\omega(K)dK \cdot \frac{K}{A}$$

die Wahrscheinlichkeit für den bezeichneten Erfolg und daher

$$p = \frac{\int K\omega(K)dK}{A} = \frac{M(K)}{A} \qquad (\alpha)$$

seine totale Wahrscheinlichkeit.

In dieser Formel ist bald p, bald $M(K)$ die leichter zu bestimmende Gröfse; damit sind auch die beiden Anwendungsweisen derselben angedeutet.

Handelte es sich z. B. darum, den Mittelwert der n-ten Potenz der Entfernung zweier in einer gegebenen Geraden von der Länge l willkürlich angenommenen Punkte X, Y in Rechnung zu stellen, so braucht man nur nach der Wahrscheinlichkeit zu fragen, dafs n weiter angenommene Punkte insgesamt zwischen X und Y fallen; diese Wahrscheinlichkeit ist nämlich obigem Satze gemäfs

$$p = \frac{M(\overline{XY}^n)}{l^n};$$

andererseits aber ist sie gleich $\frac{2}{(n+1)(n+2)}$; denn die Wahrscheinlichkeit, dafs X einer der äufsersten unter den $n + 2$ Punkten ist, kommt gleich $\frac{2}{n+2}$, und die Wahrscheinlichkeit, dafs Y der andere äufserste Punkt ist, beträgt $\frac{1}{n+1}$. Daraus ergiebt sich für den genannten Mittelwert die Bestimmung

$$M(\overline{XY}^n) = \frac{2l^n}{(n+1)(n+2)}.$$

Um den Mittelwert des Productes der n Abschnitte $a, b, c, \cdots$ zu finden, in welche eine gegebene Strecke l durch willkürliche Annahme von $n - 1$ Zwischenpunkten zerlegt wird, bedenke man, dafs dieser Mittelwert in Rechnung kommt, wenn nach der Wahrscheinlichkeit gefragt wird, dafs n weitere Punkte sich einzeln auf die Abschnitte verteilen; diese Wahrscheinlichkeit ist nämlich

$$\frac{n!\,M(abc\cdots)}{l^n};$$

sie kann aber auch auf combinatorischem Wege ermittelt werden; denn die Anzahl der Anordnungen von $2n - 1$ Punkten ist $(2n-1)!$, und die Anzahl derjenigen darunter, bei welchen jeder Punkt der zweiten Gruppe zwischen zwei andere der ersten Gruppe fällt, ist $(n-1)!\,n!$. Mithin ist

$$\frac{(n-1)!\,n!}{(2n-1)!} = \frac{n!\,M(abc\cdots)}{l^n},$$

und daraus ergiebt sich

$$M(abc\cdots) = \frac{(n-1)!}{(2n-1)!}\,l^n.$$

Wenn in dem Complex zweier einander ausschliefsenden Gebiete A, B zwei Punkte willkürlich angenommen werden, so kann entweder in jedes Gebiet je einer, oder es können beide in das Gebiet A oder beide in das Gebiet B fallen; bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit dieser drei Thatbestände mit $p_{A,B}$, $p_{A,A}$, $p_{B,B}$, so besteht der Ansatz

$$1 = 2p_{A,B} + p_{A,A} + p_{B,B}.$$

Bezeichnet man den Mittelwert einer von der Lage der beiden Punkte abhängigen geometrischen Gröfse unter den genannten drei Modalitäten mit M, M_A, M_B, während man ihren allgemeinen Mittelwert (unabhängig davon, wie sich die Punkte verteilen) M' nennt, so besteht ein analoger Ansatz, nämlich

$$(A+B)^2M' = 2ABM + A^2M_A + B^2M_B; \qquad (\beta)$$

man braucht, um dies einzusehen, nur eine Teilung der Wertemannigfaltigkeit der betreffenden Gröfse nach dem Umstande vorzunehmen, ob die beiden Punkte getrennt oder vereint in dem einen oder anderen Gebiet liegen, die Summen in den einzelnen Teilen zu bilden und von den Summen schliefslich auf die Mittelwerte überzugehen.

Als Beispiel zur Anwendung dieses Satzes diene die folgende Aufgabe. In der Fläche eines Dreiecks $\mathfrak{ABC}$ werden zwei Punkte X, Y beliebig angenommen; welches ist der Mittelwert des Dreiecks $XY\mathfrak{C}$ (oder $XY\mathfrak{B}$, $XY\mathfrak{A}$)?

Man denke sich das Dreieck durch die Schwerlinie $\mathfrak{CD}$ in zwei flächengleiche Dreiecke $\mathfrak{ADC} = A$, $\mathfrak{BDC} = B$ zerlegt; wie A, B, so sind auch die auf sie bezüglichen Mittelwerte M_A und M_B einander gleich, infolgedessen vereinfacht sich (β) zu

$$2M' = M + M_A.$$

Des weiteren ist $M_A = \frac{M}{2}$, und wenn S, S' die Schwerpunkte der

Dreiecke $\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{D}\mathfrak{C}$ sind, $M = SS'\mathfrak{C} = \frac{2}{9}\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, letzteres als Folge des leicht nachweisbaren Satzes, daſs der Mittelwert eines Dreiecks XYZ, dessen Ecken in drei getrennten Gebieten A, B, C liegen, die niemals gleichzeitig durch eine der Geraden YZ, ZX, XY getroffen werden, gleichkommt dem Dreieck der Schwerpunkte jener Gebiete. Hiernach ist schlieſslich

$$M' = \tfrac{4}{27}\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

Daran läſst sich die Frage nach der Wahrscheinlichkeit anknüpfen, daſs ein dritter in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ angenommener Punkt Z in das Dreieck $XY\mathfrak{C}$ falle; sie kommt gleich dem Quotienten $\frac{M'}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$, beträgt demnach $\frac{4}{27}$; daraus resultirt die Wahrscheinlichkeit, daſs drei in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ willkürlich angenommene Punkte X, Y, Z mit einer Ecke, z. B. $\mathfrak{C}$, ein nichtconvexes Viereck bestimmen, nämlich $\frac{4}{9}$.

Ein weiterer Satz, von welchem in manchen Fällen mit Erfolg Gebrauch gemacht werden kann, ergiebt sich durch folgende Betrachtung. Es sei M der Mittelwert einer Gröſse, welche von r in einem festen Gebiete A beliebig angenommenen Punkten abhängt; ändert man A um dA, so möge M, das sich nun auf Punkte in $A + dA$ bezieht, in $M + dM$ übergehen. Die neue Mannigfaltigkeit ist aber zerlegbar in Fälle, wo alle r Punkte in A liegen, und in solche, wo $1, 2, \cdots$ Punkte in den Zuwachs dA von A fallen; entsprechend dieser Zerlegung besteht der Ansatz

$$(A + dA)^r(M + dM)$$
$$= A^r M + r A^{r-1} dA \cdot M_1 + \binom{r}{2} A^{r-2} dA^2 \cdot M_2 + \cdots,$$

wobei M_1 den Mittelwert bedeutet, wenn ein Punkt in dA liegt, M_2 den Mittelwert, wenn zwei Punkte auf dA fallen, u. s. w. Beschränkt man die Entwicklung auf Glieder erster Ordnung, so ergiebt sich die Differentialgleichung

$$A\,dM = r(M_1 - M)\,dA. \qquad (\gamma)$$

Es giebt Fälle, wo die Bestimmung von M_1 leichter gelingt; dann kann diese Differentialgleichung zur Berechnung von M dienen.

Als Beispiel wählen wir die Bestimmung des Mittelwerts von $\overline{XY}^n$, wenn X, Y willkürlich auf einer Linie von der Länge l angenommen sind. Hier ist $r = 2$ und M_1 der Mittelwert der $n$ten Potenz der Entfernung eines einzigen in l angenommenen Punktes von einem Endpunkte dieser Linie, folglich $M_1 = \frac{l^n}{n+1}$, wie man aus der combinatorisch leicht zu bestimmenden Wahrscheinlichkeit findet, daſs n weiter angenommene Punkte auf jene Entfernung fallen. Man hat also auf Grund von (γ) den Ansatz

$$l\,dM = 2\left(\frac{l^n}{n+1} - M\right)dl,$$

woraus

$$l^2 dM + 2Ml\,dl = d(l^2M) = \frac{2l^{n+1}dl}{n+1}$$

und durch Integration, wenn man beachtet, dafs M mit l zugleich verschwindet,

$$M = \frac{2l^n}{(n+1)(n+2)}$$

sich ergiebt in Übereinstimmung mit einer früheren Rechnung.

Der Relation (γ) entspricht eine analoge Beziehung zwischen Wahrscheinlichkeiten. Bedeutet p die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein einer gewissen geometrischen Bedingung zwischen r Punkten in einem Gebiet A, $p + dp$ die entsprechende Wahrscheinlichkeit für das differentiell abgeänderte Gebiet $A + dA$, p_1 die nämliche Wahrscheinlichkeit unter der Annahme, dafs einer der r Punkte auf dA falle, so gilt die Gleichung

$$A\,dp = r(p_1 - p)dA. \qquad (\delta)$$

Dieselbe gestattet die Vereinfachung mancher Aufgabe. Würde beispielsweise nach der Wahrscheinlichkeit gefragt werden, dafs drei innerhalb eines Kreises beliebig angenommene Punkte die Ecken eines spitzwinkligen Dreiecks bilden, und liefse man den Kreis um einen sehr engen concentrischen Ring wachsen, so änderte sich die fragliche Wahrscheinlichkeit nicht, weil sie von der Gröfse des Kreises nicht abhängen kann; aus $dp = 0$ folgt aber $p_1 = p$, d. h. bei Bestimmung jener Wahrscheinlichkeit geht es ohne weiteres an, den einen der drei Punkte auf dem Umfange des Kreises anzunehmen, und dies vereinfacht die Rechnung.

27. Die Theorie der in einer Ebene willkürlich gezogenen Geraden ist vornehmlich durch Crofton[1]) ausgebildet worden. Seine Auffassung der ebenen Geradenmannigfaltigkeit ist die einzig natürliche, weil sie die beiden primitiven Elemente der Geraden: die Richtung und die Lage bei gegebener Richtung als gleichförmig veränderlich betrachtet; mit anderen Worten, die unabhängigen Variablen, durch welche nach Crofton die Gerade bestimmt wird, sind die Parameter p, φ der Hesse'schen Normalgleichung

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0.$$

Hiernach ist das über eine Wertmannigfaltigkeit von p, φ ausgedehnte Doppelintegral $\iint dp\,d\varphi$ ein Mafs für die aus dieser Mannigfaltigkeit entspringende Gesamtheit von Geraden.

Hieraus entspringt der grundlegende Satz, „dafs die Menge der

Geraden, welche einen convexen geschlossenen Contour schneiden, gemessen werde durch seinen Umfang". In der That giebt, wenn man den Ursprung des Coordinatensystems innerhalb des Contours annimmt, die Integration nach p das einfache Integral $\int p\,d\varphi$, wobei p das Lot zu einer Tangente der Curve bedeutet; die hierauf in Bezug auf φ vollzogene Integration, in dem Intervall $(0, 2\pi)$, giebt unter den gemachten Voraussetzungen nach einem Satze von Legendre die Länge L des Contours. Ist derselbe nicht convex oder nicht geschlossen, so tritt an die Stelle von L die Länge des ihn umspannenden endlosen Fadens.

Demnächst steht der von Crofton in der angeführten Abhandlung bewiesene Satz, „dafs die Menge der Geraden, welche zwei einander ausschliefsende convexe geschlossene Contouren zugleich schneiden, gemessen werde durch die Differenz aus der Länge eines sie umspannenden, zwischen beiden sich kreuzenden Fadens und eines ebensolchen sich nicht kreuzenden Fadens."

Diese Sätze gestatten schon die Lösung zahlreicher Aufgaben; sie führten aber auch zu manchen analytischen Resultaten von allgemeinem Interesse. Einige charakteristische Proben mögen hier Platz finden.

Über eine convex begrenzte ebene Figur vom Inhalt Ω und Umfang L werden zwei Gerade willkürlich gezogen; es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dafs sie sich innerhalb Ω schneiden.

Die Wahrscheinlichkeit, dafs die Elemente der ersten Geraden dem durch die Intervalle $(p, p + dp)$, $(\varphi, \varphi + d\varphi)$ gekennzeichneten Gebiet angehören, ist gleich

$$\frac{dp\,d\varphi}{\iint dp\,d\varphi},$$

dem ersten Satze zufolge also gleich $\frac{1}{L}\,dp\,d\varphi$. Ist C die auf dieser Geraden ausgeschnittene Sehne, so kann dieselbe als ein innerhalb Ω befindlicher geschlossener Contour von der Länge $2C$ angesehen werden; demgemäfs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die zweite Gerade die erste innerhalb C, also innerhalb Ω schneide,

$$\frac{2C}{L}.$$

Durch Multiplication beider Wahrscheinlichkeiten und Integration des Products über alle zulässigen Wertverbindungen $p\,|\,\varphi$ ergiebt sich die geforderte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{2}{L^2}\iint C\,dp\,d\varphi\,.$$

Aber das zu einem festen φ und dem zugehörigen $\varphi + \pi$ (bei Ur-

sprung innen) gehörige Integral $\int C dp$ giebt die Fläche Ω, die noch übrige Integration nach φ liefert π, folglich ist

$$w = \frac{2\pi\Omega}{L^2}.$$

Diese Wahrscheinlichkeit mufs aber auch gleichkommen dem doppelten Quotienten aus der mittleren Sehnenlänge M durch den Umfang L, sodafs auch

$$w = \frac{2M}{L}.$$

Die Vergleichung beider Werte führt zu dem bemerkensw rten Resultat

$$M = \frac{\pi\Omega}{L}. \qquad (\alpha)$$

Eine Aufgabe, die wegen eines analytischen Resultats, zu welchem sie führt, Beachtung verdient, ist die folgende. In einer ebenen, convex begrenzten Figur werden zwei Punkte A, B beliebig angenommen; es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dafs der Neigungswinkel ihrer Verbindungslinie mit einer festen Geraden innerhalb gegebener Grenzen liege.

Durch den einen Punkt, A, ziehe man eine Sehne $PQ = C$ unter dem Neigungswinkel θ; dieselbe zerfalle durch den Punkt A in die Abschnitte $r = PA$ und $r' = AQ = C - r$. Bei dieser Lage von A wird die Menge der Fälle, in welchen der Punkt B so fällt, dafs seine Verbindungslinie mit A eine zwischen θ und $\theta + d\theta$ befindliche Neigung hat, gemessen durch die Summe zweier Sectoren:

$$\tfrac{1}{2}(r^2 + r'^2)\, d\theta.$$

Nun lasse man A variiren auf einem Streifen, der von C und einer dazu parallelen Sehne im Abstande dp begrenzt ist; die Menge der Fälle, wo A in diesen Streifen und die Richtung AB zwischen die Grenzen θ und $\theta + d\theta$ fällt, ergiebt sich durch Integration des Ausdrucks

$$\tfrac{1}{2}(r^2 + r'^2)\, d\theta\, dr\, dp$$

in Bezug auf r zwischen den Grenzen 0 und C, ist also, weil

$$\int_0^C (r^2 + r'^2) dr = \int_0^C (r^2 + (C - r)^2) dr = \tfrac{2}{3} C^3,$$

gleich

$$\tfrac{1}{3} C^3 dp\, d\theta.$$

C ist eine Function des vom Ursprung auf PQ gefällten Lotes p und seines Richtungswinkels φ, der mit θ in solcher Relation steht,

dafs $d\theta = d\varphi$ ist; mithin hat man für die Menge aller Fälle, welche dem bezeichneten Ereignis günstig sind, den Ausdruck

$$\frac{1}{3}\int d\varphi \int C^3 dp,$$

die erste Integration auf alle Sehnen einer Richtung, die zweite auf alle Richtungen erstreckt, welche den Grenzen θ', θ'' der Neigung von AB angepafst sind. Die Aufgabe ist also auf ein Doppelintegral zurückgeführt, dessen Wertbestimmung nur in besonderen Fällen leicht gelingen wird; es bleibt dann noch die Division durch Ω^2, als Mafs für die Anzahl aller Fälle, übrig, um die Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{1}{3\Omega^2}\int d\varphi \int C^3 dp \tag{β}$$

zu erhalten.

Erstreckt man die Integration über alle Richtungen, so wird w notwendig gleich der Einheit. Hiernach gilt für die Gesamtheit der Sehnen einer convex begrenzten Figur Ω die Gleichung

$$\iint C^3 dp\, d\varphi = 3\,\Omega^2.$$

Diese Formel, welche Crofton u. a. in den Compt. rend. 1869, p. 1469 mitgeteilt hat, ist von Serret in den Annal. scient. de l'École Norm. 1869, p. 177 auch analytisch bewiesen worden.

Durch die Untersuchung der Dichtigkeit der Schnittpunkte, welche die einen convexen Contour schneidenden Geraden innerhalb und aufserhalb desselben ergeben, ist Crofton zu dem allgemeinen Ansatz

$$\iint(\theta - \sin\theta)\,d\Omega = \tfrac{1}{2}\,L^2 - \pi\Omega \tag{γ}$$

geführt worden, in welchem Ω die von dem Contour eingeschlossene Fläche, L seine Länge, θ den Winkel bezeichnet, unter welchem der Contour aus einem (äufsern) Punkte sich projicirt, und wo das Doppelintegral sich über die ganze Ebene aufserhalb Ω erstreckt; auch für diesen Ansatz, der in den Compt. rend. 1867, p. 994 mitgeteilt war, hat Serret an der oben citirten Stelle einen analytischen Nachweis gegeben.

Das Studium der Frage nach der mittleren Entfernung zweier Punkte A, B, welche innerhalb eines convexen Contours beliebig angenommen werden, in Verbindung mit der Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dafs eine willkürlich angenommene, den Contour schneidende Gerade die genannten Punkte trenne, hat Crofton ferner die analytische Formel

$$\iint C^4 dp\, d\varphi = 6\iint \Sigma\Sigma'\, dp\, d\varphi \tag{δ}$$

ergeben, in welcher C, p, φ die frühere Bedeutung haben, Σ, Σ' aber

die Flächen jener beiden Segmente sind, in welche Ω durch die Gerade zerlegt wird.

Die Theorie willkürlich im Raume geführter Geraden und beliebig gelegter Ebenen ist von Crofton[1]) angedeutet und von Czuber[5])[6]) weiter ausgeführt worden; auch hier ergaben sich im Wege wahrscheinlichkeitstheoretischer Betrachtungen analytische Identitäten allgemeiner Natur, deren directer Nachweis nicht immer leicht zu geben wäre.

28. Wenn man von einem Problem absieht, welches in einem zu Ende des siebzehnten Jahrhunderts anonym erschienenen, von Todhunter[1]) einem Gelehrten des Namens Arbuthnot[2]) zugeschriebenen Werke gestellt worden ist, und für das Simpson zuerst eine auf geometrischer Betrachtung fufsende Lösung gegeben hat*), so knüpft die Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeit an Aufgaben an, welche Buffon[1]) in dem „Essai d'Arithmétique Morale" gelöst, zum Teil aber schon viel früher (1733) gestellt hat.

Die bedeutendste unter diesen Aufgaben, welche gleich den älteren grofsen Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung immer von neuem die Aufmerksamkeit der Gelehrten auf sich gelenkt hat, zu neuen Lösungen und Verallgemeinerungen Anlafs gebend, ist das Nadelproblem. In seiner einfachsten Form lautet es wie folgt: „Eine Ebene ist durch parallele, äquidistante Geraden in Streifen zerlegt; eine cylindrische, sehr dünne Nadel, deren Länge höchstens gleichkommt dem gegenseitigen Abstand der Parallelen, wird auf dieselbe geworfen; es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dafs die Nadel eine der Teilungslinien kreuze." Buffon, der die eigentümliche Natur derartiger Aufgaben richtig erkannte, gab von dieser die correcte Lösung. Bezeichnet man den Abstand der Parallelen mit a, die Länge der Nadel mit $2r$, so ist $\frac{dx}{a}$ die Wahrscheinlichkeit, dafs der Mittelpunkt der Nadel von der ihm zunächstliegenden Teilungslinie eine zwischen x und $x + dx$ befindliche Entfernung hat, und $\frac{2}{\pi}$ arccos $\frac{x}{r}$ die Wahrscheinlichkeit, dafs die Nadel bei dieser Lage ihres Mittelpunktes die genannte Teilungslinie treffe; folglich ist

$$p = \frac{2}{\pi a}\int_0^r \arccos\frac{x}{r}\,dx = \frac{2r}{\pi a} \qquad (\alpha)$$

die totale Wahrscheinlichkeit des erwarteten Ereignisses.

*) Das Problem lautet so: Die Kanten eines Parallelepipeds stehen zu einander im Verhältnis $a:b:c$; man soll bestimmen, auf wieviele Würfe jemand wetten kann, dafs eine Seite, z. B. ab, zuoberst falle. Simpson umschreibt dem Parallelepiped eine Kugel, läfst einen Strahl aus dem Mittelpunkte die Kanten umfahren, und setzt die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Seitenflächen den ihnen entsprechenden Teilen der Kugeloberfläche proportional.

Die erste Erweiterung des Problems hat Buffon selbst angegeben, aber unrichtig gelöst; sie besteht darin, dass zu dem System der Teilungslinien ein zweites hinzutritt, welches mit ihm ein Netz congruenter Rechtecke bildet.

In beiden Fassungen ist die Aufgabe erst wieder durch Laplace[13]) aufgenommen worden, seltsamer Weise in einem Capitel, in dem man sie nicht vermuten würde, und wohin sie ihrer Natur nach auch nicht gehört; sie bildet nämlich den Schlufs des Cap. V: „Application du Calcul des Probabilités à la recherche des phénomènes et de leurs causes". Da Laplace über den Ursprung der Aufgabe nichts bemerkt, so ist sie später häufig ihm zugeschrieben worden, unter anderen auch von Léon Lalanne[1]), aus dessen Buch „Un million de faits" sie mehrfach geschöpft worden ist. Die richtige Lösung des zweiten Falles, wie sie Laplace gefunden hat, lautet

$$p = \frac{4r(a+b) - 4r^2}{\pi a b}, \qquad (\beta)$$

wobei b den Abstand der Parallelen des zweiten Systems bedeutet, während Buffon für quadratische Felder das falsche Resultat

$$\frac{2(a-r)r}{\pi a^2}$$

angegeben hat.

Unter Weglassung der einschränkenden Voraussetzung über die Länge der Nadel findet sich das Problem bei Czuber[5]) in den Artikeln 67 und 69.

Nach einer Mitteilung Barbier's[1]) hat Lamé in seinen Vorlesungen an der Faculté des Sciences 1860 im Anschlusse an das Nadelproblem den allgemeinen Fall behandelt, dafs auf die mit einem System äquidistanter Parallelen überzogene Ebene eine Scheibe von kreisförmiger, elliptischer, polygonaler Basis geworfen werde; diese Erweiterung entsprang einem in Frankreich unter dem Namen „jeu du joint couvert" geübten Spiele, bei welchem eine Münze auf einen durch parallele Fugen in gleich breite Streifen zerlegten Boden geworfen und nach der Wahrscheinlichkeit gefragt wird, dafs sie eine Fuge treffe. Aus dem Umstande, dafs sich in allen Fällen das Resultat $\frac{l}{\pi a}$ ergab, wenn l den Umfang der Basis bezeichnet, schlofs Barbier, dafs es sich hier um Specialfälle eines allgemeinen Theorems handeln müsse. Er stellt dasselbe in folgender Fassung auf: „Wenn eine Scheibe mit convexem Umrifs von sonst beliebiger Form auf eine Ebene geworfen wird, die mit einer Schar äquidistanter Parallelen überzogen ist, so ist unter der Voraussetzung, dafs die Scheibe in keiner Lage mehrere Teilungslinien zugleich treffen kann, die Wahrscheinlichkeit, dafs sie eine davon deckt, gleich $\frac{l}{\pi a}$, wenn

l den Umfang der Scheibe und a die Distanz der Parallelen bedeutet." Den Beweis sucht er dadurch zu erbringen, dass er den Fall in die Form eines Glücksspieles kleidet (vgl. Art. 44).

Crofton's Theorie der in der Ebene willkürlich gezogenen Geraden giebt die Lösung des Nadelproblems sowohl wie auch den Beweis des eben ausgesprochenen allgemeinen Satzes in sehr einfacher Weise. Umschliefst man die Scheibe mit einem Kreise vom Durchmesser a und läfst die Verbindung auf den Boden fallen, so wird der Kreis immer von einer der Teilungslinien geschnitten werden; die Frage richtet sich jetzt nach der Wahrscheinlichkeit, dass eine willkürlich gezogene Gerade, welche den Kreis schneidet, auch einen von ihm umschlossenen convexen Contour treffe; der erste Satz des Art. 27 giebt darauf die Antwort, die verlangte Wahrscheinlichkeit sei durch das Verhältnis der Umfänge gegeben; die Nadel aber kann als der Grenzfall eines convexen Contours von der Länge $4r$ aufgefafst werden.

Eine weitreichende Verallgemeinerung suchte Sylvester[1]) dem Nadelproblem zu geben, indem er sich die Nadel durch eine beliebige Anzahl fest mit einander verbundenen Figuren in der Ebene ersetzt denkt. Er behandelt den Specialfall zweier begrenzten Strecken und sagt bezüglich des Falles dreier Strecken, die Aufzählung der möglichen Fälle erfordere ein besonderes Studium, das er anderen überlasse.

Wir kommen auf das Nadelproblem nochmals in Art. 37 zu sprechen.

29. Für die erste Aufgabe über geometrische Wahrscheinlichkeit, welche seit Buffon's Nadelproblem gestellt worden ist, hält Crofton[4]) das merkwürdige „Vierpunkt-Problem" Sylvester's. Die Frage ist allgemein dahin gerichtet, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dafs vier innerhalb einer gegebenen ebenen Figur beliebig angenommene Punkte ein nichtconvexes, d. i. ein Viereck mit einspringendem Winkel bestimmen. Eng hiermit verbunden ist die Aufgabe, den Mittelwert des Dreiecks zu berechnen, welches durch drei in der genannten Figur angenommene Punkte gebildet wird; denn ist M dieser Mittelwert und A die Fläche der Figur, so ist $\frac{M}{A}$ die Wahrscheinlichkeit, dafs ein vierter Punkt in das Dreieck fällt, daher $\frac{4M}{A}$ die Wahrscheinlichkeit, dafs vier beliebige Punkte ein nichtconvexes Viereck bestimmen.

Crofton hat an der citirten Stelle die Lösung für das Dreieck und den Kreis gegeben; für diese Figuren und überdies für das Parallelogramm und das reguläre Sechseck ist sie von Woolhouse in den Educ. Tim. pro 1867 durchgeführt worden.

Bezüglich des Dreiecks kann zunächst auf Grund der zu

Gleichung (δ), Art. 26, gemachten Bemerkung die Vereinfachung getroffen werden, dafs man einen der vier Punkte, etwa W, auf dem Umfange annimmt. Dann kann das erwartete Ereignis auf zwei Arten zustande kommen, entweder indem die drei übrigen Punkte X, Y, Z in ein und dasselbe Teildreieck AWB oder CWB, Fig. 1, fallen, oder zwei in eines von beiden, der dritte in das andere zu liegen kommt; für jede dieser Lagenbeziehungen besteht die gleiche Wahrscheinlichkeit, weil die vier Linien vom Scheitel B nach den vier Punkten irgend eine bestimmte Ordnung ebenso leicht aufweisen können wie jede andere. Hiernach hat man als ersten Ansatz:

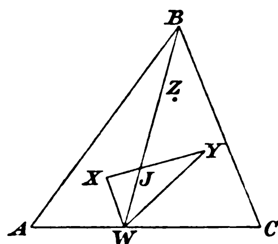


Fig. 1.

$$p = \tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1}{2}p_2,$$

wenn p die vollständige Wahrscheinlichkeit des erwarteten Thatbestandes, p_1, p_2 seine Wahrscheinlichkeit unter den eben unterschiedenen zwei Modalitäten bedeuten.

Der Wert von p_1 ist schon gelegentlich des zur Gleichung (β), Art. 26, gegebenen Beispiels gefunden worden, und zwar $p_1 = \frac{4}{9}$.

In diesem Beispiele ist auch bemerkt worden, dafs der Mittelwert des Dreiecks WXY gleichkommt dem Dreieck WSS', wenn S, S' die Schwerpunkte der Teildreiecke AWB, CWB bedeuten; dieses Dreieck ist aber unabhängig von der Lage des Punktes W gleich $\frac{1}{9}$ von ABC. Der genannte Mittelwert, durch ABC geteilt, giebt die Wahrscheinlichkeit, dafs Z innerhalb WXY fällt, und diese verdoppelt liefert p_2, weil X, Y zwei Vertauschungen zulassen und Z ebenso leicht mit X wie mit Y in demselben Teildreieck liegen kann; demnach ist schliefslich

$$p = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{9} = \tfrac{1}{3}.$$

Nach den einleitenden Ausführungen dieses Artikels folgt hieraus, dafs der Mittelwert eines Dreiecks, dessen Ecken in ABC beliebig angenommen werden, gleich ist $\frac{1}{12}ABC$.

Zum Kreise übergehend, bezeichne man mit M den Mittelwert des Dreiecks mit beliebig angenommenen Ecken, denke sich den Kreis von der Fläche A um einen unendlich engen concentrischen Ring dA vermehrt und beachte, dafs zwischen dem neuen Dreiecksmittelwert $M + dM$ und dem früheren die Beziehung

$$\frac{M + dM}{M} = \frac{A + dA}{A}$$

besteht, vermöge welcher sich mittelst der unter (γ) in Art. 26 gefundenen Differentialgleichung die Relation

$$M = \tfrac{3}{4} M_1$$

ergiebt; darin bedeutet M_1 nunmehr den Mittelwert eines Dreiecks, dessen eine Ecke auf dem Kreisumfange liegt.

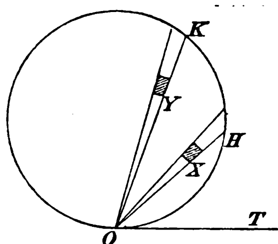


Fig. 2.

Für M_1 ergiebt sich an der Hand der Fig. 2 zunächst der Ausdruck

$$M_1 = \frac{1}{(\pi a^2)^2} \iint \varrho\, d\varrho\, d\theta \iint \triangle OXY \varrho'\, d\varrho'\, d\theta',$$

worin $\varrho = OX$, $\theta = \sphericalangle TOX$, $\varrho' = OY$, $\theta' = \sphericalangle TOY$ und a der Radius des Kreises ist; dieser selbst bildet das Integrationsgebiet für die Variablenpaare ϱ, θ; ϱ', θ'. Nach Einsetzung des Wertes für $\triangle OXY$ wird

$$M_1 = \frac{1}{2\pi^2 a^4} \iiiint \varrho^2 \varrho'^2 \sin(\theta' - \theta) d\varrho\, d\varrho'\, d\theta\, d\theta';$$

die Integrationen nach ϱ und ϱ', für welche $OH = 2a \sin\theta$ und $OK = 2a \sin\theta'$ die Grenzen sind, ergeben weiter

$$M_1 = \frac{64 a^2}{9\pi^2} \int_0^{\pi}\int_0^{\theta'} \sin^3\theta \sin^3\theta' \sin(\theta' - \theta)\, d\theta'\, d\theta.$$

Nun ist aber das in diesem Ausdruck vorkommende Integral gleich der Summe

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\theta'} \sin^3\theta \sin^4\theta' \cos\theta\, d\theta'\, d\theta - \int_0^{\pi}\int_0^{\theta'} \sin^4\theta \sin^3\theta' \cos\theta'\, d\theta'\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\theta'} \sin^3\theta \sin^4\theta' \cos\theta\, d\theta'\, d\theta - \int_0^{\pi}\int_0^{\theta'} \sin^4(\pi - \theta') \sin^3(\pi - \theta) \cos(\pi - \theta)\, d\theta'\, d\theta \text{*)}$$

$$= 2\int_0^{\pi}\int_0^{\theta'} \sin^3\theta \sin^4\theta'\, d\theta'\, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^8\theta'\, d\theta' = \tfrac{35}{256}\pi,$$

*) Mit Benutzung der leicht zu erweisenden Transformation

$$\int_0^{a}\int_0^{x} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{a}\int_0^{x} f(a - y, a - x)\, dx\, dy.$$

folglich

$$M_1 = \frac{35a^2}{36\pi} \qquad \text{und} \qquad M = \frac{35}{48\pi^2}\pi a^2.$$

Hieraus berechnet sich schliefslich auf Grund der einleitenden Bemerkungen die Wahrscheinlichkeit, dafs vier beliebige Punkte innerhalb eines Kreises ein nichtconvexes Viereck bestimmen,

$$p = \frac{35}{12\pi^2}.$$

Die vorstehende Aufgabe giebt nach einer Bemerkung Sylvester's Anlafs zur Aufstellung eines neuartigen Problems der Variationsrechnung: die Form eines convexen Contours derart zu bestimmen, dafs die Wahrscheinlichkeit der Nichtconvexität eines aus vier innerhalb desselben beliebig angenommenen Punkten gebildeten Vierecks ein Maximum oder ein Minimum sei. Crofton[4]) hat mit Benutzung der Relationen (γ), (δ) des Art. 26 von dem Kreise erwiesen, dafs er zu dem Minimum von p führe, und bezeichnet es als fast ausgemacht, dafs bei dem Dreieck das Maximum von p erzielt werde; die von Woolhouse (l. c.) gegebene Zusammenstellung

$$\text{Dreieck: } p = \frac{1}{3} = 0{\cdot}3333\cdots$$

$$\text{Parallelogramm: } p = \frac{11}{36} = 0{\cdot}3056\cdots$$

$$\text{Regul. Sechseck: } p = \frac{289}{972} = 0{\cdot}2975\cdots$$

$$\text{Kreis: } p = \frac{35}{12\pi^2} = 0{\cdot}2955\cdots$$

steht hiermit in Einklang.

30. Etwa seit der Mitte dieses Jahrhunderts hat sich aus der immer wachsenden Fülle geometrischer Wahrscheinlichkeitsaufgaben ein besonderer Zweig der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgebildet, der, wenn er vorläufig auch nur theoretisches Interesse beanspruchen kann, in Zukunft vielleicht auch zu praktischen Resultaten führen wird. Französische und englische Fachzeitschriften, unter diesen allen voran die „Educational Times“ haben dem Gegenstande grosse Aufmerksamkeit zugewendet; bis in die letzten Jahre verzeichnete das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ in jedem Bande eine Auswahl von Aufgaben mit ihren Lösungen hauptsächlich aus der letztgenannten Quelle. Czuber[5]) gab 1884 unter dem Titel „Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte“ eine systematische Sammlung einschlägiger Probleme mit allgemeinen theoretischen Erörterungen heraus.

Ein Zeichen dafür, welches Interesse der geometrischen Wahrscheinlichkeit in England zugewendet wird, ist darin zu erblicken, dafs Todhunter's „A Treatise on the Integral Calculus" und Williamson's „An elementary Treatise on the Integral Calculus" ihr ein besonderes Capitel eingeräumt haben. Eine umfangreichere Sammlung neuerer Aufgaben hat Zerr[1]) in einem Anhang zum LV. Bande der „Educ. Times" veröffentlicht.

Zweiter Abschnitt.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Ergebnisse wiederholter Versuche.

31. Einer der folgenreichsten Schritte in der Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie ward gethan, als man sich der Untersuchung der Ergebnisse von Versuchsreihen zuwandte. Denn dadurch wurde die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Dinge des praktischen Lebens eingeleitet, die wissenschaftliche Grundlage für die Benutzung der Erfahrung auch auf solchen Gebieten geschaffen, wo der Zufall mit im Spiele ist.

Zwei Hauptfragen lassen sich hier aufwerfen. Die eine ist auf die Erwartungsbildung gerichtet, welche sich auf die verschiedenen Ergebnisse bezieht, die eine künftig auszuführende Versuchsreihe liefern kann, oder die bei einer bereits ausgeführten, nach ihrem Resultate aber noch nicht bekannten Versuchsreihe möglich sind. Die zweite Hauptfrage bezieht sich auf die Schlüsse, welche man aus einer vorliegenden Versuchsreihe auf die ihr zugrundeliegende Materie ziehen kann.

Die Erledigung dieser Fragen hängt wesentlich davon ab, ob die für die Erwartungsbildung mafsgebenden Bedingungen während des ganzen Verlaufs der Versuche dieselben bleiben oder nicht, mit anderen Worten, ob die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Eventualitäten, welche der einzelne Versuch herbeiführen kann, constant bleiben oder ob sie sich im Laufe der Versuche ändern. In letzterem Falle kann die Änderung nach einem im voraus bestimmten Gesetze erfolgen, sie kann aber auch mit vom Zufall abhängen.

Das Verdienst, derlei Untersuchungen zum ersten Male in Angriff genommen und sie bis zu bedeutungsvollen Resultaten geführt zu haben, gebührt Jakob Bernoulli. Darum verdient seine „Ars conjectandi"[1]) den bedeutendsten Werken der wissenschaftlichen Litteratur beigezählt zu werden. Wohl betreffen die mathematischen Untersuchungen Bernoulli's, welche in dem nach ihm benannten

berühmten Theorem gipfeln, die erste der oben formulirten Hauptfragen; dafs er aber die zweite im Auge hatte und daher jene Untersuchungen lediglich als Vorbereitung für die Ziehung richtiger Schlüsse aus Erfahrungsdaten betrachtete, dafür zeugt die Überschrift des vierten, diesem Gegenstande gewidmeten und zugleich wertvollsten Teiles jenes Buches, welche lautet: „Artis conjectandi pars quarta, tradens usum et applicationem praecedentis doctrinae in civilibus, moralibus et oeconomicis"; noch mehr aber sprechen dafür die Betrachtungen und Erwägungen, welche der Verfasser der mathematischen Deduction vorausschickt. Hier werden auch die beiden Methoden der Wahrscheinlichkeitsbestimmung zum ersten Male auseinandergehalten und mit ihren heute noch gebräuchlichen Namen belegt: die Wahrscheinlichkeitsbestimmung „a priori", d. i. aus bekannten Bedingungen, und diejenige „a posteriori", d. i. aus der Erfahrung.

Bernoulli hält sich an die Vorstellung durch die Dauer der Versuche constant bleibender Umstände; wir werden das auf dieser Vorstellung sich aufbauende „Bernoulli'sche Theorem" in der Folge auch „Gesetz der grofsen Zahlen" nennen, obwohl diese später von Poisson eingeführte Bezeichnung ursprünglich einem allgemeineren Satze gegeben wurde, der auf der Voraussetzung variabler Bedingungen beruht.

Das Bernoulli'sche Theorem, mit dem wir uns zunächst beschäftigen, weil es doch die Grundlage aller hierher gehörigen Untersuchungen bildet, bedarf der näheren Betrachtung von zwei Seiten her: einmal handelt es sich um die Klarlegung seines wahrscheinlichkeitstheoretischen Inhalts, und dann um die Entwickelung seiner mathematischen Darstellung, mit welcher ein bemerkenswertes Stück der Entwickelungsgeschichte der Mathematik verknüpft ist.

32. In seiner Kritik des mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs legt Stumpf[1]) besonderes Gewicht darauf, zu zeigen, dafs es sich in dem Bernoulli'schen Theorem um eine Wahrscheinlichkeit völlig im Sinne der ursprünglichen Definition handle, zu deren Bildung also keine neuen Begriffe und Sätze erforderlich sind, und Formulirungen des Theorems entgegenzutreten, welche aus einer falschen Auffassung der Sachlage entsprungen oder doch geeignet sind, eine solche zu erwecken oder zu begünstigen.

Der von analytischem Rüstzeug befreite Gedankengang, der zum Bernoulli'schen Theorem hinführt, läfst sich folgendermafsen zusammenfassen.

Von zwei entgegengesetzten Ereignissen oder Eventualitäten A, B seien der ersten a, der zweiten b Fälle günstig, im ganzen seien also $a + b$ Fälle möglich; dies bleibe durch die ganze Dauer der Versuche fortbestehen. Man kann sich den Inhalt dieser Voraussetzungen bildlich veranschaulichen durch eine Urne mit $a + b$ Kugeln,

wovon a weifs, b schwarz sind; eine Ziehung vermag nur eine von zwei Eventualitäten zu verwirklichen, nämlich entweder eine weifse Kugel (A) oder eine schwarze (B) hervorzubringen; nach jeder Ziehung wird die Kugel zurückgelegt und mit den anderen vermengt, so dafs vor der nächsten wieder die gleichen realen Bedingungen vorhanden sind. Die Betrachtung darf auf zwei Eventualitäten beschränkt werden, weil die Aufmerksamkeit sich immer nur auf eine Eventualität richten wird, der gegenüber die anderen noch vorhandenen, wenn ihrer mehrere sind, in eine zusammengezogen werden können.

In s Versuchen können die $a + b$ möglichen Fälle auf $(a + b)^s$ Arten sich verbinden. Sondert man diese Verbindungen aus dem Gesichtspunkte in Gruppen, dafs man solche vereinigt, die in den Wiederholungszahlen von A und B übereinstimmen und nur in der Reihenfolge sich unterscheiden, so ergeben sich $s + 1$ Gruppen, und es besteht diejenige, welche m-mal A und n-mal B umfafst, aus

$$\frac{s!}{m!\,n!}\,a^m\,b^n \qquad (\alpha)$$

Gliedern. Dies also ist auch die Anzahl der günstigen Fälle dafür, dafs das Ergebnis der s Versuche aus einer m-maligen Wiederholung von A und einer n-maligen Wiederholung von B in irgend welcher Reihenfolge bestehe; durch $(a + b)^s$ dividirt giebt dies die diesem Thatbestande entsprechende Wahrscheinlichkeit

$$\frac{s!}{m!\,n!}\left(\frac{a}{a+b}\right)^m\left(\frac{b}{a+b}\right)^n = \frac{s!}{m!\,n!}\,p^m\,q^n, \qquad (\beta)$$

wobei p die Wahrscheinlichkeit bedeutet, dafs im einzelnen Versuch A eintrifft, und q die analoge Wahrscheinlichkeit für B ist.

Die Summe der auf alle Gruppen bezüglichen Ausdrücke (α) ist die Entwickelung von $(a + b)^s$, die ebenso gebildete Summe der Ausdrücke (β) ist die Entwickelung von $(p + q)^s$ und hat den Wert 1.

Unter den Ausdrücken (α) wie auch unter jenen (β) hat derjenige den relativ gröfsten Wert, in welchem das Exponentenverhältnis $m : n$ dem Verhältnis der Basen $a : b$ oder $p : q$ gleichkommt, oder, wenn eine solche Aufteilung der Zahl s nicht möglich ist, wo es ihm zunächstkommt. Versteht man also unter ps, qs, falls es nicht ganze Zahlen sind, die diesen Produkten zunächstliegenden ganzen Zahlen von der Summe s, so ist

$$\frac{s!}{(ps)!\,(qs)!}\,p^{ps}\,q^{qs} \qquad (\gamma)$$

der gröfste unter den Ausdrücken (β), folglich unter den möglichen Ergebnissen der s Versuche dasjenige das relativ wahrscheinlichste,

welches in ps-mal A und qs-mal B in irgend einer Anordnung besteht.

An sich betrachtet wird die Wahrscheinlichkeit (γ) bei festem p, q mit wachsendem s immer kleiner; ihre Abnahme erfolgt aber nicht so rasch wie jene der zu beiden Seiten benachbarten Glieder der Entwickelung $(p+q)^s$, die bei wachsendem s in um so stärkerem Maſse abnehmen, je weiter sie von (γ) abstehen. Dieses Verhalten hat zur Folge, daſs die Summe aus den $2l+1$ (l kleiner als die kleinere der Zahlen ps, qs) Gliedern

$$\begin{array}{l} \frac{s!}{(ps+l)!\,(qs-l)!}p^{ps+l}q^{qs-l}, \ldots \frac{s!}{(ps+1)!(qs-1)!}p^{ps+1}q^{qs-1}, \\ (\gamma), \frac{s!}{(ps-1)!\,(qs+1)!}p^{ps-1}q^{qs+1}, \ldots \frac{s!}{(ps-l)!\,(qs+l)!}p^{ps-l}q^{qs+l}, \end{array} \qquad (\delta)$$

in deren Mitte (γ) steht, die Summe aller übrigen $s-2l-1$ und somit auch die Summe $(p+q)^s = 1$ aller Glieder in wachsendem Verhältnisse überragt, wenn s zunimmt, dermaſsen, daſs einerseits bei gegebenem $\frac{l}{s}$ jene Summe durch entsprechende Wahl von s gröſser gemacht werden kann als ein beliebig groſs festgesetzter echter Bruch, und daſs andererseits bei beliebig groſs gewähltem Wert (<1) der Summe die Anzahl ihrer Glieder, also die Zahl l im Vergleich zu s immer kleiner und kleiner wird, wenn s zunimmt.

Die Summe aus den Gliedern (δ) bedeutet aber die Wahrscheinlichkeit, daſs in den s Versuchen ein Ergebnis zustandekomme (oder zustandegekommen sei), in welchem die Wiederholungszahlen von A und B sich von den Wiederholungszahlen ps resp. qs der wahrscheinlichsten Combination höchstens um l dem absoluten Betrage nach unterscheiden.

Das Resultat des ganzen Gedankenganges kann nun dahin zusammengefaſst werden: es sei

1) möglich, die Zahl s der Versuche so groſs zu wählen, daſs mit einer beliebig groſsen Wahrscheinlichkeit zu erwarten sei, das Ergebnis dieser Versuche werde in den Wiederholungszahlen von A und B sich von der wahrscheinlichsten Combination (γ) nicht mehr als innerhalb vorgezeichneter Grenzen ($ps \pm l$, $qs \mp l$) unterscheiden; und es gehe

2) an, durch entsprechende Wahl von s bei gegebener Wahrscheinlichkeit ihres Einhaltens die Grenzen der Abweichungen des erzielten Beobachtungsergebnisses von der wahrscheinlichsten Combination, im Verhältnis zur Zahl der Beobachtungen selbst, beliebig eng zu ziehen.

Zugleich konnte wahrgenommen werden, daſs die Durchführung des ganzen Gedankenganges keiner neuen Principe bedürfe, sondern lediglich auf dem Begriffe der Wahrscheinlichkeit und auf dem Satze

von der totalen Wahrscheinlichkeit beruhe, welch' letzterer aber im Grunde genommen eine unmittelbare Folge der Wahrscheinlichkeitsdefinition ist.

Die mifsverständliche Auffassung, welche Stumpf[1]) in seiner Kritik bekämpft und die bei älteren wie bei neueren Autoren mitunter zu treffen ist, stellt sich vor, das Gesetz der grofsen Zahlen enthalte eine Aussage darüber, wie sich das wirkliche Geschehen gestalten werde; sie nimmt mehr oder weniger deutlich das Walten eines geheimnisvollen Processes an, welcher allmählich ausgleichend, die verwirrenden Wirkungen des Zufalls verwischend wirkt. Diese Auffassung, mit der vorausgesetzten Unabhängigkeit der einzelnen Fälle im Widerspruche, äufsert sich in der prophezeienden Formulirung des Bernoulli'schen Theorems, wie man sie hin und wieder findet; man kann sie auch in der Bezeichnung „Gesetz der grofsen Zahlen“ vermuten, insofern man gewohnt ist, unter Gesetz eine Vorschrift zu verstehen, nach welcher etwas geschieht oder geschehen soll. Wenn aber das Ergebnis einer grofsen Versuchsreihe aufserhalb, selbst beträchtlich aufserhalb solcher Grenzen fällt, deren Einhaltung a priori mit grofser Wahrscheinlichkeit zu erwarten war, so ist das keineswegs als eine „Abweichung vom Gesetze“, sondern nur als die Realisirung einer von den vielen Möglichkeiten anzusehen.

Stumpf führt eine Stelle aus Prevost und Lhuilier[1]) als Beispiel einer solchen mystischen Auffassung an, welche in versteckter Weise einen causalen Einflufs der einzelnen Fälle auf einander supponirt, der so geartet ist, dafs er auf einen Ausgleich der Fälle hinzielt. Die genannten Autoren, denen wir in anderen Fragen noch begegnen werden, bezeichneten es als eine notwendige Fiction der Wahrscheinlichkeitstheorie, dafs die gleichmöglichen Fälle der Reihe nach darankommen. Nicht viel anders liest sich die Erklärung, welche Windelband[1]) im II. Abschnitt seiner „Lehren vom Zufall“ für die gleichmöglichen Fälle giebt: es liege im Begriffe derselben, dafs bei einer genügend grofsen Anzahl von Fällen jeder Möglichkeit eine gleiche Menge von Gelegenheiten zu ihrer Realisirung geboten wird; darauf wird dann eine Begründung des Gesetzes der grofsen Zahlen aufgebaut.

Wenn man einer solchen Auffassung sich anschliefst, dann liegt es nicht mehr fern, den vermeintlichen Inhalt des Bernoulli'schen Theorems zur Grundlage der Wahrscheinlichkeitslehre zu machen. So ging J. St. Mill[1]) vor, wenn er die Wahrscheinlichkeit durch die relative Häufigkeit des Vorkommens innerhalb einer grofsen Anzahl von Fällen definirte, und Venn[1]) trat einer solchen rein empirischen Begründung des Princips der Wahrscheinlichkeitstheorie bei. Zu ähnlichen Schlüssen kommt Goldschmidt[1]) in seiner wortreichen Kritik der Wahrscheinlichkeitsrechnung; nach seiner Auffassung ist es selbstverständlich, dafs das wirkliche Geschehen der Combination

entspreche oder nahekomme, welche als die wahrscheinlichste sich ergiebt, weil ein anderes absurd wäre; das berühmte Theorem gebe daher keinen Beweis eines Gesetzes der grofsen Zahlen, sondern setze nur den Gedankengang des alltäglichen Verstandes in eine arithmetische Formel um; den Inhalt des Satzes, soweit er ohne weiteres einleuchtet, zum Ausgangspunkte der Definition des mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriffes zu machen, widerspreche zwar dem historischen Gange der Disciplin, sei auch wohl unzweckmäfsig, aber wer diesen Weg gehen wollte, müfste von dem Vorwurf der Verkehrtheit freigesprochen werden.

33. Wir wenden uns nun der analytischen Darstellung des Bernoulli'schen Theorems zu, deren hauptsächliche Entwickelungsphasen Eggenberger[1]) in einer verdienstlichen Monographie vorzüglich gezeichnet hat. Hier handelt es sich um die Hervorhebung der wesentlichen Momente.

Bei dem Ziele, welches Jakob Bernoulli verfolgte und das in Art. 31 gekennzeichnet worden ist, war es ihm nur darum zu thun, einen allgemeinen Beweis für die unter 1) des vorigen Artikels aufgeführte Thatsache zu geben; eine numerische Bestimmung der zu gegebenen Grenzen für die Wiederholungszahlen von A und B gehörigen Wahrscheinlichkeit lag nicht in seiner Absicht und wurde von ihm auch nicht versucht.

Die Bernoulli'sche Beweisführung, zwar umständlich aber correct durchgeführt, beruht lediglich auf Eigenschaften der Binomialformel $(a+b)^s$; es wird die Existenz eines gröfsten Gliedes dieser Entwickelung erwiesen und dann die Art der Abnahme der Glieder zu beiden Seiten des Maximums eingehend untersucht. In geschickter Weise wählt Bernoulli dabei den Exponenten s, d. i. die Versuchszahl, als ein Vielfaches der Gesamtzahl der möglichen Fälle, so dafs seiner Untersuchung — in der von uns adoptirten Bezeichnung — der Ausdruck $(a+b)^{\nu(a+b)}$ zugrundeliegt. Das maximale Glied lautet dann

$$\frac{s!}{(\nu a)!\,(\nu b)!}\,a^{\nu a}\,b^{\nu b}; \tag{α}$$

die weitere Untersuchung bezieht sich auf die $2\nu+1$ Glieder umfassende Gruppe, deren äufserste Glieder lauten

$$\frac{s!}{[\nu(a+1)]!\,[\nu(b-1)]!}\,a^{\nu(a+1)}\,b^{\nu(b-1)}, \quad \frac{s!}{[\nu(a-1)]!\,[\nu(b+1)]!}\,a^{\nu(a-1)}\,b^{\nu(b+1)}, \tag{β}$$

und deren Mitte das Glied (α) einnimmt; von ihrer Summe wird auf Grund der vordem erforschten Abnahmeverhältnisse dargethan, dafs sie durch entsprechende Vergrösserung von ν im Verhältnis zur Summe aller übrigen Glieder beliebig grofs gemacht werden könne. Im Verfolge dieses Beweises kommt Bernoulli dazu,

Grenzen, wenn auch weite Grenzen, für ν und damit für die Versuchszahl s anzugeben, welche eingehalten werden müssen, soll das Verhältnis der genannten zwei Summen mindestens $= c$ werden; er findet, es müsse für ν die gröſsere der beiden (nach oben abgerundeten) Zahlen

$$\begin{aligned}&\frac{\log c + \log(a-1)}{\log(b+1) - \log b}\left(1 + \frac{a}{b+1}\right) - \frac{a}{b+1}, \\ &\frac{\log c + \log(b-1)}{\log(a+1) - \log a}\left(1 + \frac{b}{a+1}\right) - \frac{b}{a+1}\end{aligned} \qquad (\gamma)$$

genommen werden. Mit den Daten $a = 30$, $b = 20$, $c = 1000$ findet er 25500 als diejenige Versuchszahl, bei welcher eine $\frac{c}{c+1} = \frac{1000}{1001}$ übertreffende Wahrscheinlichkeit dafür besteht, das Verhältnis der Wiederholungszahl von A zur Zahl der Versuche werde nicht über das Intervall $(\frac{29}{50}, \frac{31}{50})$, die Wiederholungszahl selbst nicht über das Intervall (14790, 15810) hinausfallen.

Das gröſste Verdienst um die mathematische Darstellung des Bernoulli'schen Theorems in der Form, in welcher es heute gegeben wird, hat sich De Moivre erworben. In dem verfolgten Ziele weicht er von Bernoulli wesentlich ab und erblickt dasselbe in der numerischen Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, daſs in einer gegebenen groſsen Versuchszahl und bei gegebenen Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B deren Wiederholungszahlen nicht mehr als innerhalb bezeichneter Grenzen von den wahrscheinlichsten Werten abweichen; mit anderen Worten, er sucht einen Ausdruck für die Summe einer Gruppe von Gliedern der Entwickelung von $(p+q)^s$, deren Mitte das maximale Glied einnimmt. Diese Problemstellung drückt sich denn auch sehr deutlich in der Überschrift jenes Abschnittes der „Doctrine of chances“[2]) aus, welcher diesem Gegenstande gewidmet ist; die Überschrift lautet: „A Method of approximating the Sum of the Terms of the Binomial $(a+b)^n$ expanded into a Series, from whence are deduced some practical Rules to estimate the Degree of Assent which is to be given to Experiments“. Während jedoch hier meist nur die Resultate der mathematischen Deduction angeführt sind, ist diese selbst in den „Miscellanea Analytica“[4]) desselben Verfassers zu suchen.

Eine wichtige Vorfrage, welche De Moivre lösen muſste, bestand in der näherungsweisen Darstellung des gröſsten Gliedes der Entwickelung sowie eines Gliedes, welches von diesem durch eine bestimmte Anzahl von Gliedern getrennt ist, unter Voraussetzung eines sehr groſsen Exponenten. Er fand für die Lösung den richtigen Weg und bedurfte nur in einem Punkte der Ergänzung durch fremde Hand. De Moivre's Untersuchungen bezogen sich zunächst auf das einfache Binom $(1+1)^s$, welches dem Falle entspricht, daſs die

beiden Ereignisse A und B gleich wahrscheinlich sind; er dehnte jedoch dann die gewonnenen Resultate auf den allgemeinen Fall, auf das Binom $(a+b)^s$, aus. Schon bei der Frage nach einem Näherungswerte für das Verhältnis des gröfsten Gliedes von $(1+1)^s$ zur Summe 2^s aller Glieder ward De Moivre zu einer Constanten geführt, für die er eine Reihe fand, deren wahren Charakter er aber nicht zu erkennen vermochte; für das gedachte Verhältnis ergab sich ihm nämlich der Ausdruck

$$\frac{2}{B\sqrt{s}}, \qquad (\delta)$$

worin

$$l\cdot B = 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} - \cdots \qquad (\varepsilon)$$

Zu derselben Constanten mufste er gelangen, als er sich der hier naheliegenden Aufgabe zuwandte, für den natürlichen Logarithmus der Facultät $1\cdot 2\cdots(m-1)$ unter der Annahme, m sei eine grofse Zahl, einen angenäherten Wert zu suchen; das bezügliche Resultat

$$l\cdot[1\cdot 2\cdots(m-1)]$$

$$= \left(m-\frac{1}{2}\right) l\cdot m - m + \frac{1}{12m} - \frac{1}{360m^3} + \frac{1}{1260m^5} - \frac{1}{1680m^7} \pm \cdots$$

$$+ 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} \mp \cdots \qquad (\zeta)$$

enthält nämlich die mit $l\cdot B$ bezeichnete Zahl wieder.

Den Wert der Zahl B und damit den merkwürdigen Charakter derselben erkannte Stirling[1]), welcher auf De Moivre's Anregung mit den gleichen Aufgaben, nämlich mit der Bestimmung des Verhältnisses, in welchem das Mittelglied der Entwickelung $(1+1)^s$ zur Summe aller Glieder steht, und mit der Herstellung einer Reihe für die Summe der Logarithmen mehrerer in arithmetischer Progression fortschreitenden Zahlen, sich befafste. Den Weg, auf welchem er zu dem Werte $\sqrt{2\pi}$ für B gelangt war, hat Stirling nicht angegeben; nach De Moivre's Vermutung bediente er sich dabei der Formel von Wallis.

Hiernach teilen sich De Moivre und Stirling in das Verdienst, die nach dem letzteren benannte Formel zur näherungsweisen Darstellung einer Facultät, welche eines der merkwürdigsten Resultate der Analysis bildet und für die Wahrscheinlichkeitsrechnung von der gröfsten Bedeutung ist, gefunden zu haben. In der heute üblichen Schreibweise und auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{s^2}$ abgekürzt lautet sie

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots s = s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}\left(1+\frac{1}{12s}+\frac{1}{288s^2}+\cdots\right); \qquad (\eta)$$

für die meisten Fälle genügt jedoch die weitergehende Approximation

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s = s^s e^{-s} \sqrt{2 \pi s}. \qquad (\vartheta)$$

Um die Neubegründung dieser Formel haben sich Euler[2]), Laplace[13]), Serret, welcher sie vollständig aus der Wallis'schen Formel ableitet, u. a. verdient gemacht. Dort, wo es sich um die wirkliche Ausrechnung einer einzelnen Facultät, und nicht wie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung um Verhältnisse von Facultäten handelt, würde eine von Forsyth[1]) angegebene Näherungsformel der Formel (ϑ) vorzuziehen sein, weil sie gröfsere absolute Genauigkeit bietet; sie lautet

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s = \sqrt{2 \pi} \left\{ \frac{\sqrt{s^2 + s + \frac{1}{6}}}{e} \right\}^{s + \frac{1}{2}} \qquad (\iota)$$

und giebt das linksstehende Product auf $\frac{1}{240 s^3}$ genau, während (ϑ) einen Fehler von der Ordnung $\frac{1}{12 s}$ zur Folge hat. An dieser Stelle sei noch bemerkt, dafs Degen[1]) für die Zwecke der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein Tabellenwerk berechnet hat, in welchem die zwölfstelligen Logarithmen aller $s!$ von $s = 1$ bis $s = 1200$ zusammengestellt sind.

Wie schon bemerkt, kam De Moivre in Verfolgung seines Zieles weiter zu der Aufgabe, das Verhältnis jenes Gliedes der Entwickelung $(1 + 1)^s$, das vom gröfsten durch $l - 1$ Glieder getrennt ist, näherungsweise auszudrücken; er fand für den natürlichen Logarithmus dieses Verhältnisses den Wert $-\frac{2 l^2}{s}$ und dehnte dieses Resultat auch auf das Binom $(a + b)^s$ aus, in welchem Falle sich ihm $-\frac{(a+b)^2}{2abs} l^2$ ergab. Damit war für das Glied T_l der Entwickelung, das von dem gröfsten um l Stellen nach der einen oder der anderen Seite entfernt ist, in moderner Bezeichnung der Ausdruck

$$T_0 e^{-\frac{2 l^2}{s}}, \quad \text{beziehungsweise} \quad T_0 e^{-\frac{(a+b)^2}{2abs} l^2}$$

gefunden, worin T_0 das gröfste Glied bezeichnet; für dieses aber hatte sich mit Stirling's Hülfe der Wert

$$\frac{2}{\sqrt{2 \pi s}}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{a + b}{\sqrt{2 a b \pi s}}$$

ergeben.

Die zur vollen Lösung des Problems, das er sich gestellt, erforderliche Summirung hat De Moivre unrichtig ausgeführt. Er giebt als Wert für die Summe $T_l + T_{l-1} + \cdots + T_1 + T_0$ den Ausdruck

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi s}}\left\{1-\frac{2l^3}{1\cdot 3\,s}+\frac{4l^5}{2\cdot 5\,s^2}-\frac{8l^7}{6\cdot 7\,s^3}+\frac{16l^9}{24\cdot 9\,s^4}\mp\cdots\right\};$$

dies aber ist der in eine Reihe entwickelte Wert des Integrals

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi s}}\int_0^l e^{-\frac{2l^2}{s}}\,dl.$$

Das doppelte dieses Betrages fafst er schliefslich als Wahrscheinlichkeit dafür auf, dafs in s Beobachtungen jedes der Ereignisse A, B in einer Wiederholungszahl erscheine, die zwischen $\frac{s}{2}-l$ und $\frac{s}{2}+l$ enthalten ist. Der eine Fehler liegt in der Ersetzung der endlichen Summe $\sum_{x=0}^{l} T_x$ durch das Integral $\int_0^l T_x dx$; der andere darin, dafs vermöge der Verdoppelung das maximale Glied T_0 zweimal gezählt wird, statt wie jedes andere nur einfach genommen zu werden; dieser zweite Fehler würde nur in dem Falle, wo A, B gleich wahrscheinlich sind und n eine ungerade Zahl ist, entfallen.

Das Mittel, auch diesen Teil der Aufgabe correct durchzuführen, ist später durch Maclaurin[1]) und Euler[2]) gefunden worden. Maclaurin war der erste, welcher sich mit der Darstellung einer endlichen Summe von Functionswerten befafste, deren Argumente in arithmetischer Progression fortschreiten; er stützte sich dabei auf die von Newton begründete mechanische Quadratur, ging also von einem geometrischen Problem aus. Auf rein analytischer Grundlage wurde diese Darstellung durch Euler gegeben; seinen Namen führt denn auch die Summenformel

$$\sum_0^{l-1}{}_x\, y_x=\int_0^l y_x\,dx-\frac{1}{2}\Big\{y_x\Big\}_0^l$$

$$+\left\{\frac{B_1 y_x'}{2!}\right\}_0^l-\left\{\frac{B_2 y_x'''}{4!}\right\}_0^l+\left\{\frac{B_3 y_x^{\mathrm{V}}}{6!}\right\}_0^l-\cdots, \qquad (\varkappa)$$

worin $B_1=\frac{1}{6}$, $B_2=\frac{1}{30}$, $B_3=\frac{1}{42}$, $\cdots$ die Bernoulli'schen Zahlen sind.

Indessen blieb es Laplace[13]) vorbehalten, mit den von Moivre, Stirling, Maclaurin und Euler geschaffenen Hülfsmitteln eine exacte, in gewissem Sinne abschliefsende analytische Formulirung des Bernoulli'schen Theorems zu geben. In der von uns gewählten Bezeichnung lautet dieselbe dahin, es sei

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2}dt+\frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi s p q}} \qquad (\lambda)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs die Wiederholungszahl des Ereignisses A, dessen apriorische Wahrscheinlichkeit p ist, in einer sehr grofsen Anzahl s von Versuchen eingeschlossen sei zwischen den Grenzen

$$ps \mp \gamma\sqrt{2pqs}, \tag{μ}$$

das Verhältnis jener Wiederholungszahl zur Gesamtzahl der Versuche also zwischen den Grenzen

$$p \mp \gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}}. \tag{μ'}$$

Dabei ist $q = 1 - p$, und bedeutet in (μ) ps, falls es nicht schon eine ganze Zahl ist, die diesem Producte nächstliegende ganze Zahl.*) Laplace steht bei der Ableitung dieses wichtigen Resultates insofern auf eigenem Boden, als er die oben bezeichneten Hülfsmittel, also die Stirling'sche Formel und Euler's Summenformel von neuem und aus einer selbstgeschaffenen Quelle, aus der Theorie der erzeugenden Functionen, herleitet; es darf aber nicht übersehen werden, dafs es lange vor ihm, um die Mitte des vorigen Jahrhunderts, möglich gewesen wäre, das richtige Resultat herzustellen, weil alle Behelfe hierfür vorhanden waren. Seine Analyse läfst den Genauigkeitsgrad der schliefslichen Ergebnisse erkennen; er unterdrückt im Laufe derselben Glieder von der Kleinheitsordnung $\frac{1}{s}$ aufwärts und bemerkt schliefslich, dafs es leicht wäre, die Analyse so zu führen, dafs auch Glieder von der Ordnung $\frac{1}{s}$ und die höheren zur Wirkung kämen, und dafs seine Resultate in aller Strenge Geltung hätten für ein unendliches s.

Es verdient bemerkt zu werden, dafs das Laplace'sche Resultat auch ohne Heranziehung der Euler'schen Summenformel, mit Hülfe einer sehr einfachen Formel für die mechanische Quadratur, gewonnen werden kann. Bezeichnet man nämlich die zu den Abscissen $-l$, $-l+1, \cdots 0, \cdots l-1$, l gehörigen Ordinaten einer Curve mit y_{-l}, $y_{-l+1}, \cdots y_0, \cdots y_{l-1}$, y_l, so kann die von der Curve, den Endordinaten und der Abscissenaxe eingeschlossene Fläche näherungsweise durch einen der beiden Ausdrücke

$$y_{-l} + y_{-l+1} + \cdots + y_{l-1}$$
$$y_{-l+1} + y_{-l+2} + \cdots + y_l$$

gegeben werden; wählt man das arithmetische Mittel aus beiden, so ergiebt sich der approximative Ansatz

*) Genauer gesprochen: die zwischen den Grenzen $ps - q$ und $ps + q$ liegende ganze Zahl.

$$\int_{-l}^{l} y\,dx = \sum_{-l}^{l}{}^{x}\, y_x - \frac{y_{-l} + y_l}{2},$$

woraus

$$\sum_{-l}^{l}{}^{x}\, y_x = \int_{-l}^{l} y\,dx + \frac{y_{-l} + y_l}{2};$$

setzt man $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}\, e^{-\frac{x^2}{2spq}}$, so geht die linke Seite über in die verlangte Wahrscheinlichkeit P, so dafs näherungsweise

$$P = \frac{2}{\sqrt{2\pi spq}} \int_0^l e^{-\frac{x^2}{2spq}}\,dx + \frac{e^{-\frac{l^2}{2spq}}}{\sqrt{2\pi spq}};$$

es bedarf jetzt nur noch der Substitution $\frac{x}{\sqrt{2spq}} = t$, $\frac{l}{\sqrt{2spq}} = \gamma$, um das Resultat ($\lambda$) wieder zu erhalten.

Eggenberger[1]) hat in der bereits citirten Monographie im VIII. Abschnitt eine Umformung des Laplace'schen Resultates gegeben und begründet, welche den Zweck hat, die Zweiteiligkeit von P aufzuheben, d. h. den integralfreien Teil mit dem Integral zu vereinigen durch eine entsprechende Correctur der oberen Grenze. Das Ergebnis seiner Untersuchung ist folgendes: Ist l die gröfste Abweichung der Wiederholungszahl von A von dem Werte ps, und setzt man $\frac{l + \frac{1}{2}}{\sqrt{2spq}} = \gamma$, so ist

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\,dt \qquad (\nu)$$

die Wahrscheinlichkeit, dafs die Wiederholungszahl von A zwischen die Grenzen

$$ps \mp \gamma\sqrt{2pqs} \qquad (\nu')$$

fällt; der Unterschied gegen die Resultate (λ), (μ) besteht also darin, dafs in diesen $\frac{l}{\sqrt{2spq}} = \gamma$ gesetzt worden ist.

Man erkennt hieraus, sowie auch unmittelbar aus der Formel (λ), dafs der zweite Teil von P bei grofsem s nur einen sehr geringen Beitrag liefert, dafs also unter dieser Voraussetzung der Fehler, den De Moivre bei der Summirung begangen, kein erheblicher ist. Zwei neuere französische Autoren gehen denn auch einer eigentlichen Summirung aus dem Wege und begnügen sich mit dem ersten Teil des Laplace'schen Ausdrucks (λ). Bertrand[3]) verläfst, nachdem

er den Ausdruck für das Glied $T_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} e^{-\frac{l^2}{2spq}}$ abgeleitet, die Vorstellung des ganzzahligen l, ersetzt l durch eine stetige Variable z und schreibt einer „Abweichung" (écart) zwischen z und $z + dz$ die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} e^{-\frac{z^2}{2spq}} dz$$

zu; er kommt auf diese Weise zu dem Ausdruck

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt, \quad \gamma = \frac{l}{\sqrt{2spq}} \qquad (\xi)$$

für die Wahrscheinlichkeit der Einhaltung der Grenzen $ps \mp l$. Poincaré[1]), der sich gleich zu Beginn die Aufgabe stellt, jenes Glied der Entwickelung $(p+q)^s$ näherungsweise darzustellen, in welchem der Exponent von p gleich ist $ps + \lambda\sqrt{s}$, findet für dieses Glied den Ausdruck

$$\frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}}{\sqrt{2\pi pqs}},$$

und für die Wahrscheinlichkeit, dafs die Wiederholungszahl von A zwischen die Grenzen $ps + \lambda\sqrt{s}$ und $ps + (\lambda + d\lambda)\sqrt{s}$ falle, den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi pq}} e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}} d\lambda;$$

daraus resultirt denn die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt, \quad \gamma = \frac{l}{\sqrt{2pq}} \qquad (o)$$

für die Einhaltung der Grenzen $ps \mp l\sqrt{s}$.

Für die Anwendung des Bernoulli'schen Theorems auf besondere Fälle sind Tafeln des Integrals $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$ vorhanden; jedes gröfsere Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung und über Fehlertheorie enthält eine solche in mehr oder weniger ausgedehntem Umfang. Der gemeinsame Ursprung aller dieser Tafeln ist die von Kramp[1]) für Zwecke der Refractionstheorie gerechnete Tafel des Integrals

$G = \int_{\gamma}^{\infty} e^{-t^2}\,dt$ und seines Logarithmus; sie ist corrigirt wiedergegeben worden von De Morgan[2]). Ausführlichere Tafeln für $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 1 - \frac{2G}{\sqrt{\pi}}$ finden sich bei Encke[2]), De Morgan[2]), Glaisher (im Philosoph. Magaz. XLII, zugleich Quelle über Umfang und Entstehung der einzelnen Tafeln), Czuber[10]), Kämpfe[1]) (eine nach Tausendteln von γ fortschreitende vierstellige Tafel für das Intervall von $0 \cdot 000$ bis $1 \cdot 509$).

34. Das Bernoulli'sche Theorem geht von der wesentlichen Voraussetzung aus, dafs die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B durch die ganze Dauer der Versuche constant bleiben; dies involvirt zugleich die Unabhängigkeit der einzelnen Versuche. Man kann sich diese Bedingungen am besten durch ein Urnenschema versinnlichen: Aus einer Urne, welche weifse und schwarze Kugeln in solcher Anzahl enthält, dafs das Ziehen einer weifsen Kugel mit der Wahrscheinlichkeit p, das einer schwarzen mit der Wahrscheinlichkeit q zu erwarten ist, werden s Ziehungen gemacht derart, dafs die gezogene Kugel jedesmal zurückgelegt und der unverändert bleibende Inhalt der Urne nach jeder Ziehung durchgreifend vermischt wird.

Poisson[8]), dem gleichwie Bernoulli der Schlufs von der Erfahrung auf die zugrundeliegende Urteilsmaterie als oberstes Ziel vorschwebte, ging von der richtigen Erkenntnis aus, dafs in den meisten Fällen der Praxis, wo es sich um das Resultat einer bereits ausgeführten oder erst zu vollziehenden Beobachtungsreihe handelt, die Wahrscheinlichkeiten der dabei concurrirenden Ereignisse von Versuch zu Versuch sich ändern. Er widmete der Frage, wie in solchen Fällen die mathematische Erwartungsbildung zu regeln sei, ausgedehnte Untersuchungen, ohne in allen Teilen zu klar umschriebenen Resultaten zu kommen; er selbst fafst die Ergebnisse dieser Untersuchungen unter dem Namen „Gesetz der grofsen Zahlen" zusammen und erblickt in demselben eine Ausdehnung des Bernoulli'schen Theorems auf den Fall variirender Wahrscheinlichkeiten.

Das Grundproblem Poisson's besteht in folgendem. Es werden s Beobachtungen angestellt, deren jede eines der beiden entgegengesetzten Ereignisse A, B herbeiführen mufs; im ersten Versuche hat das Eintreffen von A die Wahrscheinlichkeit p_1, im zweiten die Wahrscheinlichkeit $p_2, \cdots$, im letzten die Wahrscheinlichkeit p_s; dem B kommt jeweilen die complementäre Wahrscheinlichkeit, also beziehungsweise $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2, \cdots$, $q_s = 1 - p_s$ zu. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dafs sich im ganzen A m-mal und B n-mal wiederholen werde?

Diese Wahrscheinlichkeit stellt sich zunächst in aller Strenge durch den Coefficienten von $e^{(m-n)xi}$ in der Entwickelung des Products

$$(p_1 e^{xi} + q_1 e^{-xi})(p_2 e^{xi} + q_2 e^{-xi}) \cdots (p_s e^{xi} + q_s e^{-xi}) \qquad (\alpha)$$

nach Potenzen von e dar. Mit Hülfe einer Analyse, welche auf Laplace[13]) „Théorie analytique“, art. 38, zurückführt, findet er, unter Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung $\frac{1}{s}$ und darüber und unter der Voraussetzung, dafs die p_λ, q_λ weder der Null, noch der Einheit sehr nahe sind, den Näherungsausdruck

$$\left[\frac{1}{k\sqrt{\pi s}} - \frac{h\theta}{2k^4 s\sqrt{\pi}}(3 - 2\theta^2)\right] e^{-\theta^2} \qquad (\beta)$$

für die Wahrscheinlichkeit, es wiederhole sich das Ereignis A

$$ps - k\theta\sqrt{s}\text{-mal}$$

und das Ereignis B (γ)

$$qs + k\theta\sqrt{s}\text{-mal.}$$

Darin ist vor allem die Bedeutung von p und q bemerkenswert; es ist

$$p = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_s}{s} \qquad (\delta)$$

das arithmetische Mittel aus den Wahrscheinlichkeiten, welche dem Ereignis A im Laufe der gemachten Versuche eigen sind; Poisson nennt diesen Wert die „mittlere Wahrscheinlichkeit“ von A; in neuerer Terminologie wird p die Totalmöglichkeit des Ereignisses A genannt, so bei v. Kries[1]). In gleicher Weise ist

$$q = \frac{q_1 + q_2 + \cdots + q_s}{s}, \qquad (\delta')$$

und wieder ist $p + q = 1$. Was die übrigen Buchstaben anlangt, so haben sie folgende Bedeutungen:

$$k = \sqrt{\frac{2\Sigma p_\lambda q_\lambda}{s}}$$

$$(\lambda = 1, 2, \cdots s) \qquad (\varepsilon)$$

$$h = \frac{4}{3s}\sum p_\lambda q_\lambda (p_\lambda - q_\lambda).$$

Dem Gedankengange Bernoulli's folgend geht nun Poisson von der Wahrscheinlichkeit einer einzelnen Combination zu der Wahrscheinlichkeit über, dafs die Wiederholungszahlen der Ereignisse A, B zwischen gegebenen Grenzen enthalten sein werden, und findet, es sei mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\,dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{k\sqrt{\pi s}} \qquad (\zeta)$$

zu erwarten, dafs die Wiederholungszahlen von A, B zwischen den respectiven Grenzen

$$ps \mp \gamma k\sqrt{s}, \quad qs \mp \gamma k\sqrt{s} \qquad (\eta)$$

liegen werden. Daraus folgt, dafs mit wachsender Zahl der Versuche die Wahrscheinlichkeit, dafs die Verhältniszahlen $\frac{m}{s}$, $\frac{n}{s}$ nicht mehr als innerhalb vorgezeichneter Grenzen von den Totalmöglichkeiten p, q abweichen, immer gröfser und gröfser wird und der Einheit beliebig nahe gebracht werden kann durch entsprechende Wahl von s.

Poisson hebt es ausdrücklich hervor, dafs die Resultate (ζ), (η) in diejenigen des Bernoulli'schen Theorems — siehe die Gleichungen (λ), (μ) des vorigen Artikels — übergehen, wenn die Wahrscheinlichkeit von A beständig gleich p und jene von B beständig gleich q bleibt, weil dann vermöge der ersten Formel (ε) $k = \sqrt{2pq}$ wird.

Wichtig scheint uns die folgende Betrachtung. Ist δ_λ die Abweichung der Wahrscheinlichkeit p_λ im λ-ten Versuche von der mittleren Wahrscheinlichkeit p in dem Sinne, dafs $p_\lambda = p - \delta_\lambda$, so ist notwendig $q_\lambda = q + \delta_\lambda$, somit

$$k^2 s = 2\sum p_\lambda q_\lambda = 2\sum (p - \delta_\lambda)(q + \delta_\lambda)$$
$$= 2spq + 2(p - q)\sum \delta_\lambda - 2\sum \delta_\lambda^2;$$

nun ist die algebraische Summe der Abweichungen der einzelnen p_λ von ihrem arithmetischen Mittel p gleich Null, also $\sum \delta_\lambda = 0$, folglich

$$k^2 s = 2spq - 2\sum \delta_\lambda^2,$$

also $k\sqrt{s} < \sqrt{2pqs}$. Demnach sind bei gegebener Wahrscheinlichkeit P die Grenzen (η) enger, als sie in dem Falle wären, wenn den Ereignissen A, B durch die ganze Dauer der Versuche beständig die mittleren Wahrscheinlichkeiten p, q zukämen.

Der hier behandelte Fall könnte durch das folgende Schema dargestellt werden. Es liegen mehrere Urnen vor, deren jede weifse und schwarze Kugeln in bestimmtem Mengenverhältnis enthält; man zieht aus der ersten Urne eine Kugel und legt sie zurück, dann aus der zweiten, u. s. f., wobei die Reihenfolge, in welcher die Urnen darankommen, oder doch die Anzahl der Ziehungen, welche aus

jeder einzelnen Urne zu machen sind, im voraus bestimmt sein soll. Ist die Zahl s der Ziehungen grofs, und sind dabei m weifse Kugeln zum Vorschein gekommen, so wird das Verhältnis $\frac{m}{s}$ von der Totalmöglichkeit einer weifsen Kugel vermutlich nur wenig abweichen. Das Resultat einer zweiten Versuchsreihe, welche zu dem Verhältnis $\frac{m'}{s'}$ geführt haben möge, ist aber nur dann mit dem früheren vergleichbar, wenn die Anordnung der Ziehungen die gleiche war, d. h. wenn jede Urne ebenso oft oder r-mal so oft darankam wie das erste Mal; denn nur dann liegt beidemal dieselbe durchschnittliche Wahrscheinlichkeit (und auch dasselbe k) zugrunde.

Poisson construirte, um dieser letzteren Bedingung zu entgehen, einen anderen Modus der Durchführung der Ziehungen: die Reihenfolge, in welcher die Urnen darankommen, sollte nicht im voraus bestimmt sein, sondern dem Zufalle überlassen bleiben. Es liegen ν Urnen $U_1, U_2, \cdots U_\nu$ vor, äufserlich nicht von einander unterscheidbar und derart mit weifsen und schwarzen Kugeln gefüllt, dafs aus der Urne U_i der Zug einer weifsen Kugel mit der Wahrscheinlichkeit p_i zu erwarten ist. Man vollführt s Ziehungen, die Urnen dabei blindlings wählend. Die Totalmöglichkeit für das Ziehen einer weifsen Kugel,

$$p = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_\nu}{\nu},$$

ist hier eine Gröfse von definitiver Bedeutung und bleibt für jede in der eben beschriebenen Weise ausgeführte Versuchsreihe die gleiche; sie ist nämlich die apriorische Wahrscheinlichkeit dafür, dafs man, blindlings aus einer der Urnen ziehend, eine weifse Kugel treffen werde.

Scheinbar sollte hier das Bernoulli'sche Theorem zur Anwendung gebracht werden; die Umstände sind aber von denjenigen, welche dieses voraussetzt, doch wesentlich verschieden. Freilich wird, wenn die Anzahl s der Ziehungen ein beträchtliches Vielfaches der Urnenzahl ν ist, auf Grund des Bernoulli'schen Theorems mit grofser Wahrscheinlichkeit zu erwarten sein, dafs alle Urnen nahe gleich oft darankommen und dafs aus jeder weifse und schwarze Kugeln nahezu in dem Verhältnisse hervorgehen werden, in welchem sie darin gemischt sind; aber weil sich hier Abweichungen zweifacher Art combiniren, so wird das erzielte Verhältnis $\frac{m}{s}$ bei gegebener Wahrscheinlichkeit P von der Totalmöglichkeit p stärker abweichen können, als wenn alle Ziehungen aus einer Urne gemacht worden wären, die der weifsen Kugel die Wahrscheinlichkeit p verleiht.

Poisson's Untersuchungen über das Gesetz der grofsen Zahlen, welche uns auch noch im folgenden Artikel beschäftigen sollen, haben seitens der späteren Autoren im Gebiete der Wahrscheinlich-

keitstheorie wenig Beachtung gefunden und sind mitunter geradezu abfällig beurteilt worden. Bertrand[3]) kommt sowohl in der schönen Einleitung „Les lois du hasard“ wie auch am Schlusse seiner Ausführungen über das Bernoulli'sche Theorem auf dieselben zu sprechen und sagt, dafs es ihnen sowohl an Strenge wie an Präcision mangle; die von Poisson aufgestellten Voraussetzungen seien vermöge ihrer Unbestimmtheit ungeeignet, irgend einer mathematischen Deduction zur Grundlage zu dienen. In jüngster Zeit hat auch Mansion[3]) in einer dem Gegenstande gewidmeten Notiz ein abfälliges Urteil über Inhalt und Bedeutung der Poisson'schen Verallgemeinerung des Gesetzes der grofsen Zahlen abgegeben. Auf der andern Seite ist aber insbesondere auf dem Gebiete der theoretischen Statistik wahrzunehmen, dafs man hier zu Ideenbildungen gelangt, welche auf Poisson zurückführen. In einer der hierher gehörigen Arbeiten nimmt v. Bortkewitsch[2]) Anlafs, das verallgemeinerte Gesetz der grofsen Zahlen gegen falsche Auslegungen und daraus entsprungene schiefe Urteile zu verteidigen.

35. Wie bereits in Art. 31 angedeutet worden ist, ging Bernoulli darauf aus, aus den Wiederholungszahlen m, n zweier entgegengesetzten Ereignisse A, B in einer grofsen Anzahl s von Beobachtungen auf deren unbekannte, aber constante Wahrscheinlichkeiten p, q zu schliefsen. Er vermochte zu zeigen, dafs die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs die Differenzen $\frac{m}{s} - p$, $\frac{n}{s} - q$ innerhalb gegebener, beliebig enger Grenzen fallen, durch entsprechende Vergröfserung von s der Einheit beliebig nahe gebracht werden könne; aber eine Wertbestimmung jener Wahrscheinlichkeit konnte er nicht geben.

Laplace[13]) hat unmittelbar an die Darstellung des Bernoulli'schen Theorems die Lösung dieser Aufgabe angeschlossen; der Weg, den er dabei einschlägt, ist eine einfache Umkehrung des Bernoulli'schen Satzes in der Form, welche er ihm gegeben. Nach den Formeln (λ), (μ') des Art. 33 ist

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi s p q}}$$

die Wahrscheinlichkeit, es werde die Differenz $\frac{m}{s} - p$ zwischen den Grenzen

$$\mp \gamma \sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

liegend befunden; folglich, sagt Laplace, ist P auch die Wahrscheinlichkeit dafür, die unbekannte Wahrscheinlichkeit p von A sei zwischen die Grenzen

$$\frac{m}{s} \mp \gamma \sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

eingeschlossen; mit der bei der Entwicklung dieser Formeln eingehaltenen Genauigkeit dürfe aber p durch $\frac{m}{s}$, q durch $\frac{n}{s}$ ersetzt werden; nach dieser Abänderung ergebe sich die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{s}\, e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi m n}} \qquad (\alpha)$$

für die Grenzen

$$\frac{m}{s} \mp \gamma \sqrt{\frac{2mn}{s^3}} \qquad (\beta)$$

von p.

Diesen Gedankengang hat auch Poisson[8]) im § 83 seiner „Recherches" wiederholt.

Beide Forscher haben aber für dieselbe Aufgabe noch eine andere Lösung gegeben. Laplace bemerkt im Anschlusse an die obige Umkehrung, man könne die Wahrscheinlichkeit P auch vom Gesichtspunkte der Theorie der Ursachen, also auf Grund der Bayes'schen Regel (s. Art. 40) bestimmen; in der That kommt er darauf im art. 26 seiner „Théorie analytique" zurück, findet aber hier für die nämlichen Grenzen (β) die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt. \qquad (\gamma)$$

Poisson[8]) (§ 84) geht bei der zweiten Lösung zunächst darauf aus, die Wahrscheinlichkeit für ein differentielles Intervall des Unterschieds $p - \frac{m}{s}$ zu finden; er erhält

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} - \frac{2(m-n)v^3}{3\sqrt{2\pi m n s}} e^{-v^2} \right\} dv \qquad (\delta)$$

als Wahrscheinlichkeit, dafs die Differenz $p - \frac{m}{s}$ in dem Intervall

$$\frac{v}{s}\sqrt{\frac{2mn}{s}},\quad \frac{v+dv}{s}\sqrt{\frac{2mn}{s}}$$

enthalten sei; durch Integration zwischen den Grenzen $-\gamma$ und γ würde sich daraus die Wahrscheinlichkeit (γ) für die Grenzen (β) ergeben.

Diese Incongruenz der Resultate, welche praktisch bedeutungslos ist, weil der zweite Teil in (α) bei einigermafsen gröfserem γ nur einen sehr geringen Beitrag liefert, ist wegen des theoretischen Interesses wiederholt Gegenstand kritischer Betrachtungen gewesen, so von Seite De Morgan's (Cambr. Phil. Trans. VI, 1837), in Tod-

hunter's[1]) „History" (art. 997), in einer dieser Frage von Monro[1]) gewidmeten Note. Todhunter weist insbesondere darauf hin, dafs Poisson das Resultat (δ) auf zweifache Art, durch Umkehrung des Bernoulli'schen Theorems (aber nicht für das ganze Intervall (β), sondern blofs für ein differentielles Element desselben) und aus der Bayes'schen Regel abgeleitet hat. Dieser Umstand spricht für die Formel (γ), die auch thatsächlich allgemeine Anwendung findet.

Poisson[8]) hat die Wahrscheinlichkeit für gegebene Grenzen von p auf Grund iner ausgeführten Beobachtungsreihe nicht blofs für den Fall, dafs p während der Beobachtungen constant bleibt, sondern auch unter der Annahme untersucht, dafs p eine mittlere Wahrscheinlichkeit oder eine Totalmöglichkeit, und zwar eine solche von definitiver Bedeutung sei. Wenn also, um allgemein zu sein, Gruppen von Urnen $U_1, U_2, \cdots U_\nu$ vorliegen, wenn ω_λ die Wahrscheinlichkeit ist, eine Urne der Gruppe U_λ zu treffen, und p_λ die Wahrscheinlichkeit, eine weifse Kugel aus ihr zu ziehen, sodafs

$$p = \omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \cdots + \omega_\nu p_\nu$$

die apriorische Totalmöglichkeit des Ziehens einer weifsen Kugel ist; wenn ferner s willkürliche Ziehungen aus diesem Urnensystem m-mal eine weifse und n-mal eine schwarze Kugel ergeben haben: welcher Schlufs kann aus diesem Ergebnis gezogen werden? Das von Poisson in Beantwortung dieser Frage gefundene Resultat ist unstreitig eines der bedeutendsten unter denen, zu welchen er bei seinen Untersuchungen über das Gesetz der grofsen Zahlen gelangt ist; es lautet dahin (§ 109), dafs

$$\frac{m}{s} \mp \gamma \sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$$

die Grenzen sind, innerhalb welcher die Totalmöglichkeit p mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$$

zu erwarten ist. Das Resultat stimmt also in der Form mit demjenigen völlig überein, welches sich bei constantem p (und q) ergeben hat.

36. Ist über zwei entgegengesetzte Ereignisse A, B mit den festen Wahrscheinlichkeiten p, q statt einer Reihe von s Versuchen eine Anzahl z solcher Versuchs- oder Beobachtungsreihen ausgeführt worden, so werden die dabei erzielten Wiederholungszahlen $m_1, m_2, \cdots m_z$ des Ereignisses A nicht übereinstimmen; daher werden auch die Quotienten $\frac{m_1}{s}, \frac{m_2}{s}, \cdots \frac{m_z}{s}$, welche als ebensoviele empirische Bestimmungen von p angesehen werden können, unter einander differiren

und sich um den Wert p in gewisser Art gruppiren. Diese Verteilung der empirischen Bestimmungen nennt man nach dem Vorschlage von Lexis[2]) die „Dispersion" der Ergebnisse der ausgeführten Versuchsreihen.

Im vorliegenden Falle wird man bei wachsendem z mit zunehmender Sicherheit erwarten dürfen, dafs die Gruppirung der beobachteten Quotienten $\frac{m_\lambda}{s}$ um p derjenigen nahekommt, welche dem Bernoulli'schen Theorem entsprechen würde; d. h. dafs die Anzahl der Quotienten, welche in irgend ein Intervall

$$p \mp \gamma \sqrt{\frac{2pq}{s}} \qquad (\alpha)$$

zu liegen kommen, der diesem Intervall entsprechenden Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi pqs}},$$

oder genau genug

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt, \qquad (\beta)$$

proportional, also nahezu gleich Pz ist. Die durch dieses Gesetz dargestellte Verteilung nennt Lexis „normale Dispersion" und benützt sie als Mafs, um an ihr andere Verteilungen oder Dispersionen zu messen und aus dem Ergebnis Schlüsse auf die Natur der Ereignisse A, B zu ziehen. Die normale Dispersion charakterisirt also ein Erscheinungsgebiet, auf welchem constante reale Bedingungen und völlige Unabhängigkeit der Einzelfälle herrschen.

Neben derselben unterscheiden Lexis und mit ihm auch v. Kries[1]) zwei Hauptformen der Dispersion, die übernormale und die unternormale.

Gruppiren sich die beobachteten Quotienten $\frac{m_\lambda}{s}$ $(\lambda = 1, 2, \cdots z)$ um ihren Mittelwert

$$p_0 = \frac{\sum \frac{m_\lambda}{s}}{z}$$

derart, dafs sie in seiner näheren Umgebung spärlicher, dagegen in gröfserer Entfernung von ihm zahlreicher auftreten als bei normaler Streuung, mit andern Worten, liegen in irgend einem Intervall

$$p_0 \mp \gamma \sqrt{\frac{2p_0 q_0}{s}}$$

weniger Verhältniswerte $\frac{m_\lambda}{s}$, als es der nach Formel (β) bestimmten

Wahrscheinlichkeit entspricht, aufserhalb des Intervalls infolgedessen mehr, dann wird von übernormaler Dispersion gesprochen. Dieser Fall würde sich nach den Ausführungen des vorigen Artikels ergeben, wenn Ziehungen vorgenommen würden statt aus einer Urne aus einem Urnencomplex, jedoch so, dafs auch die Wahl der Urne bei jeder Ziehung dem Zufall überlassen bleibt.

Bei entgegengesetzter Anordnung der Einzelwerte $\frac{m_\lambda}{s}$ um ihren Mittelwert p_0, derart also, dafs sie in seiner näheren Umgebung zahlreicher auftreten, während gröfsere Abweichungen von ihm minder häufig sind als bei normaler Streuung, herrscht nach Lexis unternormale Dispersion. Eine solche würde sich ergeben, wenn Ziehungen aus einem Complex von Urnen vorgenommen würden in der Art, dafs jede Urne eine bestimmte Anzahl Male darankäme, und wenn in allen Ziehungsreihen diese Anzahlen die gleichen blieben.

Normale, über- und unternormale Dispersion haben das gemeinsame Merkmal, dafs die Quotienten $\frac{m_\lambda}{s}$ um ihren Mittelwert p_0 (wenigstens annähernd) symmetrisch angeordnet sind; man hat sich überhaupt bei allen dreien das analytische Gesetz der Verteilung als der Form nach gleich und nur einem Parameter nach verschieden vorzustellen; dieser ist der Factor $\sqrt{\frac{2p_0q_0}{s}}$, welcher die Weite der Grenzen, die zu einer bestimmten Wahrscheinlichkeit gehören, bestimmen würde, wenn die Dispersion eine normale wäre; bei der übernormalen mufs er durch eine gröfsere, bei der unternormalen durch eine kleinere Zahl ersetzt werden.

Eine Verteilung der Quotienten $\frac{m_\lambda}{s}$, welche diese Merkmale nicht aufweist, wird nach v. Bortkewitsch[2]) als unregelmäfsige Dispersion bezeichnet. Sie verrät durch ihre Unsymmetrie eine Änderung, genauer gesprochen, ein progressives Fortschreiten der abstracten Totalmöglichkeit, eine Veränderung der zugrundeliegenden realen Bedingungen im Verlaufe der Beobachtungsreihen. Handelte es sich zum Beispiel um Ziehungen aus Urnen, welche mit weifsen und schwarzen Kugeln in verschiedenen Verhältnissen gefüllt sind, und würden von einer Versuchsreihe zur andern die Urnen mit relativ vielen weifsen Kugeln successive ausgeschaltet, so hätte dies eine beständige Abnahme der Totalmöglichkeit für das Ziehen einer weifsen Kugel und daher eine unregelmäfsige Dispersion der aus den Versuchen hervorgehenden Quotienten $\frac{m_\lambda}{s}$ zur Folge. Eine Reihe von Erfahrungsquotienten, welche unregelmäfsige Dispersion aufweisen, nennt Lexis eine symptomatische Reihe.

Diese Begriffsunterscheidungen sind in der neueren mathematischen oder theoretischen Statistik zu grofser Bedeutung gekommen.

37. Die Resultate der Wahrscheinlichkeitstheorie enthalten keine Aussage über ein wirkliches Geschehen, sie bestimmen nur das Mafs unserer Erwartung in Bezug auf zufällige Ereignisse. Wenn sich für das Eintreffen eines Ereignisses A eine von der Einheit noch so wenig abweichende Wahrscheinlichkeit ergeben hat, so kann doch statt A das entgegengesetzte Ereignis B sich einstellen; und wenn für die Einhaltung gewisser Grenzen seitens der Wiederholungszahlen von A und B in einer sehr grofsen Anzahl von Versuchen eine noch so grofse Wahrscheinlichkeit besteht, so können jene Wiederholungszahlen doch, und selbst weit, aufserhalb jener Grenzen fallen.

Zwischen dem einzelnen Versuch und einer Versuchsreihe besteht aber in einer gewissen Beziehung ein wesentlicher Unterschied. Während der einzelne Versuch nur zweierlei: das Eintreffen oder das Nichteintreffen eines Ereignisses A ergeben kann, können sich bei einer Versuchsreihe verschiedene Grade der Abweichung von demjenigen Resultat einstellen, welches die Rechnung als das relativ wahrscheinlichste bezeichnet. Das Bernoulli'sche Theorem regelt die in Bezug auf verschiedene Grenzen der Abweichung geltenden Erwartungen.

Die tägliche Erfahrung zeitigt in uns ein gewisses Vertrauen, das wirkliche Geschehen entspreche dem durch die Rechnung bestimmten Mafs der Erwartung; dieses Vertrauen bezieht sich aber doch mehr auf die extremen Fälle und auf das Geschehen in seinen äufsersten Umrissen. Wir erwarten mit Sicherheit, dafs ein Ereignis, dem eine sehr grofse numerische Wahrscheinlichkeit zukommt, wenn ihm viele Gelegenheiten zu seiner Realisirung geboten werden, auch sehr häufig sich zutragen werde, und sein längeres Ausbleiben würde Zweifel über den Hergang in uns wachrufen; auf der andern Seite wird das Eintreffen eines Ereignisses, das nur mit äufserst geringer Wahrscheinlichkeit zu erwarten war, uns den Eindruck des Aufsergewöhnlichen bieten und die Vermutung nahebringen, es sei nicht das allein thätig gewesen, was wir als Zufall zu bezeichnen gewöhnt sind.

Dafs diese beiläufigen Wahrnehmungen nicht ausreichen, um ein genügend festes Vertrauen in die Übereinstimmung zwischen den Resultaten der Rechnung und dem wirklichen Verlauf der Ereignisse hervorzurufen, dafür sprechen die zahlreichen und zum Teil sehr mühevollen Versuche, welche nach dieser Richtung ausgeführt worden sind. Diese Versuche sind aus dem Bedürfnis hervorgegangen, zwischen der Theorie und der Wirklichkeit ein Bindeglied herzustellen und dadurch den Schlüssen von der Erfahrung auf die zugrundeliegenden Urteilsmaterien eine Basis zu verleihen.

In erster Linie eignen sich zur Vornahme derartiger Unter-

suchungen solche Versuchsreihen, denen völlig bekannte reale Bedingungen zu Grunde liegen, sodafs über die Wahrscheinlichkeiten der in Concurrenz kommenden Ereignisse ein Zweifel nicht besteht; diesen zunächst stehen solche Beobachtungsmaterialien, welchen wenigstens constant bleibende, wenn auch nicht völlig bekannte Bedingungen als Grundlage dienen. Nur bei wenigen der anzuführenden Versuchsreihen war die erste Voraussetzung erfüllt, wohl aber die zweite; in letzterem Falle bleibt immer die Frage offen, wie weit die zu Tage getretenen Discrepanzen zwischen Theorie und Erfahrung dem unvollkommenen Wissen und wie weit sie den Wirkungen des Zufalls zuzuschreiben sind; nur häufig wiederholte Versuchsreihen über die gleiche Materie können auch nach dieser Richtung aufklärend wirken.

Die erste Versuchsreihe, welche in der hier gekennzeichneten Absicht ausgeführt worden ist, hat Buffon[1]) (siehe auch Poisson[8]), § 50) veranlafst. Er liefs mit einer Münze wiederholt und so lange werfen, bis Wappen nach oben fiel. In den 2048 Wurfserien erschien Wappen 2048 mal, Schrift 1992 mal; das Verhältnis der ersten Zahl zur Anzahl der Würfe, 0·50 693, weicht von der a priori anzunehmenden Wahrscheinlichkeit um 0·00 693 ab, liegt also gerade noch innerhalb solcher Grenzen, für welche das Bernoulli'sche Theorem die Wahrscheinlichkeit 0·62.. giebt; die Abweichung kann also ganz wohl dem Zufall beigemessen werden. Auch die Anzahlen der Versuchsserien, welche Wappen schon im ersten, erst im zweiten, dritten bis neunten Wurf erscheinen liefsen, zeigen den erwartungsmäfsigen Gang ganz deutlich.

Gleichsam zu seiner eigenen Überzeugung liefs De Morgan (s. dessen „Formal Logic") eine ähnliche Versuchsreihe von fast gleichem Umfange anstellen; die Ergebnisse derselben, 2048 mal Wappen gegen 2044 mal Schrift, liegen aufserordentlich nahe an jener Verteilung, welche mit relativ gröfster Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist in dem Fall, wenn für beide Münzseiten die realen Bedingungen ganz gleich liegen.

Eine dritte Versuchsreihe mit Münzen, jedoch in anderer Form, hat Jevons[1]) ausgeführt. Er warf 2048 mal je 10 Münzstücke hin und zählte jedesmal, bei wie vielen Wappen nach oben gekehrt war. Die Anzahlen der Würfe, welche 10, 9, · · · 0 mal Wappen hervorbrachten, geben sehr gut den erwartungsmäfsigen Gang wieder. In dem ersten Abschnitt von 1024 Würfen ergab sich Wappen 5222, im zweiten Abschnitt gleichen Umfanges 5131 mal, im ganzen 10 353 mal. Die zugehörigen Verhältniszahlen 0·50 996, 0·50 107, 0·50 551 liegen alle zur selben Seite der theoretischen Wahrscheinlichkeit; die Abweichung der letztgenannten Zahl von 0·5 liegt aufserhalb eines Intervalls, innerhalb dessen sie nach dem Bernoulli'schen Theorem mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{177}{200}$ zu erwarten

gewesen wäre. Alle diese Umstände geben der auch von Jevons ausgesprochenen Vermutung Raum, dafs bei den benützten Münzen wenigstens zum Teil die Wappenseiten begünstigt waren.

Mit Berufung auf Buffon teilt Quetelet[2]) in seinen „Lettres sur la théorie des probabilités“ eine Versuchsreihe mit, die er in der Absicht unternommen hat, um zu sehen, ob die Präcision*) der Verhältniszahlen wie die Quadratwurzel aus der Anzahl der Versuche wachse, wie dies die Theorie anzeigt. Die Versuche bestanden in Ziehungen je einer Kugel aus einer Urne mit 20 weifsen und 20 schwarzen Kugeln, und es wurden die Ergebnisse von 4, 16, 64, 256, 1024 und 4096 Ziehungen notirt. Die aus diesen Ergebnissen gerechneten Verhältniszahlen zeigen die ausgesprochene Tendenz, gegen die Zahl $\frac{1}{2}$ zu convergiren. Aus allen Versuchen ergaben sich 2066 weifse neben 2030 schwarzen Kugeln, woraus sich für die weifse Kugel die Verhältniszahl $0 \cdot 50\,439$ berechnet, die aufserhalb solcher Grenzen fällt, innerhalb welcher sie gerade noch mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{17}{40}$ zu erwarten gewesen wäre.

Ein bereits fertig vorliegendes Beobachtungsmaterial, bei welchem wie bei den Quetelet'schen Versuchen eine Ungleichheit der Chancen ausgeschlossen sein dürfte, hat Czuber[3]) der Prüfung unterzogen. Es waren die Ergebnisse der Ziehungen der Prager und Brünner (staatlichen) Lotterie aus den Zeiträumen 1754—1886, beziehungsweise 1771—1886, bestehend in 2854 + 2703 = 5557 Ziehungen mit 27 785 gezogenen Nummern. Die Untersuchung hat ergeben, dafs dieses durch den Zufall zusammengetragene Nummernmaterial nach allen Richtungen jene Gliederung, und zwar in hohem Grade der Annäherung, aufweist, welche der Theorie zufolge zu erwarten ist. Um nur einiges anzuführen, ergaben sich in Prag, Brünn und in beiden zusammen 1451 + 1358 = 2809 einziffrige Nummern; die daraus berechneten Verhältniszahlen 0.10168, 0·10048, 0·10109 liegen innerhalb eines so engen Intervalls um den theoretischen Wert 0·1, als es von vornherein beiläufig mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, beziehungsweise $\frac{8}{20}$ und $\frac{9}{20}$ zu erwarten gewesen wäre. Des weiteren geschah es in Prag 32mal, in Brünn 30mal nach einander, dafs alle 90 Nummern erschöpft worden sind, und das arithmetische Mittel aus den hierfür notwendigen Ziehungszahlen betrug an ersterem Orte 89, an letzterem 90·03; Laplace (s. Art. 21) hatte gefunden, es sei mit Vorteil 1 gegen 1 zu wetten, dafs in 86 Ziehungen alle Nummern erschienen sein werden.

Weitaus die umfangreichsten „Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit“ hat Wolf[1])[3])[4]) ausgeführt und bearbeitet. Zuerst waren es

---

*) Unter der Präcision wird hier der Wert $\sqrt{\frac{s}{2pq}}$ verstanden.

wiederholte Würfe mit einem gewöhnlichen Würfel; später erfolgten in noch gröſserem Umfange Doppelwürfe mit zwei durch die Farbe unterschiedenen Würfeln, wodurch es möglich wurde, das gewonnene Material nach den mannigfachsten Richtungen zu untersuchen. Es ergab sich nahezu mit voller Sicherheit die Ungleichheit der Bedingungen für die einzelnen Würfelseiten, und die Versuchsreihen gestatteten auch die Individualisirung derselben. Bei 20 000 mit einem Würfel vorgenommenen Würfen stellten sich die Würfelseiten, nach wachsenden Verhältniszahlen geordnet, in folgende Reihe:

Würfelseite:	4	3	1	6	5	2
Verhältnis-zahl:	0·1458	0·1588	0·1703	0·1711	0.1724	0·1855.

Nach den ersten 10 000 Würfen war die Reihenfolge

Würfelseite:	4	3	1	2	5	6
Verhältnis-zahl:	0·1503	0·1525	0·1704	0·1736	0·1762	0·1770.

Daraus kann mit groſser Sicherheit wenigstens das eine entnommen werden, daſs die Seiten 4 und 3 durch die Massenverteilung des Würfels ungünstig beeinfluſst waren, da ihre Verhältniszahl in beiden Reihen erheblich unter dem theoretischen Wert 0·1666 ··· geblieben ist; bei allen andern Seiten liegt sie über demselben. Für die Beurteilung der Resultate ist auch die Bemerkung wichtig, daſs die Seiten 4, 3; 1, 6; 5, 2 einander gegenüberliegen; die von Wolf vorgenommene Messung ihrer Abstände ergab denn auch so erhebliche Differenzen, daſs sich daraus schon die groſse Ungleichheit in den Verhältniszahlen, die sich auch in allen andern aus den Versuchen gefolgerten Resultaten deutlich kennbar machte, wenigstens zum Teil erklären läſst; die Abstände waren in der bezeichneten Reihenfolge

16·288 mm, 16·303 mm, 16·621 mm.

In ebenso sicherer Weise gestatteten die späteren, noch weit ausgedehnteren Versuche[3]) mit zwei ungleichfarbigen Würfeln, bei jedem derselben die einzelnen Seiten in Bezug auf die Leichtigkeit des Erscheinens scharf auseinanderzuhalten. Wolf benutzte die Resultate unter anderm auch zu einer Untersuchung über die Lage der Schwerpunkte der beiden Würfel.

Wolf[1]) (1850) war gewiſs der erste, w lcher auch eine geometrische Wahrscheinlichkeit einer empirischen Prüfung unterzog. Die Versuche bezogen sich auf das Buffon'sche Nadelproblem (s. Art. 28, Formel (α)); aus 5000 Würfen mit der Nadel und Zählung der Fälle, in welchen sie eine der Parallelen traf, ergab sich die Verhältniszahl 0·5064, während die aus der Länge der Nadel und dem Abstand der Parallelen gerechnete theoretische Wahrscheinlich-

keit 0·5093 betrug. Versuche dieser Art können zur empirischen Bestimmung der Zahl π verwendet werden*), wenn man in der citirten Formel für die Wahrscheinlichkeit p die aus den Experimenten gezogene Verhältniszahl substituirt; auf diesem Wege fand Wolf aus seinen Versuchen den Wert 3·1596 für π.

Eine Versuchsreihe, die auch ein geometrisches Problem betrifft, führt Czuber[5]) (Art. 72) an; ein Rechteck ist in vier gleiche Teilrechtecke zerlegt, die in seinem Mittelpunkte zusammenstofsen; durch einen in seiner Fläche beliebig angenommenen Punkt wird eine Gerade beliebiger Richtung gezogen; sie kann ein, zwei oder drei Teilrechtecke zugleich durchsetzen; in dem den Versuchen zugrundeliegenden Falle waren die theoretischen Wahrscheinlichkeiten dieser drei Eventualitäten

$$0·110\cdots \quad 0·484\cdots \quad 0·406\cdots;$$

die 2120 ausgeführten Versuche ergaben die Verhältniszahlen

$$0·098\cdots \quad 0·502\cdots \quad 0·400\cdots.$$

Dritter Abschnitt.

Über die Wahrscheinlichkeit der möglichen Ursachen eines unbekannten Ereignisses und das Schliefsen auf künftige Ereignisse.

38. Die Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung können in zwei Kategorien geschieden werden.

Die Aufgaben der ersten Kat gorie beziehen sich auf Urteilsmaterien, welchen ein bestimmter Complex von Bedingungen zu Grunde liegt, der so weit bekannt ist, dafs man die Wahrscheinlichkeit der concurrirenden Ereignisse zu bestimmen vermag; mit Hilfe der Sätze über die totale und die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit und des Bernoulli'schen Theorems ist es dann möglich, die Erwartung in Bezug auf eine bestimmte Combination jener Ereignisse sowie in Bezug auf das Ergebnis einer Versuchsreihe zu bewerten.

Die Probleme der zweiten Kategorie betreffen Urteilsmaterien, welche entweder von einem unter mehreren bekannten Bedingungscomplexen abhängen oder welche auf Bedingungen beruhen, die zwar unbekannt sind, über die aber verschiedene Annahmen mit gleicher oder verschiedener Berechtigung gemacht werden können; ein beobachtetes (einfaches oder zusammengesetztes) Ereignis soll dazu verwendet werden, unsere Vermutung über das Stattfinden des einen oder andern

---

*) Barbier[2]) hat zwei Spiele mit zwei Münzen angegeben, deren oftmals wiederholte Ausführung auch zur empirischen Bestimmung von π dienen kann. Die Zahl π gelangt hier in den Wahrscheinlichkeitsausdruck durch die Anwendung der Stirling'schen Formel.

Bedingungscomplexes, beziehungsweise über die Richtigkeit der einen oder der andern Annahme zu regeln; es soll des weiteren dazu dienen, unsere Erwartung bezüglich neuer Ereignisse zu bestimmen.

Bei Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Fragen der Praxis liegen die Umstände meist so, wie es bei den Problemen der zweiten Kategorie beschrieben wurde; daraus geht die grofse Bedeutung der letzteren hervor.

Wenn wir daran gehen, die Entwicklung der Theorie für die zweite Gattung von Aufgaben darzustellen, müssen wir vor allem der Terminologie einige Worte widmen, welche sich hier, zumal in mathematischen Werken, eingebürgert hat und die von philosophischer Seite angefochten wird.

Es ist bereits in Art. 3 gesagt worden, dafs man in der Wahrscheinlichkeitstheorie denjenigen Bedingungen, welche den Ereignissen die ihnen eigentümlichen Wahrscheinlichkeiten verleihen und das Bleibende im Laufe der Versuche bilden, den Namen „Ursache der Ereignisse“ beizulegen pflegt.

Demgemäfs spricht man auch dort, wo ein beobachtetes Ereignis aus einem von mehreren Bedingungscomplexen hervorgegangen sein kann, von verschiedenen möglichen Ursachen desselben. Diese Bezeichnung steht thatsächlich in der Regel mit dem, was man im metaphysischen Sinne unter der Ursache eines Geschehens versteht, im Widerspruche; man will mit ihr nicht dasjenige treffen, was den beobachteten Verlauf mit Notwendigkeit zur Folge haben mufste, sondern einen Thatbestand, aus welchem das Geschehene hervorgehen konnte und der seinem Eintreffen vor der Beobachtung eine gewisse Wahrscheinlichkeit verlieh. Es hat daher Berechtigung, wenn Stumpf[1]) (p. 96) diese Namengebung bekämpft und als „eine umständliche und ganz überflüssige Verkehrung des Sprachgebrauchs“ bezeichnet; er schlägt den ohne Zweifel zutreffenderen Ausdruck „Hypothese“ vor. Man darf aber entgegnen, dafs es sich hier wie in vielen anderen wissenschaftlichen Dingen um eine conventionelle Benennung handelt, die ohne Nachteil beibehalten werden darf, wenn man ihren Inhalt ein für allemal gekennzeichnet hat. In den mathematischen Schriften ist es auch thatsächlich niemals unterlassen worden, auf den Sinn, der hier dem Worte Ursache unterlegt wird, ausdrücklich hinzuweisen oder ihn wenigstens an Beispielen zu erläutern.

Laplace[13]) gebraucht die Worte Ursache und Hypothese nebeneinander, das letztere aber nicht immer genau in demselben Sinne. In der Formulirung des 3. Princips (liv. II, art. 1) heifst es „l'hypothèse de l'existence de la cause“; hier werden also die die Wahrscheinlichkeit bedingenden Umstände als Ursache, und die Annahme ihres Stattfindens als Hypothese bezeichnet; diese Unterscheidung trifft nach unserem Dafürhalten den wirklichen Sachverhalt am besten. Etwas weiter zählt er die möglichen Mischungsverhältnisse in einer

Urne auf, nennt sie Hypothesen und sagt: „Si l'on considère ces hypothèses comme autant de causes de l'évènement observé"; durch diese Wendung erhalten die bedingenden Umstände selbst den Namen Hypothese.

Ganz deutlich spricht sich Poisson[3]) aus, welcher consequent das Wort Ursache gebraucht; in der Wahrscheinlichkeitsrechnung werde es in ausgedehnterer Bedeutung als im gewöhnlichen Sprachgebrauch genommen und bedeute dasjenige, was dem Eintreffen des Ereignisses die ihm eigentümliche Wahrscheinlichkeit erteilt; er fügt hinzu, nach dem gewöhnlichen Gebrauch würde die Ursache nicht auf das Ereignis, sondern auf die ihm zugeschriebene Wahrscheinlichkeit sich beziehen; uns scheint gerade diese Deutung die richtige zu sein.

Bei Galloway[1]) finden sich die Ausdrücke Ursache und Hypothese neben einander, aber auch in dem bei Laplace bemerkten Sinne, dafs unter Hypothese die Annahme der Existenz der Ursache verstanden wird.

De Morgan[2]) (art. 19) gebraucht das Wort Ursache, nachdem er vorher an einem Beispiel erläutert hat, dafs verschiedene Ursachen eines Ereignisses verschiedene Arten seines Zustandekommens sind.

Auch in der neueren Litteratur wird fast ausnahmslos von Ursachen des beobachteten Ereignisses gesprochen und auf den hier geltenden Sinn des Wortes hingewiesen.

In seiner „Untersuchung der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung" erhebt v. Kries[1]) keine Einwendung gegen den Gebrauch des Wortes „Ursache eines beobachteten Ereignisses" und bemerkt nur gelegentlich (p. 122), dafs statt Ursache besser „Entstehungsmodus" zu sagen wäre; er selbst spricht von den Ursachen als von Umständen, welche die Realisirung des beobachteten Erfolges möglich machen.

Goldschmidt[1]), der in seiner „Kritik" gerade dem jetzt in Rede stehenden Teile der Wahrscheinlichkeitstheorie einen breiten Raum gewährt, findet weder die Bezeichnung Ursache noch Hypothese zutreffend, will sie aber dort gelten lassen, wo man ihren Sinn scharf kennzeichnet (p. 198).

39. Das Verdienst, die Frage der Beurteilung der möglichen Ursachen eines beobachteten Ereignisses auf ihre Wahrscheinlichkeit aufgenommen und der mathematischen Behandlung zugeführt zu haben, gebührt dem Engländer Bayes, dessen Name mit diesem wichtigen Teil der Wahrscheinlichkeitstheorie dauernd verknüpft ist. Die beiden Abhandlungen[1])[2]), welche Bayes hierüber verfafst hat, sind nach seinem Tode durch einen gelehrten Freund, Price, mit Ergänzungen und Erläuterungen versehen, der Veröffentlichung zugeführt worden. Es ist bemerkenswert, dafs Bayes dem Problem, welches er sich zur Lösung stellt und das darauf hinausläuft, die Wahrscheinlichkeit

zu bestimmen, dafs die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, über welches eine Reihe von Beobachtungen vorliegt, zwischen gegebenen Grenzen enthalten sei, in ein geometrisches Gewand kleidet (s. Todhunter[1]), art. 545—549).

Zu einer klaren Auffassung des Gegenstandes und zur Aufstellung bestimmter Principien, nach welchen die Wahrscheinlichkeit der Ursachen auf Grund der Erfahrung zu rechnen ist, ist jedoch erst Laplace gekommen; die bezüglichen Untersuchungen gehören zu den ersten, mit welchen er sich auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitstheorie befafst hat, und bilden den Inhalt eines Mémoires[2]), dem infolgedessen eine besondere Bedeutung in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung zukommt.

In der „Théorie analytique“[13]) hat Laplace die sogenannte Bayes'sche Regel für eine endliche Anzahl a priori gleich möglicher Ursachen unter die Principien der Theorie, welche er im I. Capitel zusammenstellt, aufgenommen und auf einen Satz aufgebaut, der, an den Anfang einer Theorie gestellt, vermöge seines abstracten Inhaltes Schwierigkeiten verursachen mochte; in der späteren Litteratur ist dieser Satz, der in der 1. Auflage der „Théorie anal.“ als II. Princip figurirt, selten wieder erschienen. Er lautet: „Die Wahrscheinlichkeit eines künftigen Ereignisses, gefolgert aus einem beobachteten Ereignis, ist der Quotient der Division der Wahrscheinlichkeit des aus diesen beiden zusammengesetzten Ereignisses durch die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses, beide Wahrscheinlichkeiten a priori bestimmt.“ Sind also n a priori gleich mögliche Ursachen $C_1, C_2, \cdots C_n$ vorhanden; ist p_i die Wahrscheinlichkeit, welche die Ursache C_i dem beobachteten Ereignis verleihen würde, wenn sie wirksam (existent) wäre; ist des weiteren P_i die aus dem beobachteten Ereignis gefolgerte Wahrscheinlichkeit dieser Ursache: so ist $\frac{1}{n} p_i$ die apriorische Wahrscheinlichkeit des aus der Existenz der Ursache C_i und dem beobachteten Erfolg zusammengesetzten Ereignisses, und $\frac{1}{n} p_1 + \frac{1}{n} p_2 + \cdots + \frac{1}{n} p_n$ die apriorische Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses; im Sinne des obigen Satzes ist also

$$P_i = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{p_i}{\sum_1^n p_\lambda}. \qquad (\alpha)$$

Das Verständnis dieser Deduction wird gewifs auch dadurch erschwert, dafs in dem Satze von einem „künftigen Ereignisse“ die Rede ist, während die Ursache, die doch mit dem beobachteten, also vergangenen Ereignis zugleich existiren mufste, als solches nicht angesehen werden kann. Um den logischen Sachverhalt richtig darzustellen, wäre etwa von einem „der Beobachtung entrückten, aber mit

dem beobachteten zusammenhängenden Ereignisse" zu reden, wenn sonst das Wort Ereignis für die Existenz eines Bedingungscomplexes als passend erachtet wird.

Einen Fortschritt in der Ableitung der Bayes'schen Regel bedeutet die Begründung derselben aus dem Urnenschema, wie sie Poisson[8]) und nach ihm auch De Morgan[2]) gegeben hat, letzterer mit ausdrücklicher Betonung des Umstandes, dafs es keines neuen Princips, sondern nur der Wahrscheinlichkeitsdefinition bedürfe, um sie zu gewinnen. Die Ursachen werden durch äufserlich von einander nicht unterscheidbare Urnen dargestellt, welche weifse und schwarze Kugeln in verschiedener Anzahl und verschiedenem Mengenverhältnis enthalten; als beobachtetes Ereignis wird das Ziehen einer weifsen Kugel aus einer beliebigen der Urnen angesehen; die Frage nach der Wahrscheinlichkeit der Ursache C_i, gefolgert aus der Beobachtung, fällt nun zusammen mit der Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dafs die gezogene weifse Kugel aus der diese Ursache versinnlichenden Urne stamme. Zunächst werden alle Urnen auf gleiche Kugelzahl ohne Störung des Farbenverhältnisses gebracht; dadurch sind auch die Kugeln verschiedener Urnen zu gleich möglichen Fällen gemacht, sodafs die Inhalte aller Urnen auch in einer Urne vereinigt werden dürfen; es genügt dabei, blofs die weifsen Kugeln beizubehalten, die, um ihre Herstammung kenntlich zu machen, mit der Nummer ihrer Urne versehen gedacht werden. Und nun stellt sich die Frage so, dafs nach der Wahrscheinlichkeit verlangt wird, eine aus dieser neuen Urne gezogene Kugel, die notwendig weifs ist, trage die Nummer i; es kommt also wirklich auf eine Zählung der günstigen und möglichen Fälle zurück, und der erhaltene Quotient verwandelt sich nach entsprechender Umformung in den Ausdruck (α).

Den allgemeineren Fall, wo die einzelnen Ursachen a priori, also vor Bekanntwerden der Beobachtung, schon verschiedene Wahrscheinlichkeit aufweisen, hat Poisson dadurch construirt, dafs er von jeder Sorte mehrere Urnen annahm und im übrigen so verfuhr wie vorhin. Der Fall läfst sich aber auch durch eine einzige Urne erledigen, deren Inhalt in zweifacher Weise differentiirt ist: nach der Farbe und nach Nummern. Die Urne enthalte nämlich

$$c = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$$

Kugeln, wovon c_1 mit der Nummer $1, \cdots, c_n$ mit der Nummer n bezeichnet sind; unter den c_1 Kugeln seien wieder a_1 weifs, die übrigen $c_1 - a_1$ schwarz, $\cdots$ desgleichen unter den c_n mit n nummerirten Kugeln a_n weifs, die übrigen $c_n - a_n$ schwarz; das beobachtete Ereignis bestehe wieder in dem Ziehen einer weifsen Kugel, und gefragt werde um die Wahrscheinlichkeit, dafs es eine mit der Nummer i bezeichnete Kugel sei. Weil nur die weifsen Kugeln in

Betracht kommen können — vermöge der gemachten Beobachtung —, so ergiebt sich für diese Wahrscheinlichkeit zunächst der Ausdruck

$$\frac{a_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n},$$

der umgeformt werden kann in

$$\frac{\frac{c_i}{c}\frac{a_i}{c_i}}{\frac{c_1}{c}\frac{a_1}{c_1} + \frac{c_2}{c}\frac{a_2}{c_2} + \cdots + \frac{c_n}{c}\frac{a_n}{c_n}};$$

$\frac{c_i}{c} = \omega_i$ bedeutet aber die apriorische Wahrscheinlichkeit der Ursache C_i (Ziehen einer mit i bezifferten Kugel überhaupt), $\frac{a_i}{c_i} = p_i$ die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses im Falle der Existenz dieser Ursache während der Beobachtung; daher ist die aus der Erfahrung gefolgerte Wahrscheinlichkeit der Ursache

$$P_i = \frac{\omega_i p_i}{\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \cdots + \omega_n p_n} = \frac{\omega_i p_i}{\sum_1^n \omega_\lambda p_\lambda}. \qquad (\beta)$$

Ein neues Moment hat Crofton[4]) in die Beweisführung für die Bayes'sche Regel eingeführt; es stützt sich auf das Bernoulli'sche Theorem und rechnet unter der Voraussetzung einer sehr großen Anzahl solcher Versuche wie der eben vorliegende den Anteil, den jede Ursache an dem Ergebnis dieser wiederholten Versuche höchst wahrscheinlich haben würde. Gegen diesen Vorgang ist das Bedenken zu erheben, dafs er den Anschein erweckt, als ob die vorhandene Erfahrung allein nicht ausreichend wäre, die Ursachen gegen einander abzuwägen.

Sehr treffend charakterisirt v. Kries[1]) (p. 117 flg.) den logischen Vorgang bei Ableitung der Bayes'schen Regel; zur Veranschaulichung desselben benützt er das Beispiel von sechs physisch ganz gleichen Würfeln, deren einer auf einer Seite, ein zweiter auf zwei Seiten, schliefslich der sechste auf allen sechs Seiten das Zeichen + trägt, während die übrigen Seiten mit dem Zeichen 0 versehen sind. Mit einem blindlings herausgegriffenen Würfel ist dreimal gewürfelt und wahrgenommen worden, dafs der Reihe nach die Zeichen +, 0, + nach oben gewendet waren; es soll auf Grund dieser Wahrnehmung die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dafs mit dem ersten, dem zweiten und jedem anderen Würfel gespielt worden ist. Ohne Rücksicht auf die Erfahrung gäbe es 6 Möglichkeiten bei der Wahl des Würfels und 216 mögliche Combinationen

der Seiten dieses Würfels bei den drei Würfen, im ganzen also 1296 gleich mögliche Fälle. Die Wirkung der Erfahrung besteht nun darin, dafs sie eine gewisse Menge dieser Fälle als nicht realisirt erweist, nämlich alle diejenigen, welche nicht die Folge $+, 0, +$ herbeigeführt haben würden. „Die Erfahrung zwingt uns also zu einer nachträglichen Auswahl aus den ursprünglich als gleich möglich aufgestellten Fällen: wir eliminiren die der Erfahrung widersprechenden und ermitteln die Wahrscheinlichkeit nach dem Zahlenverhältnis derjenigen, welche mit ihr im Einklange sind.“ In dem obigen Beispiel verbleiben nur 105 Fälle, welche sich mit 5, 16, 27, 32, 25, 0 auf die sechs Würfel in der angegebenen Reihenfolge verteilen.

Der mitunter anzutreffenden Darstellung gegenüber, welche die Meinung hervorrufen kann, als ob es zur Ableitung der Bayes'schen Regel eines besonderen Princips bedürfte, das gewöhnlich in der „Annahme“ zum Ausdruck gebracht wird, dafs die Wahrscheinlichkeiten der Ursachen sich so verhalten wie die Wahrscheinlichkeiten, welche sie einzeln dem beobachteten Ereignis erteilen*), ist diese Betonung des Umstandes, dafs es sich nur um eine aus logischen Gründen modificirte Anwendung der Wahrscheinlichkeitsdefinition handelt, sehr am Platze. Auch Stumpf[1]) (p. 99) hebt dies ausdrücklich hervor.

Es sei noch erwähnt, dafs der letztgenannte Kritiker eine passende Terminologie für die bei der Bayes'schen Regel auftretenden Wahrscheinlichkeiten vermifst und den Vorschlag macht, ω_i die vorgängige Wahrscheinlichkeit, p_i den Erklärungswert, $\omega_i p_i$ die abstracte Wahrscheinlichkeit und endlich P_i die concrete Wahrscheinlichkeit der Hypothese C_i zu nennen. Die erste dieser Benennungen ist seit langem üblich, die zweite scheint uns zweckmäfsig gewählt, die dritte halten wir für überflüssig, die letzte wäre passender durch „aposteriorische Wahrscheinlichkeit“ zu ersetzen.

40. Im VI. Cap. der „Théorie analytique“ kommt Laplace auf die Behandlung von Problemen, welche die Wahrscheinlichkeit der Ursachen beobachteter Ereignisse und die daraus abgeleitete Wahrscheinlichkeit künftiger Erfolge betreffen, ausführlich zu sprechen; mehrere der Probleme hatte er in früheren Memoiren[5])[8])[9]) gelöst und giebt nun die Lösungen in zum Teil veränderter und berichtigter Form wieder; den Beispielen wird, wo dies möglich war, ein breiteres Beobachtungsmaterial unterlegt. Die Näherungsmethoden für die Berechnung von Integralen, in welchen Functionen sehr grofser Zahlen auftreten, kommen hier in hervorragendem Mafse zur Geltung.

An der Spitze dieses Capitels steht jene Form der Bayes'schen Regel, welche für die praktischen Anwendungen die weitaus wich-

*) Vgl. auch bei Fries[1]), p. 74.

tigere ist. Der beobachtete Erfolg hängt von einem einfachen Ereignis E ab, dessen unbekannte Wahrscheinlichkeit x a priori aller Werte fähig ist, welche innerhalb des Intervalls $(0, 1)$ enthalten sind; seine Wahrscheinlichkeit y ist demnach eine Function von x. Die auf diesen Fall angewandte Bayes'sche Regel giebt als Wahrscheinlichkeit eines speciellen Wertes x, oder genauer gesprochen, eines Wertes aus dem Intervall $(x, x + dx)$:

$$p = \frac{y\,dx}{\int_0^1 y\,dx}, \tag{α}$$

wenn alle Werte x a priori gleich möglich waren, dagegen

$$p = \frac{yz\,dx}{\int_0^1 yz\,dx}, \tag{β}$$

wenn der Wert x a priori die Wahrscheinlichkeit z, gleichfalls eine Function von x, hatte. Daraus ergiebt sich als Wahrscheinlichkeit dafür, dafs x zwischen den Grenzen θ, θ' enthalten sei,

$$P = \frac{\int_\theta^{\theta'} y\,dx}{\int_0^1 y\,dx}, \tag{γ}$$

beziehungsweise

$$P = \frac{\int_\theta^{\theta'} yz\,dx}{\int_0^1 yz\,dx}. \tag{δ}$$

In dem vorliegenden Falle stellt jeder einzelne dem x erteilte Wert eine Ursache oder Hypothese vor. Wenn also hier von einer Ursache die Rede ist, so bedeutet dies keineswegs die Angabe solcher realen Bedingungen, aus welchen das beobachtete Ereignis hätte realisirt werden können, sondern die Aussage, die an sich unbekannten Bedingungen seien von solcher Art, dafs sie das Eintreffen des Ereignisses E mit der Wahrscheinlichkeit x erwarten lassen. In den meisten Fällen, um die es sich bei solchen Betrachtungen handelt, wäre es überhaupt unmöglich, von realen Bedingungen für diesen oder jenen Erfolg zu sprechen, so bei den von Laplace geführten Untersuchungen über das Geschlechtsverhältnis bei den Neugeborenen.

Mit der Annahme, die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt sei x, ist gar keine Hypothese über die wirklichen, physiologischen Umstände ausgesprochen, welche auf die Geschlechtsentwicklung des künftigen Wesens bestimmend einwirken; die Annahme läfst vielmehr nur bildliche Deutung zu: die genannten und unbekannten Umstände, die in dieser Disciplin gar nicht einen Gegenstand des Interesses bilden, sind solcher Art, dafs sie bei einem Individuum, das eben geboren werden soll, das männliche Geschlecht mit derselben Berechtigung erwarten lassen wie das Ziehen einer weifsen Kugel aus einer Urne, welche unter N Kugeln Nx weifse enthält.

Den Wert a von x, welcher y, beziehungsweise yz, zum Maximum macht, bezeichnet man als die wahrscheinlichste Hypothese oder als die Wahrscheinlichkeit von E nach der wahrscheinlichsten Hypothese. Laplace leitet durch eine allgemein gehaltene Analyse, welche von einer besonderen Form der Functionen y, z absieht, die Wahrscheinlichkeit ab, dafs x innerhalb eines Intervalls liege, dessen Mitte der wahrscheinlichste Wert a einnimmt, und zeigt, dafs man, die einfachen Ereignisse, aus denen das beobachtete sich zusammensetzt, beständig vermehrend, jene Wahrscheinlichkeit der Einheit beliebig nahebringen und gleichzeitig das zugehörige Intervall beliebig zusammenziehen könne. Hierin liegt die Umkehrung des Bernoulli'schen Theorems, auf welche bereits in Art. 35 hingewiesen worden ist.

In Meyer's „Cours" (s. deutsche Bearbeitung, art. 71) ist Laplace's Analyse in vereinfachter Form wiedergegeben und das Resultat dann dazu verwendet, die Formeln für den gewöhnlichen Fall

$$y = x^m(1 - x)^n$$

herzustellen, der sich einstellt, wenn der beobachtete Erfolg in m-maliger Wiederholung des Ereignisses E unter $s = m + n$ angestellten Beobachtungen besteht. Dieser Fall, der sich mit einfacheren Hilfsmitteln erledigen läfst, ist dann in art. 91 auch für sich behandelt.

Crofton[4] (art. 19) giebt für ihn die folgende einfache und übersichtliche Analyse. Setzt man in der Formel (γ): $y = x^m(1 - x)^n$, das seinen gröfsten Wert erlangt für $x = \frac{m}{m+n} = \frac{m}{s} = a$; setzt ferner $\theta = a - \delta$, $\theta' = a + \delta$, entwickelt das Nennerintegral und führt im Zähler an Stelle von x die neue Variable u durch die Gleichung $x = a + u$ ein, so ergiebt sich zunächst

$$P = \frac{(s+1)!}{m!\,n!} \int_{-\delta}^{\delta} (a + u)^m (1 - a - u)^n du$$

als Wahrscheinlichkeit, dafs x in das Intervall $(a - \delta, a + \delta)$ falle.

Der natürliche Logarithmus des Factors $(a+u)^m$, bis auf Glieder von der Gröfsenordnung u^2 entwickelt, ist $ml.a + m\frac{u}{a} - \frac{mu^2}{2a^2}$; man kann daher diesen Factor mit demselben Grade der Approximation durch

$$\left(\frac{m}{s}\right)^m e^{su - \frac{s^2 u^2}{2m}},$$

und in gleicher Weise den zweiten durch

$$\left(\frac{n}{s}\right)^n e^{-su - \frac{s^2 u^2}{2n}},$$

das Product aus beiden also durch

$$\frac{m^m n^n}{s^s} e^{-\frac{s^3 u^2}{2mn}}$$

ersetzen. Dadurch aber ergiebt sich für P der Näherungswert

$$P = \frac{(s+1)!}{m!n!} \frac{m^m n^n}{s^s} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{s^3 u^2}{2mn}} du,$$

der durch Anwendung der Stirling'schen Formel auf die Facultäten sich weiter verwandelt in

$$P = \frac{s^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi mn}} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{s^3 u^2}{2mn}} du.$$

Hiernach ist

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt \qquad (\varepsilon)$$

die Wahrscheinlichkeit, dafs der Wert von x eingeschlossen sei zwischen den Grenzen

$$\frac{m}{s} \mp \gamma \sqrt{\frac{2mn}{s^3}}, \qquad (\zeta)$$

wie man durch eine weitere Transformation der Integrationsvariablen leicht findet. (Man vergl. hiermit Art. 35, Formeln (α) und (β).)

Die Rechnung ist hier unter der Voraussetzung geführt, dafs von vornherein alle Werte von x gleich möglich seien; zu dieser Annahme ist man aber thatsächlich in den meisten Fällen in Ermangelung genauerer Kenntnisse über den Grad der Möglichkeit der

einzelnen Werte genötigt.*) Hierin liegt der Punkt, gegen welchen sich die Kritik zumeist gewendet hat und aus dem sie die Wertlosigkeit der nach der Bayes'schen Regel abgeleiteten Resultate abzuleiten suchte. Mit grofsem Aufwand von Worten sucht Goldschmidt[1]) die Verfänglichkeit der Bayes'schen Regel zu beleuchten, und auch der eben hervorgehobene Punkt bietet dabei einen willkommenen Anhalt. Woran es liegt, dafs trotz der obigen Annahme die Bayes'sche Regel Resultate liefert, die als correct bezeichnet werden müssen, wenn man sie auf genügend ausgedehnte Versuchsreihen anwendet und auf Urteilsmaterien, welche eine Wahrscheinlichkeitsbestimmung zulassen — mifsbräuchliche Anwendungen bleiben selbstredend ausgeschlossen —, hat v. Kries[1]) (p. 122—127) in zutreffender Weise dargelegt.

Es ist ohne Zweifel eine begründete Einwendung, wenn man sagt, dafs wir uns in praktischen Fällen einer Urteilsmaterie gegenüber nie in einem solchen Zustande der Unwissenheit befinden, dafs uns alle Werte der in Frage stehenden Wahrscheinlichkeit x als gleich zulässig erscheinen könnten; eine gewisse, wenn auch nur beiläufige Erfahrung gestatte uns vielmehr, gewisse Werte von x völlig auszuschliefsen, und weise auf ein engeres, wenn auch nicht bestimmt zu begrenzendes Intervall hin, in welchem der wahre Wert von x zu suchen ist. Vor die Frage nach der Wahrscheinlichkeit einer männlichen Geburt gestellt, wird auch der Unbefangene, der noch kein auf diese Materie bezügliches statistisches Material angesehen hat, auf Grund allgemeiner Wahrnehmungen erklären, jene Wahrscheinlichkeit könne nicht allzuweit von $\frac{1}{2}$ entfernt sein, und Werte nahe an 0 wie an 1 seien jedenfalls auszuschliefsen, weil die oberflächliche Erfahrung kein übermäfsiges Vorwalten des einen oder anderen Geschlechtes erkennen lasse. Wenn nun auf Basis einer ausgedehnten Beobachtungsreihe, welche unter s Geburten m männliche ergeben hat, nach den Formeln (ε), (ζ) beispielsweise die Grenzen gesucht werden, innerhalb deren die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt, also der wahre Wert von x, mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ zu erwarten ist, so wird man ein correctes Resultat erhalten trotz der nicht zutreffenden Annahme, auf welcher jene Formeln beruhen. Der Grund hierfür läfst sich nur aus der mathematischen Structur der Formel

$$P = \frac{\int_{a-\delta}^{a+\delta} y\,dx}{\int_0^1 y\,dx}$$

*) Eine Polemik über diese Seite des Gegenstandes ist in der Zeuthen'schen Zeitschrift durch einen Aufsatz von Bing[1]) hervorgerufen worden.

erkennen, aus welcher (ε), (ζ) durch Approximation hervorgegangen sind. Die Function $y = x^m(1 - x)^n$, welche an der Stelle

$$x = a = \frac{m}{m + n}$$

ihren gröfsten Wert erreicht, nimmt nämlich auch schon bei nur einigermafsen grofsem $s = m + n$ sehr rasch ab, wenn x nach der einen oder anderen Seite sich von a entfernt, und besitzt für erheblich von a abweichende Werte von x aufserordentlich kleine Werte. Infolge dieses Verhaltens giebt nur der Teil des Nennerintegrals, welcher sich auf ein enges, a umgebendes Intervall bezieht, einen nennenswerten Beitrag zu seinem Werte, während die an 0 und an 1 anstofsenden Teile des Integrationsgebiets so aufserordentlich wenig dazu beitragen, dafs sie fast wirkungslos bleiben. Das Zählerintegral erstreckt sich selbst schon auf ein enges Gebiet um a. Gerade in den mafsgebenden Teilen der Integrale handelt es sich aber um Werte von x, bezüglich welcher die vorgängige Erfahrung eine Differentiirung der Möglichkeitsgrade vorzunehmen nicht gestattet, mit anderen Worten: diesen Werten gegenüber befinden wir uns wirklich in einem Zustande des Wissens, dafs wir sie als gleich möglich zu bezeichnen bemüssigt sind. Der Verlauf der apriorischen Wahrscheinlichkeit von x in den übrigen Teilen des Intervalls (0, 1) ist irrelevant, weil nach dem Vorbemerkten diese Teile ohnehin aufserordentlich wenig Einflufs auf den Integralwert zu üben vermögen. Man kann demnach sagen, dafs die Correctheit der nach der Bayes'schen Regel gefundenen Resultate als verbürgt anzusehen ist, wenn nur innerhalb jener Grenzen, die man vermöge der vorgängigen Erfahrungen vermutet, ein erheblicher Unterschied in den Möglichkeitsgraden sich nicht erkennen läfst, mit anderen Worten, wenn wir den Beobachtungen, auf welche wir die Rechnung stützen wollen, mehr Bedeutung und Sicherheit zumessen als dem beiläufigen Wissen, das wir vorher über die betreffende Urteilsmaterie besafsen.

Diese Erwägungen gewähren den Standpunkt, den man einem Beispiel gegenüber einzunehmen hat, welches Bertrand[3]) (art. 126) anführt, um daran die Unzulässigkeit gewisser Anwendungen der Bayes'schen Regel zu zeigen. Anknüpfend an die Untersuchung Poisson's[8]) (§ 89) über die Buffon'schen Versuche (s. Art. 37), wobei es sich u. a. auch um die Frage handelte, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dafs bei der verwendeten Münze die Wappenseite eine gröfsere Wahrscheinlichkeit besitze nach oben hin zu fallen als die Schriftseite — für welche Wahrscheinlichkeit Poisson den Wert 0·81043 fand, während Bertrand durch eine einfachere Analyse 0·81 erhält — setzt Bertrand den extremen Fall, dafs mit der betreffenden Münze nur ein Wurf gemacht worden wäre und

Wappen ergeben hätte; die Bayes'sche Regel auf dieselbe Frage, welche Poisson gestellt, angewendet, giebt

$$\frac{\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx}{\int\limits_{0}^{1} x\,dx} = \frac{3}{4}$$

als Wahrscheinlichkeit dafür, dafs die Wappenseite durch die physische Constitution der Münze begünstigt sei; und „eine solche Folgerung", sagt Bertrand, „genüge, um das Princip zu verdammen". Wir halten dafür, dafs die Anwendung der Bayes'schen Regel auf einen solchen Fall zu verwerfen sei; das vorgängige Wissen, darin bestehend, dafs man es mit einer nahezu regelmäfsig gestalteten Münze zu thun habe, ist solcher Art, dafs man ihm mehr Bedeutung und Sicherheit zuschreiben wird als dem einzigen Versuche; man wird also auch nach diesem Versuche an der apriorischen Bewertung $\frac{1}{2}$ festhalten. Anders stünde es, wenn jener Versuch mit einem Körper von ganz unbekannter Form, bei dem jedoch nur zwei Möglichkeiten der Endlage (die Wappen und Schrift heifsen mögen) vorhanden sind, ausgeführt worden wäre; dann wäre der Wert $\frac{3}{4}$ das einzige, aus dieser wenn auch dürftigen Kenntnis in logischer Weise ableitbare Resultat.

Auf die Anwendungen, welche Laplace[5])[13]) von der Bayes'schen Regel auf die Frage des Sexualverhältnisses der Neugeborenen gemacht hat — welche Frage seit Arbuthnot[2]) die Wahrscheinlichkeitstheoretiker beschäftigt —, und auf die von Bertrand[3]) (art. 127—131) dazu gemachten Bemerkungen kann nur hingewiesen werden (vgl. auch Meyer's[1]) „Cours", deutsche Bearbeitung, art. 76—90). (S. Abschn. VII.)

Die Annahme gleicher apriorischer Möglichkeit der einzelnen Werte von x oder gleicher Wahrscheinlichkeit aller Hypothesen wird bei den praktischen Anwendungen die Regel bilden; es lassen sich jedoch Fälle construiren, in welchen ein derart beschaffenes vorgängiges Wissen vorhanden ist, dafs man a priori jedem x eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuzuschreiben vermag. Bertrand[3]) (art. 122) hat ein einfaches Beispiel dieser Art ausgeführt, um daran den Einflufs des vorgängigen und des aus der Beobachtung geschöpften Wissens zu zeigen. Aus einer Urne seien $m + n$ Ziehungen vorgenommen worden, bei welchen die Kugel nach der Ziehung wieder zurückgelegt wurde; es ergaben sich m weifse und n schwarze Kugeln. Der Inhalt der Urne sei selbst auch durch Ziehungen zustandegekommen, bei welchen das Ergreifen einer weifsen wie einer schwarzen

Kugel beständig mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zu erwarten war; auf diese Weise seien N Kugeln unbesehen in die Urne gelegt worden. Welches ist die aus diesem Wissen gefolgerte wahrscheinlichste Hypothese über das Mischungsverhältnis in der Urne? Die Wahrscheinlichkeit z, dafs die Urne $\frac{N}{2} - l$ weifse Kugeln enthalte, ist unter Voraussetzung eines beträchtlichen N nach den Entwicklungen des Art. 33 proportional $e^{-\frac{2l^2}{N}}$; z ist aber auch die Wahrscheinlichkeit, und zwar die apriorische, dafür, dafs die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weifsen Kugel aus der Urne $x = \frac{1}{2} - \frac{l}{N} = \frac{1}{2} - u$ ist; es ist also z proportional e^{-2Nu^2}. Unter Annahme dieses Wertes für x ist die Wahrscheinlichkeit y des beobachteten Ereignisses proportional dem Ausdruck $(\frac{1}{2} - u)^m(\frac{1}{2} + u)^n$. Die wahrscheinlichste Hypothese über x ergiebt sich also dadurch, dafs man die Function

$$e^{-2Nu^2}(\tfrac{1}{2} - u)^m(\tfrac{1}{2} + u)^n$$

auf ihr Maximum prüft; dieses Maximum stellt sich für

$$u = \frac{n - m}{2(N + m + n)}$$

ein, folglich ist

$$x = \frac{N + 2m}{2(N + m + n)}$$

der wahrscheinlichste Wert der Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weifsen Kugel aus der Urne. Dieser Wert liegt zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{m}{m+n}$, also zwischen der plausibelsten Annahme, die aus dem vorgängigen Wissen zu ziehen war, und zwischen der plausibelsten Annahme, zu welcher die Beobachtung allein geführt haben würde; er nähert sich der ersten Grenze in dem Mafse, als N im Vergleich zu m und n immer gröfser und gröfser wird, und er strebt der zweiten Grenze zu, wenn m und n gegenüber N immer gröfser und gröfser werden: das umfangreichere und demgemäfs auch sicherere Wissen kommt in dem Werte von x zu stärkerem Ausdruck. Sollte es vorkommen — Bertrand discutirt diesen Fall —, dafs das Verhältnis $\frac{m}{m+n}$ von $\frac{1}{2}$ erheblich differirt (alle Zahlen etwa als von derselben Gröfsenordnung vorausgesetzt), so könnte daraus, wenn kein Anhaltspunkt für eine Erklärung dieses Unterschiedes vorliegt, nur die Vermutung gezogen werden, dafs der Zufall entweder bei der Bildung des Inhalts der Urne oder bei der Vornahme der Ziehungen aus derselben oder bei beiden Processen von dem wahrscheinlichsten Ergebnis weiter abgeführt hat, als man mit Rücksicht auf den Umfang der Ziehungen zu erwarten geneigt gewesen wäre. Man stöfst in Ver-

folgung dieses Gedankenganges unwillkürlich auf die Frage: Bei welcher Gröſse jener Differenz wäre man berechtigt anzunehmen, daſs auſser dem Zufall noch etwas anderes im Spiele war? Es scheint uns aber, daſs man mit dieser Frage die Grenze dessen erreicht hat, was der wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchung mit einiger Berechtigung noch unterbreitet werden kann.

41. Mit der Bayes'schen Regel ist das Mittel gegeben, auch die Wahrscheinlichkeit eines künftigen — oder richtiger gesagt, eines noch nicht bekannten — Erfolges, der aus denselben Ursachen hervorgehen kann wie das beobachtete Ereignis, zu bestimmen. Es bedarf hierzu nur einer richtigen Anwendung der Sätze über die zusammengesetzte und die totale Wahrscheinlichkeit.

Ist P_i die aposteriorische Wahrscheinlichkeit der Ursache C_i, q_i die Wahrscheinlichkeit, welche diese Ursache dem künftigen Ereignis erteilen würde, so ist $P_i q_i$ die aposteriorische Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des künftigen Ereignisses nach dieser Ursache, d. h. die aus der Beobachtung erschlossene Wahrscheinlichkeit, daſs die genannte Ursache existent war und daſs aus ihr auch das noch in Frage stehende Ereignis hervorgehen werde oder hervorgegangen sei. Daraus ergiebt sich die totale aposteriorische Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

$$\Pi = P_1 q_1 + P_2 q_2 + \cdots + P_n q_n. \tag{α}$$

Dieses Resultat hat Laplace in der 1. Auflage der „Théorie analytique" als IV. Princip in die Worte gefaſst: „Die Wahrscheinlichkeit eines künftigen Ereignisses ist die Summe der Producte aus der Wahrscheinlichkeit einer jeden Ursache, wie sie aus dem beobachteten Ereignis sich ergiebt, mit der Wahrscheinlichkeit, daſs, indem diese Ursache existirt, das künftige Ereignis stattfinden werde."

In Verbindung mit den Ergebnissen des Art. 39 ergiebt sich für Π die folgende Darstellung aus den einzelnen Elementen der Rechnung, u. zw.

$$\Pi = \frac{\sum_1^n p_\lambda q_\lambda}{\sum_1^n p_\lambda}, \tag{β}$$

wenn alle Ursachen a priori gleich wahrscheinlich sind, und

$$\Pi = \frac{\sum_1^n \omega_\lambda p_\lambda q_\lambda}{\sum_1^n \omega_\lambda p_\lambda}, \tag{γ}$$

wenn ω_λ die vorgängige Wahrscheinlichkeit der Ursache C_λ ist.

Wenn sowohl das beobachtete wie das noch unbekannte Ereignis von einem Ereignis E abhängen, dessen Wahrscheinlichkeit x dann den Repräsentanten einer Ursache oder Hypothese bildet und aller Werte aus dem Intervall $(0, 1)$ fähig ist, so ergiebt sich für die Wahrscheinlichkeit a posteriori des künftigen Erfolges der analytische Ausdruck

$$\Pi = \frac{\int\limits_0^1 y w\, dx}{\int\limits_0^1 y\, dx}, \text{ beziehungsweise } = \frac{\int\limits_0^1 y z w\, dx}{\int\limits_0^1 y z\, dx}; \qquad (\delta)$$

darin bedeutet y die Wahrscheinlichkeit des beobachteten, w die Wahrscheinlichkeit des künftigen Ereignisses unter der Annahme, daſs x die Wahrscheinlichkeit von E ist, und z die apriorische Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit dieser letzteren Annahme.

Mit der näherungsweisen Bestimmung der in diesen Formeln auftretenden Integrale hat Laplace[13]) im VI. Cap. der „Théorie anal.“, art. 32, unter der Voraussetzung sich beschäftigt, daſs das beobachtete Ereignis aus einer sehr groſsen Anzahl einfacher Ereignisse sich zusammensetzt, die Methoden des I. Buches über die Approximation von Functionen benützend, die von sehr groſsen Zahlen abhängen. Er findet für den Nenner und Zähler der ersten Formel für Π (in welcher die zweite mit enthalten ist, wenn man im Falle ungleicher apriorischer Wahrscheinlichkeit y durch yz ersetzt,) die Näherungswerte

$$\int\limits_0^1 y\, dx = \frac{(y)_a^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{-(y'')_a}},$$

$$\int\limits_0^1 y w\, dx = \frac{\{(yw)\}_{a'}^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\{(yw)''\}_{a'}}};$$

dabei ist a der Wert von x, welcher das Maximum von y, a' derjenige Wert, welcher das Maximum von yw herbeiführt; ferner bedeutet $(y'')_a$ jenen Wert, welchen $\frac{d^2 y}{dx^2}$ für $x = a$ annimmt u. s. w.

Von Interesse ist die Untersuchung, welche Laplace über den Fall anstellt, wo das erwartete Ereignis von beträchtlich geringerem Umfange ist als das beobachtete. Besteht beispielsweise letzteres in dem m-maligen Eintreffen und dem n-maligen Ausbleiben von E, und setzt sich das erstere in analoger Weise nach den Zahlen m', n'

zusammen, so kann man, wenn die Zahlen m', n' kleiner sind als die Hälften der Zahlen m, n, ohne merklichen Fehler die Wahrscheinlichkeit des künftigen Ereignisses aus der Wahrscheinlichkeit a, welche y zum Maximum macht, rechnen. Bemerkenswert ist ferner das Resultat, welches Laplace für den häufig vorkommenden Fall angiebt, dafs sich w als Function von y, $w = \varphi(y)$, darstellen läfst; dann wird w zugleich mit y ein Maximum, infolgedessen ist $a' = a$ und

$$\Pi = \left\{ \frac{\varphi(y)}{\sqrt{1 + \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}}} \right\}_{x=a}.$$

Die Hauptaufgabe über die aposteriorische Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse hatte Laplace in dem wichtigen Mémoire[2]) „Mémoire sur la probabilité des causes par les évènemens" bereits behandelt und zwar in folgender Form: Eine Urne enthalte eine unbegrenzte Anzahl weifser und schwarzer Zettel in unbekanntem Mengenverhältnis; es sind $p + q$ Zettel gezogen worden, wovon p weifs und q schwarz waren; verlangt wird die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen von m weifsen und n schwarzen Zetteln in $m + n$ weiteren Ziehungen. Laplace giebt den Ausdruck

$$\frac{\int_0^1 x^{p+m}(1-x)^{q+n}\,dx}{\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx} \qquad (\varepsilon)$$

als Lösung der Aufgabe an, setzt also voraus, dafs die Zettel in den noch vorzunehmenden Ziehungen in einer bestimmten Reihenfolge der Farben erscheinen sollen. Den strengen Wert dieses Ausdrucks, nämlich

$$\frac{(p+q+1)!\,(p+m)!\,(q+n)!}{p!\,q!\,(p+q+m+n+1)!}$$

formt er durch Anwendung der Stirling'schen Formel für die praktische Rechnung um.

Condorcet, für welchen die Wahrscheinlichkeit der Ursachen und künftigen Ereignisse mit Rücksicht auf das Anwendungsgebiet, dem er sich zugewendet hatte, besonderes Interesse haben mufste, hat sich sowohl in dem bekannten „Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix[4])" wie auch in einem umfangreichen Mémoire über verschiedene Fragen der Wahrscheinlichkeitstheorie, das in sechs Abschnitten in der „Histoire de l'Acad." für die Jahre 1781—1784 erschienen ist, mit diesem Gegenstande eingehend beschäftigt. In beiden Publicationen,

in der letztgenannten im vierten Abschnitt, stellt er auch die Lösung des obigen Hauptproblems auf, und zwar giebt er den Ausdruck

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\frac{\int_0^1 x^{p+m}(1-x)^{q+n}\,dx}{\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx}, \qquad (\zeta)$$

sodafs die Reihenfolge der Farben in den künftigen $m+n$ Ziehungen unbestimmt gelassen wird. In dem „Mémoire" hat Condorcet vergeblich den Versuch gemacht, die in obiger Formel auftretenden Integrale durch andere, für die numerische Auswertung bequemere zu ersetzen.

Das aus dieser letzten Formel sich ergebende Resultat

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{(p+q+1)!}{p!\,q!}\,\frac{(p+m)!\,(q+n)!}{(p+q+m+n+1)!} \qquad (\eta)$$

hat Trembley[2]) in Verfolgung der von ihm bevorzugten Methode, die Ergebnisse der Untersuchungen anderer, wie De Moivre, Bernoulli, Laplace, mit Umgehung des Infinitesimalcalculs auf combinatorischem Wege abzuleiten, auf diesem elementaren Wege nachgewiesen; dafs ein solches Verfahren in den meisten Fällen keine Vereinfachung der Rechnung und noch weniger eine Erleichterung des Verständnisses bringt, braucht kaum bemerkt zu werden.

Eine bemerkenswerte Modification des Problems haben Prevost und Lhuilier in dem Mémoire[1]) „Sur les probabilités" zum erstenmal behandelt und einer eingehenden Discussion unterzogen. Aus einer Urne, welche N Kugeln, weifse und schwarze in unbekanntem Mengenverhältnis, enthält, sind $p+q$ Kugeln gezogen aber nicht wieder zurückgelegt worden, p davon waren weifs, q schwarz; wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs $m+n$ weitere, in derselben Weise ausgeführte Ziehungen m weifse und n schwarze Kugeln ergeben werden? Das auf combinatorisch-inductivem Wege gefundene Resultat ist das unter (η) angegebene; es wird einer Probe auf seine Richtigkeit unterzogen, die darin besteht, dafs von der Summe der Ausdrücke (η), welche sich ergeben, wenn man die Zahlen m, n alle Wertverbindungen durchlaufen läfst, die eine bestimmte Summe $m+n$ geben — solcher Wertverbindungen giebt es $m+n+1$ — nachgewiesen wird, dafs sie der Einheit gleich sei, wie es notwendig ist, weil eine von den Combinationen: $m+n$ weifs, 0 schwarz; $m+n-1$ weifs, 1 schwarz; $m+n-2$ weifs, 2 schwarz; $\cdots$ 0 weifs, $m+n$ schwarz, erscheinen mufs. Es wird ferner durch eine approximative Rechnung unter allen diesen Combinationen diejenige festgestellt, welcher die gröfste Wahrscheinlichkeit zukommt, und gezeigt,

daſs bei groſsem $m + n$ dies diejenige sei, in welcher nahezu $\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$ ist. Auch der bemerkenswerte Umstand entgeht der Aufmerksamkeit der beiden Verfasser nicht, daſs das Resultat (η) die Anzahl N der ursprünglich in der Urne enthaltenen Kugeln nicht aufweist, und sie fügen hinzu, daſs dies nicht der Fall wäre, wenn die Kugeln nach jeder Ziehung zurückgelegt würden. Todhunter[1]) (art. 847) weist auf die merkwürdige Thatsache hin, daſs das für die letztgedachte Form des Problems geltende Resultat mit wachsender Gesamtzahl der in der Urne vorhandenen Kugeln sich dem Ausdruck (η) als Grenze nähert, so daſs das von Prevost und Lhuilier behandelte Problem in Bezug auf das Resultat identisch ist mit solchen Ziehungen, bei welchen die Kugeln zurückgelegt werden, aber aus einer Urne mit einer unbeschränkten Kugelmenge. In der That gilt in letzterem Falle für die Wahrscheinlichkeit des künftigen Ereignisses der Ausdruck (ζ), weil ja nunmehr die Wahrscheinlichkeit x für das Treffen einer weiſsen Kugel aller Werte von 0 bis 1 fähig ist; dieser Ausdruck giebt aber, wenn man ihn ausführt, den Wert (η).

42. Zum Abschluſs dieses Abschnittes mögen noch einige Arbeiten aus späterer Zeit angeführt werden, welche das Thema der Hypothesenwahrscheinlichkeit betreffen.

Im Liouville'schen Journal hat Catalan[2]) einige Aufgaben behandelt, welche sich auf Ziehungen aus einer Urne beziehen, deren Inhalt selbst wieder durch Ziehungen aus einer anderen Urne mit bekanntem Inhalte gebildet worden ist; die Aufgaben eignen sich zu Beispielen für die Erläuterung der Principien.

Eine Arbeit, welche recht geeignet ist, die eigentümlichen Schwierigkeiten erkennen zu lassen, die sich der richtigen Erfassung und Lösung mancher Wahrscheinlichkeitsprobleme entgegenstellen, hat Dedekind[1]) veröffentlicht. Es handelt sich um eine Aufgabe, für welche Cayley eine Lösung gegeben hat, die von Boole, dem hervorragenden Logiker und Mathematiker (irrtümlich) bekämpft worden ist; der Wortlaut der Aufgabe ist der folgende: „Gegeben ist die Wahrscheinlichkeit α, daſs eine Ursache A (welche ein gewisses Ereignis hervorbringen kann) zur Wirkung kommt, und die Wahrscheinlichkeit p, daſs, wenn A wirkt, das Ereignis eintritt; ebenso die Wahrscheinlichkeit β, daſs eine Ursache B zur Wirkung gelangt, und die Wahrscheinlichkeit q, daſs, wenn B wirkt, das Ereignis eintritt: gesucht wird die Wahrscheinlichkeit u des Ereignisses, unter der Annahme, daſs dasselbe von keiner anderen Ursache als von A und B hervorgebracht werden kann." Cayley benutzt zur Lösung zwei Hilfszahlen: die Wahrscheinlichkeit λ, daſs, wenn A wirkt, das Ereignis auch durch A hervorgebracht wird, und die Wahrscheinlichkeit μ, daſs, wenn B wirkt, das Ereignis auch durch B hervorgebracht wird. Mit diesen Daten bildet er die Ansätze

$$p = \lambda + (1 - \lambda)\mu\beta, \quad q = \mu + (1 - \mu)\lambda\alpha,$$
$$u = \lambda\alpha + \mu\beta - \lambda\mu\alpha\beta$$

und bemerkt, zum Zwecke der Lösung seien die Werte von λ, μ aus den beiden ersten Gleichungen in die dritte zu substituiren. Um diese Ansätze richtig zu erfassen, mufs auf den Unterschied zwischen p und λ einerseits und q und μ andererseits wohl geachtet werden: p ist nach dem Text der Aufgabe die Wahrscheinlichkeit, dafs, wenn A wirkt, das Ereignis eintritt (gleichgiltig durch welche Ursache); λ ist die Wahrscheinlichkeit, dafs bei Action der Ursache A das Ereignis auch hervorgebracht werde; ähnliches gilt bezüglich q und μ. Dedekind weist nun nach, dafs die Angaben Cayley's zur endgiltigen Lösung der Aufgabe nicht ausreichen. Wenn man nämlich zwischen den angeschriebenen drei Gleichungen die Hilfsgröfsen λ, μ eliminirt, so entsteht eine in u quadratische Gleichung; soll dieselbe reelle Wurzeln besitzen, sollen u, λ, μ, wie es ihrer Bedeutung entspricht, positive echte Brüche sein, so ist notwendig und hinreichend, dafs die vier gegebenen Wahrscheinlichkeiten α, β, p, q keine der beiden Differenzen

$$p - \beta q, \quad q - \alpha p$$

negativ machen; von den beiden Lösungen der quadratischen Gleichung mufs ferner diejenige genommen werden, in welcher die auftretende Quadratwurzel positiv ist.

Durch Fragen der Sterblichkeitsmessung veranlafst hat Küttner[3]) in einer Abhandlung den Fall untersucht, dafs sich der Beobachtung von Ereignissen zum Zwecke der Bestimmung ihrer aposteriorischen Wahrscheinlichkeit andere Ereignisse hindernd in den Weg stellen; so hindert das Sterben und Invalidwerden während eines Jahres die Beobachtung der Activen vom Beginne des Jahres. Die hierzu gegebenen Ausführungen entbehren jedoch der Klarheit.

In einer Note der Zeitschr. für Math. u. Phys. giebt Hofmann[1]) eine Ableitung der Bayes'schen Regel aus dem apriorischen Wahrscheinlichkeitsbegriff und glaubt dadurch eine Vereinfachung der Laplace'schen Beweisführung geliefert zu haben. Indessen ist dieser Weg, wie in Art. 39 ausgeführt wurde, schon viel früher und in durchsichtigerer Weise von anderen eingeschlagen worden. Aus dem zweiten Teil der Note geht hervor, dafs der Verfasser sich über die Stellung des Bernoulli'schen Theorems in der Theorie nicht klar geworden ist.

Vierter Abschnitt.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Beurteilung von zufälligen Ereignissen abhängiger Vor- und Nachteile.

43. Die Wahrscheinlichkeitstheorie hat sich aus Glücksspielen entwickelt. Das Wesen solcher Spiele besteht darin, dafs das Eintreffen jeder Eventualität, die dabei vorkommen kann, für den einen der Spieler mit der Einnahme oder dem Gewinn, für den anderen mit der Ausgabe oder dem Verlust einer Geldsumme verbunden ist. Die Frage, wie diese Summen zu regeln seien, damit den Anforderungen der Gerechtigkeit oder Billigkeit entsprochen werde, stand daher anfangs im Vordergrunde des Interesses. Dies geht aus der Fassung der Aufgaben hervor, wie wir ihr in den ersten Schriften über den Gegenstand zumeist begegnen, so bei Huygens, Jakob Bernoulli u. a.; dafür giebt auch Zeugnis die bis auf die Gegenwart überkommene Gepflogenheit, numerische Wahrscheinlichkeitsaussagen in die Form von Wetten zu kleiden; ja Bayes[1]) gründet sogar die Definition der Wahrscheinlichkeit auf die bei einem Glücksspiel in Betracht kommenden Geldsummen.

Die typische Aufgabe, an welche die Betrachtungen über die Bedeutung einer Geldsumme, deren Realisirung von dem Eintreffen eines ungewissen Ereignisses abhängt, anzuknüpfen pflegen, ist das von Pascal und Fermat zuerst gelöste Teilungsproblem (s. Art. 18). Es handelt sich dabei um die rechtmäfsige Teilung der Spieleinlage unter die Spieler, wenn sie das Spiel vor dessen Entscheidung abbrechen, und wenn bekannt ist, wieviel Punkte (Stiche, Einzelgewinne) jedem von ihnen fehlen, um die ganze Spieleinlage zu gewinnen. Es stand bei den genannten Geometern sowie bei ihren Nachfolgern in der Wahrscheinlichkeitslehre als Axiom fest, dafs gleich mögliche Fälle gleich grofse Ansprüche auf die Spieleinlage begründen demjenigen, dem sie günstig sind; daraus ergab sich als Regel, dafs die Spieleinlage zu teilen sei im Verhältnisse der Anzahlen der günstigen Fälle, welche jedem Spieler für die Realisirung des schliefslichen Gewinnes zukommen, oder im Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten, mit welchen sie den endgiltigen Gewinn zu erwarten haben.

Aus diesen Betrachtungen entwickelte sich der Begriff der mathematischen Hoffnung, der formal definirt wird als das Product einer zu erhoffenden Summe mit der Wahrscheinlichkeit, sie zu erlangen. Seine metaphysische Bedeutung wäre nach der vorgeführten Deduction dahin zu formuliren, die mathematische Hoffnung bedeute den Anteil der auf dem Spiel stehenden Summe, welcher demjenigen, der sie mit der bezeichneten Wahrscheinlichkeit erwartet,

gebührte, wenn von der Entscheidung durch das Los oder den Zufall abgesehen würde.

Man braucht den obigen Gedanken nur umzukehren, um zu einer anderen Deutung der mathematischen Hoffnung geführt zu werden. Soll ein Glücksspiel dem Gewinnenden eine bestimmte Summe einbringen, so müssen die Spieler zur Aufbringung dieser Summe in demselben Verhältnisse beitragen, in welchem sie dieselbe unter sich teilen würden, wenn sie vorhanden wäre und sie auf die Ausführung des Spieles verzichteten. Hiernach bestimmt die mathematische Hoffnung den rechtmäfsigen Beitrag des einzelnen Spielers zu der Spieleinlage, auf welche die Hoffnung sich bezieht.

Die Anwartschaft auf eine wenn auch ungewisse Summe, d. i. die Möglichkeit, diese Summe wirklich zu erlangen, wenn der Zufall in günstigem Sinne entscheidet, bedeutet für die betreffende Person einen Vorteil, einen idealen Besitz insofern, als sie nicht gewillt wäre, diese Anwartschaft ohne weiteres, ohne ein Äquivalent, aufzugeben. In diesem Sinne hat Laplace[13]) den Begriff der mathematischen Hoffnung (espérance mathématique) aufgefasst, wenn er erklärt, dieselbe sei der Vorteil desjenigen, der irgend ein Gut unter blofs wahrscheinlichen Voraussetzungen erwartet. Im Sinne dieser Auffassung könnte man sagen, die mathematische Hoffnung bestimme den rechtmässigen Entgelt für das Preisgeben der Anwartschaft.

Poisson[8]) (§ 23) hat der mathematischen Hoffnung eine Deutung gegeben, gegen die sich schon sein Übersetzer, Schnuse, mit Recht wendet, und die auch Bertrand[3]) (art. 37) als unzutreffend verwirft; er erblickt in ihr eine Summe, welche die betreffende Person wirklich besitzt, „und welche man in das Inventarium ihres Vermögens als eine positive Forderung aufnehmen müfste“. Diese Eintragung wäre unter allen Umständen falsch; denn hat jemand durch einen Einsatz die Anwartschaft auf eine Summe sich erkauft und diese Ausgabe bereits vom Vermögen abgeschrieben, so wird er nach der Entscheidung entweder nichts oder die ganze gewonnene Summe, niemals aber einen der mathematischen Hoffnung (dem Einsatze) gleichen Betrag in die Activen einzustellen haben.

Wenn das Product, durch welches die mathematische Hoffnung formal definirt worden ist, mit einer Summe gebildet wurde, deren Verlust mit der betreffenden Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist, so drückt es nicht mehr das Mafs für einen Vorteil, sondern für einen Nachteil aus. Das Wort Hoffnung pafst dann seiner üblichen Bedeutung nach nicht, wenn man sich auch in der mathematischen Redeweise durch die Wendung „negative mathematische Hoffnung“ zu helfen weifs; auf beide Fälle gleichmässig anwendbar ist die von Oettinger[2]) gebrauchte Bezeichnung „mathematische Erwartung“ („mathematical expectation“ bei den englischen Mathematikern).

Die möglichen Fälle einer Ereignissphäre, in der Anzahl m,

seien aus irgend einem Gesichtspunkte in Gruppen von $m_1, m_2, \cdots m_n$ Fällen geschieden; einer der m Fälle wird der Verwirklichung zugeführt, und gehört er der Gruppe m_1 an, so tritt bei einer Person A_1 der Gewinn (oder Verlust) einer Summe a_1 ein; ist er aus der Gruppe m_2, so gewinnt (oder verliert) eine andere Person A_2 die Summe a_2; $\cdots$; stammt er endlich aus der Gruppe m_n, so gewinnt (oder verliert) eine n-te Person A_n den Betrag a_n. Die Anwartschaften der Personen sind vor dem Spiele gleich $\frac{m_1}{m} a_1, \frac{m_2}{m} a_2, \cdots \frac{m_n}{m} a_n$, wobei die auf Gewinne bezüglichen positiv, die Verluste betreffenden negativ genommen werden sollen. Will eine Person A alle diese Anwartschaften auf sich vereinigen, so ist der rechtmäfsige Erlag hierfür die Summe

$$\frac{m_1}{m} a_1 + \frac{m_2}{m} a_2 + \cdots + \frac{m_n}{m} a_n, \tag{α}$$

wofür, wenn man beachtet, dass $\frac{m_1}{m}$ die Wahrscheinlichkeit p_1 für den Eintritt der ersten Eventualität ist, u. s. f., auch geschrieben werden kann:

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n. \tag{β}$$

Dies also ist die mathematische Hoffnung einer Person, welche den Eintritt einer von n sich gegenseitig ausschliefsenden und von einander unabhängigen Eventualitäten, an deren jede sich der Gewinn oder Verlust einer festgesetzten Summe knüpft, erwartet. Der in dem Ausdruck (β) enthaltene Satz wird häufig als eine selbstverständliche Thatsache hingestellt, mitunter auch ohne nähere Angabe der Bedingungen, unter welchen er gilt (s. Poisson[8]) § 23, deutsche Bearbeitung von Meyer[1]), art. 57). Bertrand[3]) (art. 38) beweist ihn durch einen dem obigen inversen Gedankengang, der uns weniger durchsichtig scheint. Aus der Form (α) der Erwartung (β) läfst sich die andere

$$\frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \cdots + m_n a_n}{m} \tag{γ}$$

herstellen und dadurch eine neue Deutung des Begriffes gewinnen. Würden nämlich alle m Fälle in irgend einer Reihenfolge realisirt, jeder mit dem an die betreffende Eventualität geknüpften Betrage, so wäre (γ) der durchschnittlich auf einen entfallende Betrag. Hiernach kann die mathematische Hoffnung als ein Durchschnittswert aufgefafst werden, und zwar als der auf einen der möglichen Fälle entfallende Betrag, wenn alle Fälle, jeder mit der ihm entsprechenden Summe, verwirklicht würden. So wäre (γ) die mathematische Hoffnung des Besitzers eines von m Losen aus einer

Lotterie, welche m_1 Treffer im Betrage a_1, m_2 Treffer im Betrage a_2, $\cdots m_n$ Treffer im Betrage a_n (etwaige Nieten mit dem Betrage Null angesetzt) in Aussicht stellt; es wäre dies aber auch der Durchschnittswert eines Loses, jener Wert zugleich, für welchen das Los zu verkaufen wäre, wenn es sich bei der Unternehmung um nichts anderes handelte, als eine andere Vermögensaufteilung unter den Losabnehmern herbeizuführen.

Eine solidere Basis erhält der Begriff der mathematischen Hoffnung, wenn es sich nicht um die Verwirklichung eines einzigen Falles, sondern um sehr zahlreiche Wiederholungen handelt. Angenommen, von zwei entgegengesetzten Ereignissen E und F, deren Wahrscheinlichkeiten p und q sind, bedinge der Eintritt des ersten den Gewinn der Summe a, der Eintritt des zweiten den Verlust der Summe b. In einer sehr grofsen Anzahl s von Realisirungen trete E m-mal und F n-mal ein, so ist

$$ma - nb$$

die gesamte, und

$$\frac{ma - nb}{s}$$

die im Durchschnitt auf einen Fall bezügliche Vermögensänderung der Person, welche das Spiel unternimmt. Nach dem Bernoulli'schen Theorem ist aber der relativ wahrscheinlichste Wert des Quotienten $\frac{m}{s}$, der vor Beginn des Spieles zu erwarten ist, gleich p, und der wahrscheinlichste Wert des Quotienten $\frac{n}{s}$ gleich q; demnach der wahrscheinlichste Wert des auf eine Realisirung entfallenden Betrages

$$pa - qb,$$

und dies ist zugleich das, was man hier als die auf eine einmalige Realisirung bezügliche Hoffnung bezeichnen würde. Diese für die praktische Anwendung wichtigste Begründung des Princips, als Mafs der Hoffnung das Product aus der Summe in die Wahrscheinlichkeit sie zu erlangen (oder zu verlieren) zu nehmen, ist zuerst von Condorcet[1])[4]) gegeben worden.

Auf diese Auffassung der Sache stützt sich eine weitere Benennung für den in Rede stehenden Begriff. Man nennt das Product aus irgend einer Gröfse mit der Wahrscheinlichkeit ihrer Verwirklichung den wahrscheinlichen Wert dieser Gröfse.

Zum Schlusse sei noch zweier Angriffe gedacht, welche gegen das Princip der mathematischen Hoffnung unternommen worden sind. Der eine von D'Alembert[3]); dieser findet das Princip nicht in allen Fällen zutreffend, so namentlich dann nicht, wenn die Wahrscheinlichkeit sehr klein ist. Wenn jemandem die Summe 2^{100} Kronen

in Aussicht gestellt würde für den Fall, dass erst auf den 100. Wurf mit einer Münze Wappen nach oben fällt, so würde er sich's wohl überlegen, 1 Krone einzusetzen, weil er sie sicher verlieren würde, da Wappen sicher, wenn auch nicht notwendig, vor dem hundertsten Wurf erscheinen werde.

Eine von der allgemein angenommenen abweichende Bemessung der Erwartung suchte Rizzetti[1]) zu befürworten. Setzen A, B die Summen a, b in ein Spiel ein, in welchem es $m + n + p$ gleichmögliche Fälle giebt, und soll A, wenn einer der m Fälle eintritt, beide Einsätze —, wenn einer der p Fälle eintritt, seinen eigenen Einsatz —, und wenn einer der n Fälle sich einstellt, nichts erhalten, so sei seine Erwartung nicht durch $\frac{m(a+b)+pa}{m+n+p}$, sondern durch $\frac{m(a+b)+pa}{m+n+p} - a = \frac{mb-na}{m+n+p}$ zu messen, mit Rücksicht darauf, dafs er a schon ausgelegt hat. Daneben empfiehlt Rizzetti auch den Wert $\frac{mb}{m+n+p}$, weil A doch nur den Gewinn der Summe b zu erwarten habe, wofür m günstige Fälle vorhanden seien.

44. Wenn ein Problem, das die mathematische Hoffnung betrifft, bestimmt ist, so gestatten seine Daten, für jede Eventualität, die sich einstellen kann, die Wahrscheinlichkeit ihres Eintreffens und die mit ihr verbundene Vermögensänderung zu berechnen; aus diesen Zahlen ist dann der Wert der mathematischen Hoffnung nach dem Schema des Ausdruckes (β) im vorigen Artikel zusammenzusetzen. Wenn die Entscheidung über die einzelnen Eventualitäten zu verschiedenen, im voraus festgesetzten Zeitpunkten zu erfolgen hat, dann mufs die Erwartung auf einen bestimmten Zeitpunkt reducirt werden, wozu noch eine Vereinbarung über den in Rechnung zu bringenden Zinsfufs notwendig ist. Diese Art der Ausführung bietet zu Bemerkungen keinen Anlafs.

Es kommen aber Fälle vor — und dies können nur solche sein, bei denen Zeitbestimmungen nicht in Betracht zu ziehen sind —, wo man die Bestimmung der mathematischen Hoffnung erheblich vereinfachen, insbesondere die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für die einzelnen Eventualitäten, häufig das schwierigste Geschäft, umgehen kann.

Als classisches Beispiel dieser Art darf wohl die Aufgabe angesehen werden, mit welcher Laplace[13]) das IX. Capitel der Wahrscheinlichkeitstheorie eröffnet. Es handelt sich um die mathematische Erwartung einer Person A, für welche das Eintreffen eines Ereignisses von der Wahrscheinlichkeit p den Gewinn ν, sein Nichteintreffen den Verlust μ zur Folge hat, und die sich auf s solche Fälle einläfst. Wenn das Ereignis m-mal eintrifft und $n = (s - m)$-mal ausbleibt, wofür

$$\frac{s!}{m!\,n!}p^m q^n \qquad (q = 1 - p) \tag{α}$$

die Wahrscheinlichkeit ist, so erfährt A die Vermögensänderung

$$m\nu - (s - m)\mu = m(\mu + \nu) - s\mu; \tag{β}$$

seine gesamte mathematische Erwartung ist durch die Summe der Producte aus den Ausdrücken (α) und (β), gebildet von $m = 0$ bis $m = s$ bestimmt, kommt also gleich

$$-s\mu(p + q)^s + (\nu + \mu)\sum_0^s{}_m \frac{s!}{m!\,n!} m p^m q^n; \tag{γ}$$

die analytische Schwierigkeit liegt hier in der erforderlichen Summation. Nun ist

$$(tp + q)^s = \sum \frac{s!}{m!\,n!} t^m p^m q^n,$$

daraus folgt durch Differentiation nach t:

$$sp(tp + q)^{s-1} = \sum \frac{s!}{m!\,n!} m t^{m-1} p^m q^n,$$

und hieraus für $t = 1$:

$$sp = \sum \frac{s!}{m!\,n!} m p^m q^n.$$

Diesen Wert in (γ) eingetragen, erhält man für die verlangte Erwartung

$$s(p\nu - q\mu). \tag{δ}$$

Dies ist das directe Verfahren; man kann aber das Resultat auch mit Umgehung dieser Rechnung gewinnen. Für jeden einzelnen der s Fälle besteht die Erwartung $p\nu - q\mu$; vermöge der Unabhängigkeit der Fälle ist die gesamte Erwartung das s-fache hiervon, also $s(p\nu - q\mu)$.

Bertrand[3]) hat in seinem „Calcul des prob." in den art. 39 bis 42 mehrere interessante Beispiele einer solchen abgekürzten Hoffnungsbestimmung gegeben, und zwar sind es Fälle, wo die Ermittelung der Wahrscheinlichkeit für die möglichen Eventualitäten mit Schwierigkeiten verbunden wäre. Zu der Aufgabe des art. 40 ist eine Bemerkung zu machen. Eine Urne enthält weifse und schwarze Kugeln; die Wahrscheinlichkeit, eine weifse zu ziehen, ist p; für schwarz ist sie q. Eine Person macht μ Ziehungen, legt die gezogene Kugel zurück und erhält so oft einen Frc., als eine weifse Kugel getroffen wird, der eine schwarze vorangeht und nachfolgt; es wird um die mathematische Erwartung gefragt. Bertrand bewertet sie mit $\mu p q^2$ Frcs., schliefsend, dafs die Wahrscheinlichkeit

der Folge schwarz-weifs-schwarz pq^2 ist und dafs vor Aufnahme des Spiels jede Ziehung mit dieser Wahrscheinlichkeit den Gewinn erwarten lasse; die letztere Behauptung ist unzutreffend, das Resultat mufs vielmehr in $(\mu - 2)pq^2$ umgewandelt werden, weil die erste und letzte Ziehung für sich einen Gewinn nicht einbringen können.

Im Anschlufs hieran behandelt Bertrand das Nadelproblem nach der bemerkenswerten Methode eines Glücksspiels, welche Barbier[1]) angegeben hat, und auf die bereits im Art. 28 hingewiesen worden ist.

Wenn in einem Glücksspiel ein oder mehrere Gewinne den Teilnehmern durch das Los zugeführt werden sollen, und wenn diese in einer Reihenfolge dazu kommen, ihre Ansprüche geltend zu machen, so kann die Frage aufgeworfen werden, ob die Reihenfolge einen Einflufs hat auf die Gröfse der Erwartung der einzelnen Teilnehmer vor dem Spiele. Wenn z. B. in einer Urne neben $n - r$ schwarzen r weifse, mit den Nummern 1, 2, $\cdots r$ bezeichnete Kugeln enthalten sind, welch letztere die Treffer mit den Gewinnsten g_1, g_2, $\cdots g_r$ zu bilden haben; und wenn ferner bestimmt wird, dafs n Personen A_1, A_2, $\cdots A_n$ in dieser Reihenfolge zum Ziehen kommen, so könnte die Meinung auftauchen, als ob die letzten den ersten gegenüber benachteiligt wären, und zwar um so mehr, je kleiner die Anzahl der Treffer ist. Diese Meinung kann aber nur aus der Vertauschung der Zustände vor dem Spiele und vor dem einzelnen Zuge entspringen; in Wirklichkeit haben alle Teilnehmer, bevor das Spiel begonnen hat, dieselbe mathematische Erwartung $\frac{g_1 + g_2 + \cdots g_r}{n}$. Oettinger[2]) (§ 36) hat hierfür Beweise geliefert, die nicht correct entwickelt sind; denn Multiplication mathematischer Erwartungen ist eine sinnlose Operation.

45. De Morgan[2]) hat in dem vortrefflichen Artikel in der „Encyclopaedia Metropolitana“ die Unternehmungen, bei welchen mit dem Eintreffen von zufälligen Ereignissen Gewinn oder Verlust verbunden ist, in zwei Gruppen geschieden: in Wetten oder Glücksspiele, wo nur eine einmalige Entscheidung erfolgt, und in geschäftliche Speculationen, wo eine sehr beträchtliche Anzahl gleichartiger Fälle auf einmal oder nach und nach zur Entscheidung kommt. Bei der Beurteilung von Wetten kommt nur die Billigkeit in Frage, und diese erfordert die Gleichheit der mathematischen Erwartungen aller Teilnehmer. Wenn es sich dagegen um Unternehmungen geschäftlichen Charakters handelt, dann kommt das Gesetz der grofsen Zahlen ins Spiel.

Untersuchungen nach der letzteren Richtung hat Laplace[13]) im IX. Cap. der „Théorie anal.“ ausgeführt. Sie betreffen verschiedene Modalitäten auf den Zufall aufgebauter Unternehmungen und sind in ihren Resultaten von grofser Wichtigkeit für die Bildung richtiger Urteile.

Der einfachste Fall besteht darin, dafs eine grofse Anzahl s gleichartiger Entscheidungen erfolgt, deren jede das Eintreffen oder das Nichteintreffen eines Ereignisses E bringen mufs; mit dem ersteren, dessen Wahrscheinlichkeit p ist, ist ein Gewinn ν, mit dem letzteren ein Verlust μ verbunden. Die Anwendung des Bernoulli'schen Theorems führt zu dem Ergebnis, dafs man mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi s p q}} \tag{α}$$

zu erwarten habe, der wirkliche Erfolg aus den Gewinnen und Verlusten werde zwischen den Grenzen

$$s(p\nu - q\mu) \mp \gamma\sqrt{2pqs}(\nu + \mu), \tag{β}$$

enthalten sein. Wie man sieht, wächst er, wenn $p\nu - q\mu \gtrless 0$ ist, mit s ohne Unterlafs und könnte durch entsprechende Wahl von s beliebig grofs und auch beliebig sicher gemacht werden. Ist $p\nu - q\mu = 0$, also der Forderung der Billigkeit entsprechend, so dehnen sich wohl die Grenzen bei gegebenem P immer weiter aus; aber die Grenzen des auf die einmalige Entscheidung entfallenden Erfolges, nämlich

$$\mp \gamma \sqrt{\frac{2pq}{s}} (\nu + \mu),$$

ziehen sich mit wachsendem s immer enger zusammen und können durch entsprechende Wahl von s mit beliebiger Sicherheit beliebig eng gezogen werden.

Der nächste Fall, mit dem Laplace sich beschäftigt, setzt wechselnde Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E und wechselnde Gewinne und Verluste von einer Entscheidung zur anderen. Ist bei dem λ-ten Versuche p_λ die Wahrscheinlichkeit von E, ν_λ der mit seinem Eintreffen verknüpfte Gewinn, μ_λ der Verlust, wenn E nicht eintrifft, so findet Laplace die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt \tag{γ}$$

dafür, dafs der wirkliche Erfolg aus den Gewinnen und Verlusten eingeschlossen sei zwischen den Grenzen

$$\sum_1^s{}^{\lambda} (p_\lambda \nu_\lambda - q_\lambda \mu_\lambda) \mp \gamma \sqrt{2 \sum_1^s{}^{\lambda} \{p_\lambda q_\lambda (\nu_\lambda + \mu_\lambda)^2\}}. \tag{δ}$$

Auch hier erkennt man, dafs, sobald die mathematische Erwartung jedes einzelnen Falles die Null wenn auch noch so wenig übersteigt,

der wirkliche Gewinn mit s beständig zunimmt und durch entsprechende Vermehrung der Fälle beliebig grofs, und das mit beliebiger Sicherheit, werden kann.

Der dritte Fall, den Laplace behandelt, besteht in folgendem. Vor jeder Entscheidung hat eine Person einen der Gewinne (oder Verluste) $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \cdots$ und zwar mit den bezüglichen Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, \cdots$ zu erwarten, so dafs $p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + p_3\nu_3 + \cdots$ die den einzelnen Fall betreffende mathematische Hoffnung bildet; Gewinne sind als positiv, Verluste als negativ in die Rechnung zu stellen. Wenn nun eine grofse Anzahl s solcher Entscheidungen herbeigeführt wird, so darf die Person mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt \qquad (\varepsilon)$$

erwarten, dafs der wirkliche Erfolg aus den erzielten Gewinnen und erlittenen Verlusten eingeschlossen sein werde zwischen den Grenzen

$$s(p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + p_3\nu_3 + \cdots) \mp \gamma\sqrt{2s\{p_1\nu_1^2 + p_2\nu_2^2 + p_3\nu_3^2 + \cdots - (p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + p_3\nu_3 + \cdots)^2\}}. \qquad (\zeta)$$

Den ersten Fall dehnt Laplace auch noch auf aposteriorische Wahrscheinlichkeit aus und findet folgendes Resultat. Wenn in m bereits beobachteten Fällen das Ereignis E n-mal eingetroffen, dagegen $(m - n)$-mal ausgeblieben wäre, so bestünde die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt \qquad (\eta)$$

dafür, dafs sich aus s ferneren Unternehmungen derselben Art für die beteiligte Person ein Gewinn (unter Umständen ein Verlust) ergeben werde, der zwischen den Grenzen

$$s\left(\frac{n}{m}\nu - \frac{m-n}{m}\mu\right) \mp \gamma\sqrt{\frac{2n(m-n)s(m+s)}{m^3}}(\nu + \mu) \qquad (\vartheta)$$

enthalten ist.

46. Neben dem Begriff und der Theorie der mathematischen Hoffnung haben sich verschiedene Theorien der moralischen Hoffnung entwickelt; das Bedürfnis nach solchen war dem Umstande entsprungen, dafs die nach der ersteren Theorie gerechneten Resultate in manchen Fällen nicht befriedigen wollten, indem sie den Eingebungen des gemeinen Verstandes zu widersprechen schienen.

Der erste, welcher eine solche Theorie begründet hat, war Daniel Bernoulli[1]). Er hielt zwar an dem Gedanken fest, dafs

bei der Beurteilung der Erwartung einer Person die auf dem Spiele stehende Summe und die Wahrscheinlichkeit ihrer Realisirung in Rechnung kommen müssen; bei dem erstgenannten Factor sei aber zwischen dem absoluten Betrag und dem relativen Wert zu unterscheiden, welch letzterer sich nach der Bedeutung richte, welchen der Gewinn, beziehungsweise der Verlust der betreffenden Summe für die beteiligte Person hat. Er erkennt an, dafs sich über den relativen Wert keine für alle Fälle gleichmäfsig geltende Festsetzung machen lasse, dafs hier vielmehr verschiedene Hypothesen möglich seien; er entscheidet sich für eine solche, welche dem Vermögen der Person den ausschlaggebenden Einflufs einräumt, weil dieses bei der Wertschätzung eines Gewinnes oder Verlustes allgemein und am stärksten in Betracht komme. Nach seiner Hypothese ist der relative Wert einer unendlichkleinen Summe dx direct proportional ihrem absoluten Betrage und umgekehrt proportional dem gesamten Vermögen x der beteiligten Person; sein Ausdruck ist also $\frac{k\,dx}{x}$, wobei k eine Constante bedeutet. Setzt man ihn dy gleich, so ergiebt sich durch Integration

$$y = kl \cdot x + l \cdot h; \qquad (\alpha)$$

die Constante h wäre mit Hilfe zweier zusammengehöriger Werte von x und y zu bestimmen.

Laplace[13]), welcher die Hypothese D. Bernoulli's aufgenommen hat, widmet der Theorie der moralischen Hoffnung das X. Cap. der „Théorie anal.“. Beide Geometer haben an einer Reihe charakteristischer Beispiele gezeigt, dafs die Hypothese zu Resultaten führt, welche mit der gesunden Vernunft im Einklange stehen. Im wesentlichen ist die Darstellung, welche Laplace entwickelt, eine Wiedergabe des Bernoulli'schen „Specimen“ mit anderer Nomenclatur und eleganterem analytischen Apparat. Bernoulli giebt der Gleichung (α) die Form

$$y = l \cdot \frac{x}{a} \qquad (\alpha^*)$$

und nennt y „emolumentum“, a „summa bonorum“, $x - a$ „lucrum“; bei ihm hat also a die Bedeutung des ursprünglichen Vermögens der Person. Laplace gebraucht für x den Namen „fortune physique“ und nennt y „fortune morale, correspondante à la fortune physique x“; er bemerkt noch, x und y dürften niemals null oder negativ vorausgesetzt werden.

Hat nun eine Person, deren physisches Vermögen a ist, eine der Vermögensänderungen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$, die auch null oder negativ sein können, mit der respectiven Wahrscheinlichkeit $p, q, r, \cdots$ zu erwarten, wobei also vorausgesetzt ist, dafs $p + q + r + \cdots = 1$, so wird nach der Bernoulli-Laplace'schen Theorie aus den moralischen

Werten der eventuellen Vermögensstände $a+\alpha$, $a+\beta$, $a+\gamma,\cdots$ der Ausdruck

$$\begin{aligned}Y &= kpl\cdot(a+\alpha)+kql\cdot(a+\beta)+krl\cdot(a+\gamma)+\cdots\\ &\qquad +(p+q+r+\cdots)l\cdot h\\ &= kpl\cdot(a+\alpha)+kql\cdot(a+\beta)+krl\cdot(a+\gamma)+\cdots+l\cdot h\end{aligned}$$

gebildet; Bernoulli bezeichnet ihn als „emolumentum medium", Laplace als „fortune morale de l'individu, en vertu de son expectative". Zu diesem moralischen Vermögen läfst sich ein physisches Vermögen X denken, das ihm an moralischem Werte gleichkommt; dieser Gedanke führt zu der Gleichung

$$kl\cdot X+l\cdot h=kpl\cdot(a+\alpha)+kql\cdot(a+\beta)+krl\cdot(a+\gamma)+\cdots+l\cdot h,$$

aus welcher sich

$$X=(a+\alpha)^p(a+\beta)^q(a+\gamma)^r\cdots$$

ergiebt; dem ursprünglichen Vermögen gegenüber bedeutet dies eine Änderung um

$$X-a=(a+\alpha)^p(a+\beta)^q(a+\gamma)^r\cdots-a. \qquad (\beta)$$

Diesen Wert erklärt Bernoulli für das „lucrum legitime expectandum seu sors quaesita"; Laplace umschreibt seine Bedeutung mit den Worten „l'accroissement de la fortune physique qui procurerait à l'individu le même avantage moral qui résulte pour lui de son expectative"; da er begrifflich der mathematischen Hoffnung entspricht und ihr bei sehr kleinen absoluten Werten der Verhältnisse $\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{a}, \frac{\gamma}{a}, \cdots$ auch annähernd gleichkommt, so ist für ihn auch vielfach der Name „moralische Hoffnung" gebraucht worden (s. Meyer[1]).

Bei den Anwendungen des Princips der moralischen Hoffnung, welche Laplace vorführt, macht er zumeist von dem höheren Calcul Gebrauch; die meisten dieser Resultate sind von Crofton[4]) auf elementarem Wege, insbesondere mit Hilfe des Satzes abgeleitet worden, dafs das geometrische Mittel einer beliebigen Anzahl von Gröfsen kleiner ist als ihr arithmetisches Mittel.

Die neueren französischen Autoren wenden der Theorie der moralischen Hoffnung nur geringe Aufmerksamkeit zu. Poincaré[1]) (p. 43) streift sie blofs mit wenigen Worten, und Bertrand[3]) (art. 52) bemerkt, nachdem er den Begriff der moralischen Bedeutung einer Vermögensänderung angegeben, nie sei von dieser Theorie praktischer Gebrauch gemacht worden und werde auch nie gemacht werden; aber dank der berühmten Gutheifsungen — eine Anspielung auf Laplace, Poisson u. a. — habe sie zum Ruhme Daniel Bernoulli's nicht weniger beigetragen als seine bewunderungswürdigen

physikalischen Arbeiten. Es ist richtig: zur Regelung von Wetten und kaufmännischen Unternehmungen, die vom Zufall abhängen, ist die Theorie nie angewendet worden und ist dazu auch nicht geeignet; hierzu wird immer nur die mathematische Erwartung verwendet werden. Aber sie bietet doch ein bemerkenswertes Beispiel dafür, dafs aus einer Hypothese, die der Natur der Materie angepafst ist, auch annehmbare und mit der gesunden Vernunft harmonirende Consequenzen sich ergeben.

Es ist am Beginn dieses Artikels bemerkt worden, dafs die Bernoulli'sche Hypothese über den relativen Wert einer Geldsumme nur eine von den vielen möglichen sei. In der That sind auch andere, wenn auch im Wesen von ihr nicht abweichende Annahmen gemacht worden. Eine derselben, auf Buffon[1]) zurückführend, beurteilt die Wichtigkeit eines Gewinnes (oder Verlustes) α nach seinem Verhältnis zu dem durch ihn abgeänderten Vermögen; war also a das ursprüngliche Vermögen, so wird die relative Bedeutung von α als Gewinn durch

$$\frac{\alpha}{a+\alpha}, \qquad (\gamma)$$

und als Verlust durch

$$\frac{\alpha}{a-\alpha} \qquad (\gamma^*)$$

gemessen; dieser Ausdrücke hat sich Fries[1]) (§ 25) zuerst bedient. Etwas abweichend hiervon sind die Ansätze, welche Oettinger[2]) (§ 44) und Lacroix[1]) (p. 144) gemacht haben, statt (γ) und (γ^*) nehmen sie beziehungsweise

$$\frac{\alpha}{a+\alpha}, \qquad (\delta) \qquad\qquad \frac{\alpha}{a}. \qquad (\delta^*)$$

Beiden Annahmen liegt der Gedanke zu Grunde, dafs bei gegebenem Anfangsvermögen einer Summe α die gröfsere relative Bedeutung beizumessen sei, wenn sie einen Verlust bedeutet, als wenn sie einen Gewinn vorstellt. Dafs die Annahme (γ), (γ^*) zu denselben allgemeinen Ergebnissen führt wie die auf der Vorstellung der continuirlichen Vermögensänderung basirende Bernoulli'sche Hypothese, hat Czuber[1]) gezeigt; diese allgemeinen Ergebnisse sind aber das eigentliche Ziel der ganzen Theorie, und nicht ziffermäfsige Bestimmungen.

In einer kurzen Note hat Helm[1]) den Versuch gemacht, die moralische und die mathematische Beurteilung in Aussicht stehender Vermögensänderungen auf eine gemeinsame Basis zu stellen.

47. Nicolaus Bernoulli hatte in einem Briefe vom 9. September 1713 an Montmort[1]) (2. Aufl.) diesem zwei Aufgaben über Würfelspiele zur Lösung vorgelegt, deren Eigentümlichkeit darin liegt, dafs es sich um Spiele handelt, deren Dauer unbegrenzt ist,

so dafs die mathematische Erwartung, welche dem einen oder dem anderen Spieler aus dem Spiele erwächst, durch eine unendliche Reihe sich darstellt. Wenn diese Reihe convergent ist, wie das bei den gestellten Aufgaben zutrifft, dann bietet sich zunächst kein Anlafs, das Resultat zurückzuweisen.

Aus jenen Aufgaben ist aber eine andere hervorgegangen, welche auf eine divergente Reihe mit unendlicher Summe führt und daher von demjenigen, welcher das Spiel annimmt, einen unbeschränkt grofsen Einsatz fordert; vermöge dieses paradoxen Resultates — denn nach den Bedingungen des Spieles wird niemand auch nur einen erheblichen Betrag auf dasselbe wagen wollen — hat die Aufgabe seit ihrem ersten Erscheinen die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich gelenkt und zu zahlreichen Aufklärungsversuchen Anlafs gegeben. Sie hat Daniel Bernoulli[1]) — und er war der erste, welcher sie, und zwar in den Acten der Petersburger Akademie, der Behandlung unterzog — Veranlassung gegeben, seine Theorie von der moralischen Hoffnung aufzustellen; nach dieser Quelle erhielt die Aufgabe den Namen „Petersburger Problem“. Es handelt sich um folgendes Spiel: A wirft eine Münze hin, und trifft er Wappen, so giebt ihm B einen Ducaten; fällt Wappen erst im zweiten Wurf, so erhält A 2 Ducaten; erscheint es erst im dritten Wurf, so erhält A 4 Ducaten; und so bei jedem weiteren Wurf doppelt so viel. Welches ist die mathematische Erwartung und demgemäfs auch der rechtmäfsige Einsatz des A vor dem Spiele? Die übliche Regel giebt darauf die Antwort:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\cdot 2 + \frac{1}{2^3}\cdot 4 + \frac{1}{2^4}\cdot 8 + \cdots = \infty .$$

Man hat verschiedene Versuche gemacht, den scheinbaren Widerspruch zwischen diesem Resultate eines so allgemein anerkannten mathematischen Princips und den Eingebungen des gemeinen Verstandes zu lösen; diese Versuche sind für die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie nicht ohne Bedeutung gewesen, da ja manche davon auf die Grundlagen dieser Theorie zurückgriffen und durch entsprechende „Correctur“ derselben ein befriedigendes Resultat herbeizuführen suchten; das Bestreben, aus der divergenten Reihe eine convergente zu machen, hat manche zu den verwegensten Annahmen verleitet.

Zu denjenigen, welche durch Abänderung der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitslehre den Widerspruch zu heben suchten, gehört D'Alembert, der wiederholt, in den „Opuscules“[3]) und in den „Doutes et questions“[6]), auf das Petersburger Problem zurückkam. Über den Unterschied, den er zwischen „metaphysisch“ möglich und „physisch“ möglich macht, ist schon in Art. 8 berichtet worden; er bestreitet auch die physisch gleiche Möglichkeit von Combina-

tionen, welche aus einfachen Ereignissen in gleicher Weise (der Anzahl der Wiederholungen nach) zusammengesetzt sind, und schreibt denjenigen unter ihnen, welche einen gewissen Plan, ein Gesetz erkennen lassen, kurz als „aufsergewöhnliche Ereignisse“ sich documentiren, eine geringere Möglichkeit zu, im Vergleich zu den unregelmäfsigen Ereignissen. Daraus zieht er den Schlufs, einer oftmaligen Wiederholung von Schrift komme eine noch weit kleinere Wahrscheinlichkeit zu, als die Rechnung sie angiebt. Aus solchen Erwägungen mögen die willkürlichen Annahmen hervorgegangen sein, welche D'Alembert in dem ersten der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewidmeten Aufsatze im IV. Bande der „Opuscules“ macht und die nur aus dem Bestreben hervorgegangen sind, eine convergente Reihe zu erzielen. Für die Wahrscheinlichkeit, dafs Wappen erst im n-ten Wurf erscheine, macht er nacheinander die Ansätze

$$\frac{1}{2^n(1+\beta n^2)}, \qquad \frac{1}{2^{n+\alpha n}}, \qquad \frac{1}{2^n\left\{1+\frac{B}{(K-n)^{\frac{q}{2}}}\right\}};$$

darin sollen β, α, B, K Constanten bedeuten und q eine ungerade ganze Zahl sein.

Auch Beguelin[2]) sucht in den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie Mängel nachzuweisen und durch Behebung derselben das Paradoxon zu lösen. Den Hauptangriffspunkt bietet ihm die von den anderen behauptete Unabhängigkeit der Einzelfälle, und er bestreitet sie; ein Ereignis, das mehreremal nacheinander eingetroffen, hat ebensoviele von den Rechten zu erscheinen, die es ursprünglich besafs, verloren, und seine Wahrscheinlichkeit, im nächsten Versuche wiederzukommen, ist um so geringer, je öfter es nacheinander erschienen ist. Wenn aus einer Urne mit einer weifsen und einer schwarzen Kugel in $z-1$ aufeinanderfolgenden Ziehungen ohne Abwechselung die weifse Kugel gehoben worden wäre, so bewertet Beguelin für die nächste Ziehung die Wahrscheinlichkeit für die weifse Kugel mit $\frac{1}{z+1}$, für die schwarze mit $\frac{z}{z+1}$; denn die erstere habe von den z Ansprüchen, die sie ursprünglich besafs, $z-1$ verloren und nur noch einen behalten, während die schwarze noch alle z Ansprüche bewahrt habe. Auf diesem Wege gelingt es ihm allerdings, für die mathematische Erwartung des A eine convergente Reihe zu erzielen.

Alle anderen Lösungsversuche lassen sich dahin charakterisiren, dafs sie entweder von den ausdrücklichen Bedingungen des Spieles abgehen oder den Boden der objectiven Auffassung verlassen.

Der historischen Entwickelung nach die erste und später am häufigsten wiedergegebene Lösung ist die, welche Daniel Bernoulli

selbst auf Grundlage seiner Theorie der moralischen Hoffnung entwickelt hat; Laplace[13]) (art. 42) hat sie mit eingehenderer mathematischer Darstellung wiederholt. Ohne Rücksicht auf den geleisteten Einsatz ist die moralische Hoffnung der Person A

$$(a+1)^{\frac{1}{2}}(a+2)^{\frac{1}{2^2}}(a+2^2)^{\frac{1}{2^3}}\cdots-a;$$

Bernoulli giebt als beiläufigen Wert dieses Ausdruckes $4\frac{1}{3}$ an, wenn $a=100$, und 6, wenn $a=1000$ ist; für den vernünftigerweise zu leistenden Einsatz x stellt er zunächst die richtige Gleichung

$$(a+1-x)^{\frac{1}{2}}(a+2-x)^{\frac{1}{2^2}}(a+2^2-x)^{\frac{1}{2^3}}\cdots=a$$

auf, setzt $a-x=a'$ und leitet aus der neuen Gleichung

$$(a'+1)^{\frac{1}{2}}(a'+2)^{\frac{1}{2^2}}(a'+2^2)^{\frac{1}{2^3}}\cdots-a'=x \qquad (\alpha)$$

mit der Bemerkung, dafs die vorangehende Untersuchung bei gröfserem a auf einen sehr geringen Unterschied zwischen a und a' hinweise, für x den Näherungswert

$$x=(a+1)^{\frac{1}{2}}(a+2)^{\frac{1}{2^2}}(a+2^2)^{\frac{1}{2^3}}\cdots-a \qquad (\alpha^*)$$

ab. Bei Laplace besteht zunächst der blofs formelle Unterschied, dafs er die Gewinne verdoppelt, also 2 bei dem ersten, 2^2 bei dem zweiten Wurf u. s. w. annimmt; die Gleichung (α) gestaltet er durch die Division mit a' in die folgende um:

$$1+\alpha x=(1+2\alpha)^{\frac{1}{2}}(1+2^2\alpha)^{\frac{1}{2^2}}(1+2^3\alpha)^{\frac{1}{2^3}}\cdots, \qquad (\beta)$$

wobei $\alpha=\frac{1}{a'}$. Zum Behufe der numerischen Auflösung dieser Gleichung nimmt er α als gegeben an, schreibt vor, man möge die Logarithmen so vieler Factoren der rechten Seite nehmen, auf dafs in dem nachfolgenden Factor $2^i\alpha$ mindestens den Wert 10 hat, und diese Logarithmen addiren; die Summe aller übrigen Logarithmen habe sehr angenähert den Wert

$$\frac{\log\alpha}{2^{i-1}}+\frac{(i+1)\log 2}{2^{i-1}}+\frac{0\cdot4342945}{\alpha 2^{2i-1}}.$$

Aus der Vereinigung beider Summen ergebe sich $\log(1+\alpha x)$, daraus $1+\alpha x$ und hieraus schliefslich x. So berechnet er aus $a'=100$

$$a=107\cdot89 \qquad x=7\cdot89,$$

aus $a' = 200$

$$a = 208{\cdot}78 \qquad x = 8{\cdot}78,$$

so dafs A, wenn sein Vermögen 107·89 Frcs. ausmacht, vernünftigerweise nur 7·89, und bei 208·78 Frcs. Vermögen nur 8·78 Frcs. auf das Spiel wagen sollte.

Im Anschluss an seine eigene Lösung teilt Daniel Bernoulli einen an seinen Vetter Nicolaus gerichteten Brief Cramer's mit, worin dieser zwei Lösungen des Paradoxons vorschlägt. Die eine geht davon aus, dass der Gebrauchswert einer Summe nicht proportional mit ihrer Gröfse wachse, vielmehr könne man alle Summen, die eine gewisse Höhe überschreiten, als praktisch gleichwertig ansehen; als Grenze wählt er 2^{24} (= 16 777 216 Thaler) und findet so als rechtmäfsigen Einsatz des A

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\cdot 2 + \frac{1}{2^3}\cdot 2^2 + \cdots + \frac{1}{2^{25}}\cdot 2^{24}\right) + \left(\frac{1}{2^{26}}2^{24} + \frac{1}{2^{27}}2^{24} + \cdots\right) = 13.$$

In dem zweiten Aufklärungsversuch schlägt er vor, das Vergnügen, das eine Geldsumme gewährt, nach der Quadratwurzel aus ihrem Betrag zu messen; so findet er als subjectiven Wert der Hoffnung

$$\frac{1}{2}\sqrt{1} + \frac{1}{2^2}\sqrt{2} + \frac{1}{2^3}\sqrt{4} + \cdots = \frac{1}{2-\sqrt{2}},$$

und dem entspricht der physische Betrag $\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2 = 2{\cdot}918\cdots$

Poisson[8]) (§ 25) sucht die Schwierigkeit durch Berücksichtigung der Umstände der Person B zu lösen; da diese nicht in der Lage ist, alle aus den Spielbedingungen eventuell erwachsenden Gewinne auszuzahlen; weil ihr Vermögen $b = 2^\beta(1 + h)$, $[0 < h < 1]$ dem eine Grenze setzt, so dürfe auch von A kein unbegrenzter Einsatz, sondern blofs der Betrag

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2^2}\cdot 2 + \frac{1}{2^3}\cdot 2^2 + \cdots + \frac{1}{2^{\beta+1}}\cdot 2^\beta\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{\beta+2}}\cdot b + \frac{1}{2^{\beta+3}}\cdot b + \cdots\right) = \frac{\beta+h}{2} + 1$$

verlangt werden, der selbst dann, wenn B ein Vermögen von 100 Millionen Thalern besitzen sollte, die Höhe von 28 Thalern nicht erreicht.

Unsere Anschauung von dem Petersburger Problem ist die folgende. Die Chancen eines auf unbeschränkte Dauer bemessenen Spieles durch einen Einsatz zu erkaufen hat an und für sich keinen Sinn, auch wenn sich für den Einsatz ein endlicher Betrag ergiebt. Nun ist immer darauf hingewiesen worden, dafs auch dann, wenn man bei Aufrechterhaltung der Gewinnstprogression die Zahl der

Würfe im voraus limitirt, der nach der Regel der mathematischen Hoffnung gerechnete Einsatz schon bei einer einigermafsen erheblichen Anzahl der vereinbarten Würfe zu grofs ausfällt, als dafs ihn jemand vernünftigerweise zahlen wollte, so dafs das Paradoxe auch dadurch nicht behoben sei. Darauf erwidern wir, dafs die Annahme eines Spieles trotz aller Rechnung immer auch von subjectiven Erwägungen abhängt. Man kann ein Spiel annehmen, um sich gegen einen mäfsigen Einsatz den Reiz der Hoffnung auf einen grofsen Gewinn zu erkaufen, und achtet dann nicht auf den eventuellen Verlust des Einsatzes. Man kann ferner auf ein Spiel, das viele verschiedene Chancen in Aussicht stellt, sich einlassen, weil mit erheblicher Wahrscheinlichkeit erwartet werden darf, dafs wenigstens der Einsatz hereingebracht werde; das übrigbleibende Risico des Einsatzverlustes nimmt man auf sich für das im Spiele gelegene Vergnügen. Man geht endlich auf ein Spiel ein, weil man mit Sicherheit erwartet, dafs sich in einer grofsen Anzahl von Wiederholungen desselben, die man auszuführen sich vornimmt, Gewinn und Verlust nahezu ausgleichen werden. In dem ersten der drei Fälle werden Erwägungen wahrscheinlichkeitstheoretischer Natur nur wenig zu Worte kommen; in den beiden anderen Fällen lassen sie aber unser Spiel entschieden nicht ratsam erscheinen. Angenommen, man hätte sich auf 100 Würfe geeinigt, dann wäre A zur Zahlung von 50 Thalern verpflichtet; seine Aussicht, wenigstens den Einsatz wieder hereinzubringen, wäre dieselbe wie: bei einer Lotterie von 2^{100} Nummern, wovon $\frac{63}{64}$ einen Gewinn unter 50 Thalern und nur $\frac{1}{64}$ einen Gewinn über dieser Summe bringen, mit einem Lose einen Gewinn aus der zweiten Kategorie zu machen; sie wäre also sehr gering. Daran zu denken, durch eine genügend oftmalige Wiederholung des Spieles eine Ausgleichung der günstigen und ungünstigen Fälle herbeizuführen, ist aber nicht nur bei 100, sondern auch schon bei einer viel geringeren Anzahl von Würfen völlig ausgeschlossen; denn um eine solche Ausgleichung bis auf eine geringe percentuelle Schwankung mit einer erheblichen Wahrscheinlichkeit erwarten zu dürfen, wäre eine so immense Zahl von Wiederholungen erforderlich, dafs die Dauer eines Menschenlebens dem gegenüber verschwindend klein ist (vgl. Czuber[4]).

In einer Note der „Compt. rend." behandelt Seydler[1]) ein Problem, das sich von dem Petersburger durch die Bedingung unterscheidet, dafs n Würfe, nicht mehr und nicht weniger, ausgeführt werden; das erstmalige Eintreffen von Wappen bestimmt den Gewinn. Er denkt sich das Spiel 2^n-mal wiederholt und stellt sich vor, dafs dabei alle in n Würfen möglichen Combinationen auch wirklich eintreten; berechnet auf Grund dieser Daten den Einsatz des A und findet ihn $= \frac{n(n+3)}{8}$; rechnet dann die wahrscheinliche

Anzahl der gewinnenden Partien, die sich mit $\frac{n+1}{2}$ ergiebt, und bestimmt daraus schliefslich den mittleren Einsatz $\frac{n(n+3)}{4(n+1)}$. Auch Seydler findet in der Bedingung, das Spiel solle beim erstmaligen Erscheinen von Wappen enden, den Grund der paradoxen Lösung, weil jene Bedingung die Wiederholung des Spieles ausschliefst und zu der Annahme eines unendlich grofsen n veranlafst; in der That giebt auch sein Resultat bei dieser Annahme einen unendlichen mittleren Einsatz.

48. Die Regelung von Einsatz und Gewinn oder Preis bei einem auf zufällige Ereignisse aufgebauten Unternehmen nach dem Princip der mathematischen Hoffnung gründet sich auf die Voraussetzung, dafs in einer grofsen Zahl gleichartiger Geschäfte der wirkliche Ablauf der Dinge derjenige sein werde, welchem a priori die gröfste Wahrscheinlichkeit zukam. Träfe diese Voraussetzung zu, so würden die von dem Unternehmer gezahlten Preise den von ihm erhobenen Einsätzen gerade das Gleichgewicht halten, er hätte aus dem Unternehmen weder einen Gewinn gezogen noch einen Verlust erlitten. Nun aber hat der wahrscheinlichste Fall an sich eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit; die Wirklichkeit wird von ihm mehr oder weniger nach der einen oder der anderen Seite abweichen; dies bedeutet für den Unternehmer entweder einen Gewinn aus einem Übermafs der gezahlten Einsätze oder einen Verlust aus einem Übermafs ausgezahlter Preise. Ob das eine oder das andere und in welchem Ausmafse es eintritt, hängt wieder vom Zufall ab. Will sich der Unternehmer auch gegen die ungünstigsten Schwankungen, die der Zufall herbeiführen kann, nach Möglichkeit sichern, so ist er bemüfsigt, auf den nach dem Princip der mathematischen Hoffnung berechneten Einsatz einen Zuschlag zu erheben. Die Bestimmung desselben hängt wieder von wahrscheinlichkeitstheoretischen Erwägungen ab und hat zu Begriffen geführt, deren Ursprung wohl ins vorige Jahrhundert zurückreicht, die aber erst in neuerer Zeit weiter entwickelt und eingehender begründet worden sind.

Man kann jedes auf den Zufall gegründete Unternehmen auf folgende typische Form bringen: Auf eine Reihe einander ausschliefsender Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten

$$p_1, p_2, \cdots, p_n \qquad \left(\sum_1^n p_\lambda = 1\right)$$

sind, setzt der Unternehmer Preise

$$A_1, A_2, \cdots A_n$$

aus, während der Spieler auf diese Ereignisse die Einsätze

$$E_1, \; E_2, \cdots E_n$$

leistet. Die mathematischen Hoffnungen für den Spieler und den Unternehmer sind dann beziehungsweise

$$A = \sum^{\lambda} p_\lambda A_\lambda, \qquad E = \sum^{\lambda} p_\lambda E_\lambda, \tag{α}$$

und bei einem nach dem Grundsatze der Billigkeit geregelten Unternehmen wäre $A = E$; ist dagegen $A > E$, so befindet sich der Spieler, und bei $A < E$ der Unternehmer „im Vorteil“.

Die Differenz $A_\lambda - E_\lambda = x_\lambda$ bedeutet für den Spieler den im Falle (λ) erzielten reinen Gewinn oder reinen Verlust, jenachdem sie positiv oder negativ ist; die umgekehrte Differenz $E_\lambda - A_\lambda = -x_\lambda$ hat die analoge Bedeutung für den Unternehmer; demnach ist

$$x = \sum^{\lambda} p_\lambda x_\lambda = A - E$$

die totale Reingewinnhoffnung für den Spieler und

$$-x = \sum^{\lambda} p_\lambda (-x_\lambda) = E - A$$

dieselbe Gröſse für den Unternehmer; beide verschwinden für ein billig geordnetes Spiel, so daſs in solchem Falle

$$\sum^{\lambda} p_\lambda x_\lambda = 0$$

ist. Trennt man in der linksstehenden Summe die positiven Glieder von den negativen, schreibt also

$$\sum^{\pi} p_\pi x_\pi + \sum^{\nu} p_\nu x_\nu = 0 \qquad (x_\pi > 0, \quad x_\nu < 0),$$

so ist

$$\sum^{\pi} p_\pi x_\pi = -\sum^{\nu} p_\nu x_\nu = \tfrac{1}{2} \sum^{\lambda} p_\lambda |x_\lambda| = D. \tag{β}$$

Hausdorff[1]), dem wir diese Darstellung entnehmen, nennt die Gröſse D, d. i. den halben wahrscheinlichen Wert der absoluten Beträge der aus dem Unternehmen zu erwartenden Gewinne und Verluste das durchschnittliche Risico dieses Unternehmens; Wittstein[4]) belegt sie, je nach der Darstellung, mit verschiedenen Namen: $D = \sum^{\pi} p_\pi x_\pi$ heiſst bei ihm das mathematische Risico des Unternehmers, $D = -\sum^{\nu} p_\nu x_\nu$ das mathematische Risico des Spielers. Diese Namengebung entspringt der doppelten praktischen Deutung, welche man dem D geben kann; in der einen Darstellung drückt es die Prämie aus, durch welche sich der Unternehmer, in der anderen die Prämie, durch welche sich der Spieler gegen die ihm drohenden Spielverluste bei einer dritten Person ver-

sichern könnte. Bezieht man D blofs auf den Spieler, so stellt $D = \sum p_n x_n$ den Preis vor, für welchen er seine Gewinnhoffnungen verkaufen, und bedeutet $D = -\sum p_\nu x_\nu$ die Prämie, durch welche er sich gegen die eventuellen Spielverluste versichern könnte.

Das durchschnittliche Risico ist eine das Unternehmen charakterisirende Gröfse insofern, als man zwei Unternehmen, die beide nach dem Princip der Billigkeit geordnet sein mögen, auf Grund ihrer durchschnittlichen Risicos auf ihre Gefährlichkeit mit einander vergleichen kann. Es ist aber nicht die einzige hierzu geeignete Gröfse; vorteilhafter, weil durch eine allgemeine Formel darstellbar und der Notwendigkeit der Scheidung der x_λ in positive und negative überhebend, ist der durchschnittliche Wert der Quadrate der x_λ, also

$$M^2 = \sum^\lambda p_\lambda x_\lambda^2; \qquad (\gamma)$$

M wird das mittlere Risico des Unternehmens genannt.

Sind die reinen Gewinne und Verluste x_λ in sehr grofser Anzahl vorhanden und ihre Wahrscheinlichkeiten nach sehr kleinen Intervallen abgestuft, so dafs man von einem Gesetz der Reingewinne in ähnlichem Sinne sprechen kann wie von einem Fehlergesetz, und kommt diesem Gesetz überdies die Eigenschaft $\varphi(-x) = \varphi(x)$ zu, so ergeben sich für D und M^2 die analytischen Ausdrücke

$$D = \int_0^\infty x\varphi(x)\,dx, \qquad M^2 = \int_{-\infty}^\infty x^2\varphi(x)\,dx. \qquad (\delta)$$

Angenommen, der Unternehmer setze auf das Eintreffen eines Ereignisses, dem die Wahrscheinlichkeit p zukommt, den Preis A, und es stehe ihm eine Gesellschaft von s Spielern gegenüber, deren jeder den Einsatz

$$E = pA$$

leistet. Nach der wahrscheinlichsten Combination käme der Preis ps-mal zur Auszahlung, und dies wäre durch die Einzahlungen $sE = psA$ gerade aufgehoben. Trifft das Ereignis, auf welches der Preis gesetzt ist, $(ps + z)$-mal ein, so resultirt daraus für die Gesellschaft der Spieler ein Reingewinn

$$x = (ps + z)A - sE = Az,$$

und die Wahrscheinlichkeit hierfür ist, wenn s eine sehr grofse Zahl vorstellt, proportional (s. Art. 33)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}\, e^{-\frac{z^2}{2pqs}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}\, e^{-\frac{x^2}{2pqsA^2}};$$

demnach ist

$$\varphi(x)\,dx = \frac{1}{A\sqrt{2\pi spq}}\, e^{-\frac{x^2}{2pqsA^2}}\,dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2x^2}\,dx,$$

wenn zur Abkürzung

$$h = \frac{1}{A\sqrt{2pqs}}$$

gesetzt wird. Daraus ergiebt sich das durchschnittliche und mittlere Risico, nämlich

$$D = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{1}{2h\sqrt{\pi}} = A\sqrt{\frac{pqs}{2\pi}},$$

$$M^2 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^2 e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{1}{2h^2} = pqsA^2,$$

woraus

$$M = \frac{1}{h\sqrt{2}} = A\sqrt{pqs}.$$

Wie man sieht, besteht zwischen D und M ein von den Spielumständen unabhängiges Verhältnis, und es ist daher M ebensogut geeignet das Spiel oder Unternehmen auf die damit verbundene Gefahr zu charakterisiren wie D. Wittstein[4]) (p. 43) erblickt in dem Quotienten $\frac{D}{sE} = \frac{D}{psA}$ den auf einen Spieler in Einheiten seines Einsatzes entfallenden Zuschlag, also die relative Risicoprämie, durch welche er sich bei dem Unternehmer gegen etwaige Verluste versichern kann. Dieser Auffassung tritt Hausdorff[1]) (p. 516) mit Recht entgegen, indem er darauf hinweist, dafs der Unternehmer, wenn er diese Versicherung der Spielgesellschaft gegen Verluste übernimmt, damit ein neues auf den Zufall sich stützendes Unternehmen eingeht, aus dem ihm ein neues Risico erwächst, für das ihn die Spielgesellschaft neuerdings entschädigen müfste, und dafs sich dies so fortsetzte, wenn auch, wie er zeigt, die successiven Risicos immer kleiner und kleiner würden. Er deutet einen Weg an, wie man durch einen passend gewählten Zuschlag sich gegen diese Kette der Risicos sichern könnte. Die Wahrscheinlichkeit, dafs der Gewinn, respective Verlust zwischen den Grenzen $-x$ und $+x$ enthalten sein werde, ist bei dem oben behandelten Fall

$$w_x = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hx} e^{-t^2}\,dt = \Phi(hx),$$

wenn man den aus den bekannten Tafeln zu entnehmenden Wert von $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t e^{-t^2}\,dt$ mit $\Phi(t)$ bezeichnet. Führt man hierin das durchschnittliche und das mittlere Risico ein, so ist auch

$$w_x = \Phi\left(\frac{x}{2D\sqrt{\pi}}\right) = \Phi\left(\frac{x}{M\sqrt{2}}\right);$$

daraus ergiebt sich beispielsweise folgende Zusammenstellung zusammengehöriger Werte:

$$w_x = 0{\cdot}5000,\quad 0{\cdot}9000,\quad 0{\cdot}9900,$$

$$\frac{x}{D} = 1{\cdot}6907,\quad 4{\cdot}1230,\quad 6{\cdot}4567,$$

$$\frac{x}{M} = 0{\cdot}6745,\quad 1{\cdot}6449,\quad 2{\cdot}5758.$$

Nicht das durchschnittliche Risico, sondern ein entsprechendes Vielfaches davon oder von M wird der Unternehmer auf die Spielgesellschaft verteilen und dasselbe so wählen, daſs eine nach seiner Empfindung genügend groſse Wahrscheinlichkeit dafür bestehe, der eventuell eintretende Verlust werde den so eingehobenen Betrag nicht übersteigen; begnügt er sich mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$, dann hat er das 4·1-fache D oder das 1·6-fache M auf die Spielgesellschaft umzulegen.

Hausdorff hat in der citirten Abhandlung auf die Analogien zwischen der Theorie des Risico und der Fehlertheorie hingewiesen und sie auch weiter ausgeführt.*)

Fünfter Abschnitt.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Zeugenaussagen und auf Entscheidungen von Gerichtshöfen.

49. Zu den am meisten umstrittenen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie gehören diejenigen, bei welchen das Erkenntnisvermögen und der Wille des Menschen ins Spiel kommen. Wenn über einen Thatbestand, der nicht gewiſs ist, dessen Realisirungs-

*) Vor Abschluſs dieser Arbeit ist eine Schrift von K. Wagner[1]) erschienen, welche die Geschichte der Entwickelung des Risicoproblems ausführlich darstellt.

bedingungen wir kennen oder auch nicht kennen, von einer Person eine Aussage oder ein Urteil abgegeben worden ist, so hängt unser Vertrauen in die Annahme, dafs der Thatbestand der Aussage gemäfs sich eingestellt habe, nicht allein von seinen Verwirklichungsbedingungen, sondern auch von dem Erkenntnisvermögen und unter Umständen auch von den moralischen Eigenschaften der Person ab, von welcher die Aussage stammt. Es entsteht die Frage, ob es möglich sei, für das erwähnte Vertrauen oder für die Erwartung, dafs der Thatbestand mit der Aussage oder dem darüber abgegebenen Urteile sich decke, ein bestimmtes Mafs in Form einer Wahrscheinlichkeit aufzustellen.

Die Unvollkommenheiten des menschlichen Erkenntnisvermögens bedingen eine Unsicherheit in der Constatirung von Thatsachen. Das Mafs dieser Unsicherheit wechselt bei ein und derselben Person mit der Materie, um deren Beurteilung es sich handelt, aber auch mit der Zeit; häufiges Urteilen über ähnliche Materien bringt Übung und erhöht die Sicherheit, mit dem Alter abnehmendes Erkenntnisvermögen vermindert sie. Die apriorische Bestimmung eines Sicherheitscoefficienten, einer Wahrscheinlichkeit, dafs eine bestimmte Person einen Thatbestand, den sie wahrnimmt oder der ihrem Urteile unterbreitet wird, richtig feststelle, ist hiernach völlig ausgeschlossen. Es bliebe noch der Weg der Erfahrung; er würde voraussetzen, dafs man die betreffende Person einer beträchtlichen Anzahl möglichst gleichartiger Fälle gegenüberstellte und durch eine vor dem Irrtum gefeite Intelligenz constatiren liefse, in wie vielen Fällen die Aussage der Person dem wirklichen Thatbestande entsprach und in wie vielen eine Discrepanz zwischen beiden stattgefunden hat; es ist selbstverständlich, dafs diese Controle ohne Wissen der aussagenden Person geschehen müfste. Auch diese Voraussetzungen sind so gut wie unerfüllbar; thatsächlich existirt auch keine beglaubigte Versuchsreihe, welche zu einem solchen Zwecke unternommen worden wäre.

Was aber von den unbewufsten Irrungen einer Person gesagt worden ist, gilt wohl noch mehr von den bewufsten, beabsichtigten Irreführungen. Die Motive, welche zu solchen veranlassen, hängen so sehr von den Umständen des einzelnen Falles ab, dafs sich kaum ein bestimmter Sinn damit verbinden läfst, wenn von der Wahrscheinlichkeit einer falschen, d. h. der Wahrnehmung widersprechenden Aussage bei einer Person schlechtweg die Rede ist; es wäre auch schwer einen Weg anzugeben, auf welchem man zu einem Mafse für diese moralische Qualität eines Individuums gelangen könnte.

Durch diese Erwägungen ist der Standpunkt bezeichnet, von welchem aus die Untersuchungen über die aus Zeugenaussagen geschöpfte Wahrscheinlichkeit von Thatbeständen zu beurteilen ist. Diese Untersuchungen, von gewissen der Wirklichkeit niemals völlig entsprechenden Annahmen ausgehend, sind nichts anderes als Sche-

nach, dazu bestimmt, für gewisse Urteile, zu welchen die gesunde Vernunft von selbst führt, eine mathematische Begründung zu geben; in diesem Falle können sie auch dazu dienen, Fragen allgemeiner Natur an ihrer Hand zu erledigen; niemals aber sind sie in ernsthafter Weise zur Gewinnung numerischer Wahrscheinlichkeiten verwendet worden und werden auch künftighin in diesem Sinne keine Verwendung finden. Der Stand der Dinge, wie ihn Condorcet, einer unter den ersten auf dem in Rede stehenden Anwendungsgebiete, in seinem „Essai"[6] gekennzeichnet, ist bis zum heutigen Tage derselbe geblieben und wird auch fernerhin derselbe bleiben; wo er daranging, seine theoretischen Entwickelungen an Beispielen zu erläutern, bemerkte nämlich Condorcet, daß es leider unmöglich sei, den Rechnungen reelle Daten zugrundezulegen; daß die Schwierigkeiten, solche Zahlen zu gewinnen — Schwierigkeiten, die der einzelne nicht zu besiegen vermöge — ihn zwingen, mit fingierten Zahlen zu rechnen und so nur den Gang der Rechnung zu zeigen, der einzuschlagen wäre, wenn man reelle Zahlen sich verschafft hätte. Aus den letzten Worten muß man freilich schließen, daß Condorcet die Möglichkeit der Gewinnung solcher Zahlen zugab.

50. Die Beurteilung der Glaubwürdigkeit oder der Wahrscheinlichkeit von Thatbeständen auf Grund von Zeugenaussagen hat schon zu einer frühen Zeit das Interesse der Theoretiker wachgerufen. Die erste diesen Gegenstand betreffende Publikation dürfte der im XXI. Bande der Philos. Transact. für das Jahr 1699 anonym erschienene Essai „A Calculation of the Credibility of Human Testimony" sein, als dessen Verfasser Craig vermutet wird (s. Todhunter[1], art. 91). Der darin eingenommene Standpunkt, der dann auch in die französische „Encyclopédie" und in Bicquilley's[2] die Elementarisirung der Wahrscheinlichkeitstheorie bezweckendes Buch übergegangen ist, entspricht der Vorstellung, die Zeugenaussage liege noch nicht vor: es wird nämlich die Wahrscheinlichkeit eines Thatbestandes, der durch n successive Zeugenaussagen vermittelt worden ist, mit $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$ bewertet, wenn $p_1, p_2, \cdots p_n$ die Glaubwürdigkeiten der aufeinanderfolgenden Zeugen bedeuten; in Wirklichkeit aber ist jenes Product die a priori bestimmte Wahrscheinlichkeit, daß alle Zeugen wahr aussagen.

Den richtigen Standpunkt, der hier eingenommen werden muſs, hat Condorcet[3, 5] bezeichnet: die vorliegenden Zeugenaussagen sind als ein Erfahrungsmaterial aufzufassen, das verschiedene Hypothesen aufzustellen und deren Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen gestattet, vorausgesetzt, daſs die apriorische Wahrscheinlichkeit des bezeugten Thatbestandes und die Glaubwürdigkeit der aussagenden Zeugen bekannt sind; die Totalwahrscheinlichkeiten jener Hypothesen, welche den Thatbestand zur Folge haben, ist auch die Wahrscheinlichkeit, die man ihm auf Grund der Zeugnisse zuzuschreiben hat.

In völlig klarer Weise ist dieser Gedankengang an einer mit grofsem Scharfsinn getroffenen Auswahl charakteristischer Probleme von Laplace zur Anwendung gebracht worden, der seiner „Théorie analytique“[13]) von der zweiten Auflage an ein Capitel unter dem Titel: „De la probabilité des témoignages“ anfügte.

In den ersten dieser Aufgaben charakterisirt Laplace den Zeugen durch zwei Zahlen: durch seine Wahrhaftigkeit oder durch die Wahrscheinlichkeit p, dafs er nicht zu betrügen suche, und durch die Wahrscheinlichkeit r, dafs er sich nicht selbst täusche. Für die Fälle, wo nur zwei contradictorische Aussagen möglich sind, construirt er aus jenen beiden eine Wahrscheinlichkeit q dafür, dafs der Zeuge die Wahrheit aussage, nämlich

$$q = pr + (1 - p)(1 - r),$$

entsprechend den beiden Arten, auf welche in einem solchen Falle eine der Wahrheit entsprechende Aussage zustandekommen kann; daraus ergiebt sich dann für die Wahrscheinlichkeit einer falschen Aussage der Ausdruck

$$1 - q = p(1 - r) + r(1 - p).$$

In dem ersten Problem sieht ein Zeuge, der durch die Zahlen p, r gekennzeichnet ist, dem Ziehen einer Kugel aus einer Urne zu, die n fortlaufend numerirte Kugeln enthält, und sagt aus, es sei eine bestimmte Nummer i erschienen; wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit dieses Thatbestandes auf Grund der Aussage?

Von den vier Hypothesen, welche in Bezug auf den Zeugen gemacht werden können und a priori die Wahrscheinlichkeit

$$pr; \quad p(1 - r); \quad (1 - p)r; \quad (1 - p)(1 - r)$$

haben, ist die erste mit dem Erscheinen der angesagten Nummer notwendig verbunden; die zweite und dritte schliefsen es aus, und es tritt hier die wirklich gezogene mit der (unbewufst oder aus Absicht) unter den $n - 1$ übrigen gewählten Nummer i in Combination; unter der vierten Hypothese sind zwei Fälle inbegriffen: entweder ist die Kugel i nicht gezogen und unter den $n - 2$ Kugeln, welche nach Ausscheidung der wirklich gezogenen und der irrtümlich vermeinten übrig bleiben, gewählt worden; oder sie ist erschienen, aber vom Zeugen deshalb angesagt worden, weil er sie unter den $n - 1$ Kugeln gewählt hat, welche nach Ausscheidung der irrtümlich vermeinten übrig bleiben; demnach sind die obigen Wahrscheinlichkeiten der Reihe nach mit

$$\frac{1}{n}; \quad \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}; \quad \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}; \quad \frac{n-2}{n(n-1)} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

zu multipliciren, um die Wahrscheinlichkeit des ausgesagten Ereignisses nach den vier Hypothesen zu erhalten. Daraus ergiebt sich nach

der Bayes'schen Regel die Wahrscheinlichkeit jener Hypothesen, welche mit dem Erscheinen der angesagten Nummer verbunden sind, und damit auch die Wahrscheinlichkeit dieses Erscheinens selbst

$$\frac{\frac{pr}{n}+\frac{(1-p)(1-r)}{n(n-1)}}{\frac{pr}{n}+\frac{p(1-r)}{n}+\frac{(1-p)r}{n}+\frac{(1-p)(1-r)}{n}}=pr+\frac{(1-p)(1-r)}{n-1}. \quad (\alpha)$$

Mit den Bemerkungen, welche Laplace hinzufügt, will er auf den Unterschied aufmerksam machen, welcher zwischen den einfachen Voraussetzungen des Problems und der Wirklichkeit besteht; so weist er darauf hin, dafs die Annahme, der irrende Zeuge könne mit der gezogenen Nummer jede andere gleich leicht verwechseln, wie auch die Annahme, dafs der betrügende Zeuge keinen Grund habe, eine Nummer eher anzugeben als eine andere, der Wirklichkeit kaum entsprechen dürfte; „es wäre jedoch sehr schwer, alle diese besonderen Umstände in der Formel zum Ausdruck zu bringen".

In dem zweiten Problem wird angenommen, dafs die Urne neben einer weifsen $n-1$ schwarze Kugeln enthalte und die Aussage des Zeugen dahin laute, es sei die weifse Kugel gezogen worden.

Von den vier Hypothesen haben jetzt die erste und vierte das angesagte Ereignis zur notwendigen Voraussetzung, die beiden anderen schliefsen es aus; die apriorischen Wahrscheinlichkeiten sind also im vorliegenden Falle der Reihe nach mit

$$\frac{1}{n};\quad \frac{n-1}{n};\quad \frac{n-1}{n};\quad \frac{1}{n}$$

zu multipliciren, und es ergiebt sich für das bezeugte Ereignis die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\frac{pr}{n}+\frac{(1-p)(1-r)}{n}}{\frac{pr}{n}+\frac{p(1-r)(n-1)}{n}+\frac{(1-p)r(n-1)}{n}+\frac{(1-p)(1-r)}{n}}$$

$$=\frac{pr+(1-p)(1-r)}{pr+(1-p)(1-r)+[p(1-r)+(1-p)r](n-1)}. \quad (\beta)$$

Mit Hilfe der oben eingeführten Gröfse q erhält man für die Wahrscheinlichkeit, dafs die bezeugte Thatsache falsch sei, den Ausdruck

$$\frac{(1-q)(n-1)}{q+(1-q)(n-1)}, \quad (\gamma)$$

der mit wachsendem n der Einheit als Grenze sich nähert. Daraus geht hervor, je unwahrscheinlicher das bezeugte Ereignis an sich ist, desto unglaubwürdiger ist die Aussage. Die Formel ist in etwas anderer Gestalt bereits von Condorcet[2]) gegeben worden, um an ihr zu zeigen, wie man sich Aussagen über „aufsergewöhnliche" Er-

eignisse gegenüber zu verhalten habe. Das Beispiel, mit welchem Todhunter[1]) (art. 735) ihre Unhaltbarkeit darthun will, entspricht gar nicht den Voraussetzungen des Falles und müfste nach der Formel (α) behandelt werden.

Das dritte Problem hat Laplace construirt, um die Vertrauenswürdigkeit zweier übereinstimmenden Zeugenaussagen über ein aufsergewöhnliches Ereignis zu prüfen. Von zwei Urnen enthält die eine n weifse, die andere n schwarze Kugeln; aus einer der Urnen ist eine Kugel gezogen, in die andere gelegt und schliefslich aus dieser eine Kugel gezogen worden; über beide Ziehungen liegen von einander unabhängige Zeugenaussagen vor, und beide lauten übereinstimmend dahin, dafs eine weifse Kugel erschienen sei.

Wenn die Wahrscheinlichkeit einer wahren Aussage bei dem ersten Zeugen q, bei dem zweiten q' ist, so kommt den vier möglichen Hypothesen die Wahrscheinlichkeit

$$qq'; \quad q(1-q'); \quad (1-q)q'; \quad (1-q)(1-q')$$

beziehungsweise zu; mit der ersten ist das bezeugte Ereignis notwendig verbunden, die anderen drei schliefsen es aus; das, was sich unter den durch diese Wahrscheinlichkeiten charakterisirten Hypothesen wirklich zutragen mufste, hat der Reihe nach die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{2(n+1)}; \quad \frac{n}{2(n+1)}; \quad \frac{n}{2(n+1)}; \quad \frac{1}{2(n+1)}.$$

Hiernach ist die Wahrscheinlichkeit der ersten Hypothese und damit auch die des bezeugten Thatbestandes gleich

$$\frac{qq'}{qq'+(1-q)(1-q')+[q(1-q')+(1-q)q']n}; \qquad (\delta)$$

sie nähert sich mit wachsendem n der Null als Grenze, sodafs die Glaubwürdigkeit des Complexes beider Aussagen um so geringer wird, je ungewöhnlicher, d. h. je unwahrscheinlicher das aus ihnen resultirende Ereignis ist.

In dem vierten Problem handelt es sich um übereinstimmende und widersprechende Aussagen zweier (und mehrerer) Zeugen über ein und denselben Thatbestand; es wird dabei die Möglichkeit einer Irrung ausgeschlossen und nur die Glaubwürdigkeit p der Zeugen in Rechnung gebracht.

Aus einer Urne mit n fortlaufend numerirten Kugeln wird eine gezogen, und zwei Zeugen von der Glaubwürdigkeit p, respective p' sagen übereinstimmend und unabhängig von einander die Nummer i an.

Die beiden allein möglichen Hypothesen sind durch die apriorischen Wahrscheinlichkeiten

$$pp'; \qquad (1-p)(1-p')$$

gekennzeichnet; die erste bedingt das bezeugte Ereignis, die zweite schliefst es aus; demnach hat das, was diese Aussagen hervorbrachte, die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{n}; \qquad \frac{n-1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n-1}\right)^2,$$

je nachdem man die erste oder zweite Hypothese zu Grunde legt. Daraus ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit der ersten, also auch die des bezeugten Ereignisses

$$\frac{pp'}{pp' + \frac{(1-p)(1-p')}{n-1}}, \tag{ε}$$

und sie nähert sich mit wachsendem n der Einheit, sodafs, je gröfser die Anzahl der Kugeln, um so wahrscheinlicher die angesagte Kugel wirklich erschienen ist.

Zeugen gleicher Glaubwürdigkeit und ein Ereignis vorausgesetzt, dessen Eintreffen a priori ebenso wahrscheinlich ist wie sein Nichteintreffen ($n = 2$), erhält man aus (ε)

$$\frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2}, \tag{ζ}$$

ein Resultat, das auf r Zeugen ausgedehnt

$$\frac{p^r}{p^r + (1-p)^r} \tag{η}$$

lautet und zeigt, dafs mit wachsender Zahl der Zeugen die Wahrscheinlichkeit zu Gunsten des bezeugten Ereignisses oder zu Gunsten des ihm entgegengesetzten wächst, je nachdem $p > \frac{1}{2}$ oder $p < \frac{1}{2}$ ist.

Sagen die beiden Zeugen verschiedene Nummern, i und i', an, so sind bezüglich dieser Aussagen drei Hypothesen möglich, denen die apriorischen Wahrscheinlichkeiten

$$p(1-p'); \quad (1-p)p'; \quad (1-p)(1-p')$$

zukommen; die Thatbestände, welche diesen Hypothesen entsprechen, haben der Reihe nach die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}; \quad \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}; \quad \frac{n-2}{n}\cdot\left(\frac{1}{n-1}\right)^2;$$

mit dem ersten allein ist das Ziehen der Nummer i (welche der Zeuge p angesagt) verbunden; die Wahrscheinlichkeit dafür ist zugleich die der ersten Hypothese, also

$$\frac{p(1-p')}{1 - pp' - \frac{(1-p)(1-p')}{n-1}}.$$

Hieraus läfst sich die an sich einleuchtende Thatsache folgern, dafs

zwei contradictorische Zeugnisse von gleich glaubwürdigen Zeugen über einen Thatbestand, der a priori die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ hat, sich aufheben; denn die Formel giebt für $n = 2$ und $p = p'$ den Wert $\frac{1}{2}$. Wenn also für einen solchen Thatbestand r, gegen ihn r' gleichwertige Zeugnisse vorliegen, so ist seine Wahrscheinlichkeit nach der Formel (η) zu rechnen, jedoch so, dafs r ersetzt wird durch $r - r'$ $(r > r')$; denn r' bestätigende Zeugnisse werden durch ebensoviele verneinende aufgehoben, verbleiben also $r - r'$ bestätigende Zeugnisse.

Das fünfte Problem befafst sich mit der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Thatbestandes, der durch eine Kette von r Zeugen, deren Glaubwürdigkeiten $p_1, p_2, \cdots p_r$ sein mögen, also, wie Laplace sich ausdrückt, durch Tradition überkommen ist. Um die verlangte Wahrscheinlichkeit y_r zu finden, nimmt er einen weiteren Zeugen von der Glaubwürdigkeit p_{r+1} hinzu, durch dessen denselben Thatbestand — Ziehen einer bestimmten Nummer aus einer Urne mit n fortlaufend numerirten Kugeln — bezeugende Aussage sich jene Wahrscheinlichkeit in y_{r+1} verwandelt; dieser Gedanke führt auf die endliche Differenzengleichung

$$y_{r+1} = p_{r+1}\, y_r + \frac{1}{n-1}(1 - p_{r+1})(1 - y_r),$$

weil das wirkliche Stattfinden des angesagten Ereignisses mit zweierlei Umständen vereinbar ist: dass der neue und der ihm vorausgehende letzte Zeuge der Kette wahr ausgesagt, oder dafs beide unwahr gesprochen und der letzte Zeuge unter den nicht erschienenen $n - 1$ Nummern gerade die angesagte gewählt hat. Die Integration der Gleichung giebt

$$y_r = \frac{1}{n} + C\,\frac{(np_1 - 1)(np_2 - 1)\cdots(np_r - 1)}{(n-1)^r},$$

und die Constante C ist so zu bestimmen, dafs nach der ersten Zeugenaussage $y_1 = p_1$ ist (wie sich aus der Formel (α) unter der Voraussetzung $r = 1$ ergiebt, welche Voraussetzung bedeutet, dafs ein Irren des Zeugen ausgeschlossen sei); demnach ist endgiltig

$$y_r = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\,\frac{(np_1 - 1)(np_2 - 1)\cdots(np_r - 1)}{(n-1)^r}. \qquad (\vartheta)$$

Dieses Resultat ist in mehrfacher Beziehung merkwürdig. Es convergirt mit wachsendem r gegen die Grenze $\frac{1}{n}$, und zwar geschieht dies unter der Voraussetzung, dafs alle $np_\lambda - 1 > 0$ $(\lambda = 1, 2, \cdots r)$, durch fortwährende Abnahme; dies stimmt zu der allgemeinen Vorstellung, dafs in dem Mafse, als die Kette der successiven Überlieferungen sich verlängert, die Wahrscheinlichkeit, das bezeugte Factum

habe wirklich stattgefunden, abnimmt. Dafs ferner unter der angeführten Voraussetzung, welche besagt, die Glaubwürdigkeit eines jeden der Zeugen sei gröfser als die apriorische Wahrscheinlichkeit des bezeugten Ereignisses, diese apriorische Wahrscheinlichkeit durch die Überlieferung eine Vermehrung erfährt, wird man gleichfalls mit der allgemeinen Vorstellung von der Sache vereinbar finden. Aber ein Umstand, auf welchen De Morgan[2]) (art. 184) hingewiesen hat, zeigt, dafs die hier entwickelte mathematische Auffassung der Tradition mit der üblichen sich nicht deckt. Ein einziger Zeuge, dessen Wahrhaftigkeit kleiner ist als $\frac{1}{n}$, als die Wahrscheinlichkeit des überlieferten Factums an sich, bewirkt eine Verminderung dieser letztgenannten Gröfse, und das gleiche gilt von jeder ungeraden Anzahl derart qualificirter Zeugen; eine gerade Anzahl solcher und noch so schlechter Zeugen würde aber immer eine Vermehrung der ursprünglichen Wahrscheinlichkeit zur Folge haben.

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, dafs nach der von Poisson[3]) (§ 39) gegebenen Darstellung dieses Problems die Lösung eine von (ϑ) verschiedene wird in dem Falle, dafs die Urne von jeder Nummer nicht eine, sondern eine gröfsere Anzahl von Kugeln enthält, sodafs die apriorische Wahrscheinlichkeit von einer Nummer zur anderen wechselt.

Das letzte Problem behandelt einen durch seine Bedingungen etwas fremdartigen und in die Wirklichkeit wohl schwer zu übersetzenden Fall; zwei Zeugen sagen entweder übereinstimmend aus, oder sie widersprechen einander doch nicht, in welchem Falle einer allein aussagt; zu der Wahrscheinlichkeit der wahren Aussage eines Zeugen kommt hier noch die Wahrscheinlichkeit, dafs er überhaupt aussage.

Crofton[4]) (art. 26, 37) hat die Bemerkung gemacht, dafs die Methoden, welche zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von Zeugenaussagen dienen, überall anzuwenden seien, wo für einen Thatbestand mehrere Wahrscheinlichkeiten vorliegen, die aus verschiedenen von einander unabhängigen Informationsquellen geschöpft worden sind. Er macht davon interessante Anwendungen auf das Schliefsen auf Krankheiten aus vorhandenen unabhängigen, d. h. in keinem nachweisbaren ursächlichen Zusammenhange stehenden Symptomen. Um nur ein Beispiel dieser Art anzuführen: Es sei a die apriorische Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Erkrankung überhaupt (d. h. mit Rücksicht auf die gesamte Bevölkerung); w die Wahrscheinlichkeit derselben Erkrankung bei dem Vorhandensein eines Symptoms A; w' die analoge Wahrscheinlichkeit in Bezug auf ein anderes, von jenem unabhängiges Symptom A'. Weist ein Individuum beide Symptome zugleich auf, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs es von der betreffenden Krankheit befallen sei, nach der Formel (ε) zu rechnen, und kommt daher gleich

$$\frac{(1-a)ww'}{(1-a)ww'+a(1-w)(1-w')}.$$

51. Mufste schon die Bedeutung der Untersuchungen über Zeugenaussagen auf ein sehr bescheidenes Mafs eingeschränkt werden, so kann von denjenigen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie, welche sich mit der Beurteilung der Entscheidungen beratender Versammlungen, von Gerichtshöfen, Wahlcollegien, kurz: mit Entscheidungen befassen, die durch Stimmenmehrheit erfolgen, gesagt werden, dafs sie der Kritik auf die Dauer nicht standzuhalten vermochten und heute nur mehr ein historisches Interesse in Anspruch nehmen können. Durch Condorcet[4]) mit einem umfangreichen, diesen Fragen hauptsächlich gewidmeten Werke inaugurirt, sind sie von Laplace[13]) in die „Théorie analytique" von deren zweiter Auflage an aufgenommen und dadurch zu Ansehen gebracht worden; noch einmal hat ein hervorragender französischer Mathematiker, Poisson[8]), dieses merkwürdige Anwendungsgebiet zum Gegenstande eingehender Untersuchung gemacht und in einem Werke dargestellt, das vom mathematischen Standpunkte immer bemerkenswert bleiben wird. Die spätere Litteratur, von einer Arbeit Guibert's[1]) abgesehen, hat sich vornehmlich mit der Reproduction und mit der kritischen Beleuchtung einzelner Fragen aus den vorgenannten Schriften beschäftigt.

In den Jahren 1835 und 1836, als Poisson[3])[4])[5]) der Pariser Akademie wiederholt Resultate aus den damals im Entstehen begriffenen „Recherches"[8]) mitteilte, entwickelte sich im Schofse der Akademie eine lebhafte Discussion darüber, ob die Wahrscheinlichkeitsrechnung auch auf Gegenstände anwendbar sei, welche dem Einflusse der moralischen Qualitäten des Menschen unterworfen sind. Poinsot bestritt die Zulässigkeit solcher Anwendungen, bezeichnete dieselben als „une sorte d'aberration de l'esprit", als eine falsche Anwendung der Wissenschaft, die diese nur discreditiren könne; nach seiner Auffassung sei die Wahrscheinlichkeitsrechnung nur dort zulässig, wo eine Unterscheidung und Zählung der Fälle möglich ist. Auch Dupin und Navier beteiligten sich an der Controverse, ersterer im Sinne Poinsot's, letzterer die Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie verteidigend.

In noch schärferer Weise wandte sich später J. St. Mill[1]) (II, p. 65—66) gegen die von Condorcet begonnenen Untersuchungen und kennzeichnet sie als „eine verkehrte Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche der Mathematik zur wahren Schande gereiche".

In jüngster Zeit haben v. Kries[1]) und Bertrand[3]) an den in Rede stehenden Arbeiten sachliche Kritik geübt; nach unserem Dafürhalten hat der erstere mit seinen Ausführungen (p. 253—259), die sich auf einen besonderen Fall, auf die Verdicte der Geschwornen beziehen, das Wesen der Sache am treffendsten blofsgelegt.

Es wird sich empfehlen, die wesentlichen Punkte, gegen welche die Kritik sich gewendet hat, im Zusammenhange mit der mathematischen Darstellung einiger charakteristischen Fragen hervorzuheben.

Condorcet kennzeichnet jede der Personen, welchen eine Frage zur Entscheidung vorgelegt wird, durch die „Wahrscheinlichkeit v, daſs sie richtig entscheide", und durch die complementäre „Wahrscheinlichkeit e, daſs sie falsch entscheide"; $v + e$ ist hiernach $= 1$; die gewählten Buchstaben sollen an die Worte „vérité" und „erreur" erinnern. Für die Wahrscheinlichkeit, daſs sich bei $2q + 1$ Stimmenden ganz gleicher Qualität für die richtige Entscheidung die Majorität ergeben werde, hat er den Ausdruck

$$\varphi(q) = v^{2q+1} + \binom{2q+1}{1} v^{2q} e + \binom{2q+1}{2} v^{2q-1} e^2 + \cdots + \binom{2q+1}{q} v^{q+1} e^q,$$

dem er durch eine bemerkenswerte Transformation die für seine Zwecke besser geeignete Form

$$v + (v - e)\left\{ve + \frac{3}{1} v^2 e^2 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} v^3 e^3 + \cdots + \frac{(2q-1)!}{q!(q-1)!} v^q e^q\right\}$$

erteilt; der Rest der Binomialentwicklung, d. i.

$$\psi(q) = e^{2q+1} + \binom{2q+1}{1} e^{2q} v + \binom{2q+1}{2} e^{2q-1} v^2 + \cdots + \binom{2q+1}{q} e^{q+1} v^q,$$

bedeutet die Wahrscheinlichkeit einer Majorität zu Gunsten einer falschen Entscheidung. Wie man sieht, wird die Stimmenabgabe für oder gegen die vorgelegte Frage dem Urnenschema subsumirt: sie wird so aufgefaſst, als ob jeder der Stimmenden aus einer Urne, welche weiſse und schwarze Kugeln im Verhältnis $v:e$ enthält, einmal ziehen würde; das Treffen einer weiſsen Kugel entspricht der richtigen Entscheidung, das Treffen einer schwarzen der falschen Entscheidung. Gegen diese Parallelstellung hat sich die Kritik mit Recht gewendet und treffende Einwürfe beigebracht.

Gegen die weiteren Schlüsse, welche nun Condorcet macht, ist gewiſs nichts einzuwenden. Die obigen Wahrscheinlichkeiten beziehen sich auf eine erst vorzunehmende Abstimmung. Hat eine solche aber bereits stattgefunden und eine Majorität m gegen eine Minorität n ergeben, so ist

$$\frac{v^m e^n}{v^m e^n + e^m v^n}$$

die Wahrscheinlichkeit, daſs die durch die Majorität getroffene Entscheidung richtig, und

$$\frac{e^m v^n}{v^m e^n + e^m v^n}$$

die Wahrscheinlichkeit, dafs sie falsch sei. Sind $2q+1$ Stimmende, und ist $2q'+1$ die für eine giltige Entscheidung notwendige (kleinste) Majorität, so sind

$$\varphi(q) = v^{2q+1} + \binom{2q+1}{1} v^{2q} e + \cdots + \binom{2q+1}{q-q'} v^{q+q'+1} e^{q-q'},$$

$$\psi(q) = e^{2q+1} + \binom{2q+1}{1} e^{2q} v + \cdots + \binom{2q+1}{q-q'} e^{q+q'+1} v^{q-q'}$$

die Wahrscheinlichkeiten, dafs bei einer bevorstehenden Abstimmung eine richtige, beziehungsweise eine falsche Entscheidung zustandekommen werde; weifs man aber, dafs eine giltige Abstimmung stattgefunden hat, ohne das Stimmenverhältnis für und wider zu kennen, dann ist

$$\frac{\varphi(q)}{\varphi(q)+\psi(q)}, \quad \frac{\psi(q)}{\varphi(q)+\psi(q)}$$

die Wahrscheinlichkeit einer richtigen, respective einer falschen Entscheidung.

Die einzige Gröfse, welche nach Condorcet's Auffassung zur numerischen Ausführung der Formeln nötig wäre, die, wenn es sich um richterliche Entscheidungen handelt, im Sinne seiner Darstellung für alle Richter, alle Gerichtshöfe, alle der Rechtsprechung unterzogenen Materien denselben Wert hätte, ist v. Wie er sie versteht, ist es aber eine der Bestimmung vollkommen unzugängliche Gröfse; denn ob ein Richterspruch der Thatsache, um deren willen er hervorgerufen wurde, wirklich entspricht oder nicht, kann niemals festgestellt werden. Das von Condorcet zur Erzielung eines Wertes von v vorgeschlagene Verfahren, dessen Undurchführbarkeit er selbst fühlt, ist gar nicht discutabel. Er meint, man sollte durch einen genügend zahlreichen, aus wahrhaft erleuchteten Männern zusammengesetzten, also gewissermafsen unfehlbaren Gerichtshof eine grofse Anzahl bereits judicirter Fälle überprüfen lassen, um so das Verhältnis der falschen Entscheidungen zur Gesamtzahl zu erfahren; mit Hilfe dieses Erfahrungsdatums liefse sich dann die einzige Unbekannte v berechnen.

Den Wert von v als bekannt vorausgesetzt, kann die Frage aufgeworfen werden: welche Wahrscheinlichkeit einer falschen Entscheidung ist als klein genug anzusehen, um über sie hinweggehen zu dürfen? Von ihrer Beantwortung und dem Werte von v würde die eminent praktische Frage abhängen, welche Bedingungen an eine giltige Entscheidung zu stellen seien. Condorcet beruft sich zunächst auf eine Angabe Buffon's[1]), wonach von 10 000 Personen eine im Laufe eines Tages stirbt; da niemand in dieser Wahrschein-

lichkeit eine Gefahr für seine eigene Person erblicke, könnte $\frac{1}{10000}$ als das Mafs eines Risicos angesehen werden, das man in Ansehung seiner selbst zu vernachlässigen gewillt ist. Condorcet begnügt sich nicht mit dieser Sicherheit; erst der Unterschied zwischen der Wahrscheinlichkeit eines 47-jährigen und der eines 37-jährigen, innerhalb einer Woche eines plötzlichen Todes zu sterben, den er auf Grund von Sterblichkeitstafeln gleich $\frac{1}{52 \cdot 480} - \frac{1}{52 \cdot 580} = \frac{1}{144\,768}$ findet, ist ihm klein genug, um ihn praktisch als Null betrachten zu können.

Es mufs darauf hingewiesen werden, dafs hier Dinge zum Gegenstande der Berechnung gemacht werden, die einer rein mathematischen Erledigung überhaupt nicht fähig sind. In zutreffender Art hat De Morgan[2]) (art. 175—176) das bescheidene Arbeitsfeld abgesteckt, das der Mathematik als solcher auf diesem Gebiet zufällt, und deutlich diejenigen Fragen ausgeschieden, deren Beantwortung immer nur Sache der Empfindung oder des Übereinkommens bleiben wird. Er wählt als Beispiel die englischen Schwurgerichte, bei welchen zu einem giltigen Urteilsspruch Einstimmigkeit der zwölf Geschwornen gefordert wird. Da man weifs, dafs die Entscheidungen nicht mit voller Sicherheit erfolgen, so möge „angenommen“ werden, dafs es für den Schutz der Gesellschaft vor den Folgen falscher Urteile genüge, wenn auf 100 Urteile nur ein falsches entfalle, oder wenn $\frac{99}{100}$ die Wahrscheinlichkeit eines richtigen Urteils ist. „Angenommen“ ferner, dafs eine Entscheidung mit einer Majorität von 8 gegen 4 in Ansehung der Art und Weise, wie die einstimmigen Verdicte zustandekommen, das gleiche Vertrauen verdient, sofern die Geschwornen unabhängig von einander, also ohne gegenseitige Beeinflussung ihr „ja“ oder „nein“ aussprechen: dann kann man — und das ist eine rein mathematische Aufgabe — den „durchschnittlichen Grad der Vertrauenswürdigkeit eines Geschwornen“ bestimmen, welcher nötig ist, damit bei dem festgesetzten Stimmenverhältnis mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{99}{100}$ ein richtiges Urteil zustandekomme. Derselbe ergiebt sich als Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^8(1-x)^4}{x^8(1-x)^4+(1-x)^8x^4}=\frac{99}{100},$$

und zwar ist annähernd $x=\frac{1000}{1317}$. Der Mathematiker kann nun weiter auch die Frage beantworten, ob unter Voraussetzung solcher Geschwornen und ihrer Unabhängigkeit Entscheidungen von 6 Geschwornen mit 4 Stimmen gegen 2 die gleiche Sicherheit böten; denn es kommt nur darauf an, den Wert des Ausdrucks

$$\frac{x^4(1-x)^2}{x^4(1-x)^2+(1-x)^4x^2}$$

für $x=\frac{1000}{1317}$ zu berechnen; und da sich $\frac{10}{11}$ ergiebt, so ist die gestellte Frage zu verneinen. Solcher Art Fragen kann also der Mathe-

matiker erledigen; er vermag aber als solcher nicht zu sagen, ob das Verdict der englischen Jury äquivalent sei einer Entscheidung durch eine Majorität von 8 gegen 4 bei völliger Unabhängigkeit der Geschwornen, auch nicht, ob ein falsches Urteil unter 100 innerhalb oder aufserhalb der Grenzen der notwendigen Sicherheit liege.

Laplace[13]) beschliefst das XI. Capitel seiner „Théorie analytique" mit einem kurzen, aber sehr bemerkenswerten Artikel über die Urteile von Gerichtshöfen. Er sagt, man könne ein solches Urteil, das zwischen zwei contradictorischen Meinungen entscheidet, vergleichen dem Ergebnis der Aussage mehrerer Zeugen über die Ziehung einer bestimmten Nummer aus einer Urne, welche deren nur zwei enthält. Ist p „die Wahrscheinlichkeit, dafs der Richter wahr aussage", so ist die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit (bonté) eines durch r Richter einstimmig geschöpften Urteils ausgedrückt durch

$$\frac{p^r}{p^r + (1-p)^r}.$$

Zur Bestimmung von p giebt nun Laplace einen ganz richtigen empirischen Weg an; hätte eine ausgedehnte Statistik der gerichtlichen Entscheidungen ergeben, dafs unter n giltigen Entscheidungen i mit Einstimmigkeit geschöpft worden sind, — und dieser Schlufs könnte auch auf jedes andere bestimmte Stimmenverhältnis angewendet werden — so ergäbe sich für p aus der Gleichung

$$p^r + (1-p)^r = \frac{i}{n}$$

ein um so genauerer Wert, je gröfser n ist.

Im ersten „Supplément" kommt Laplace in einem „De la Probabilité des Jugemens" betitelten Artikel auf gerichtliche Entscheidungen nochmals ausführlich zurück und bemerkt gleich eingangs, dafs zwischen Zeugnissen und den Urteilen von Gerichtshöfen ein Unterschied bestehe; während nämlich die Wahrscheinlichkeit eines Zeugnisses, das von der wirklichen Wahrnehmung eines Thatbestandes seinen Ausgang nimmt, von der Natur der bezeugten Sache unabhängig ist, könne ein der Rechtsprechung unterzogener Gegenstand derart von Unklarheiten umgeben sein, dafs die Richter eine falsche Meinung sich über ihn bilden. Er verfolgt nun weiter den Gedanken: damit ein Angeklagter verurteilt werden könne, müsse die Wahrscheinlichkeit seiner Schuld einen gewissen Betrag erreichen oder ihn übertreffen; über die Höhe dieses Minimums ergeht sich Laplace in allgemeinen Betrachtungen, die zu einem numerischen Resultate niemals führen können; denn, wenn es heifst, die Beweise müfsten eine solche Kraft haben, dafs das Product aus dem zu befürchtenden Irrtum in dessen geringe Wahrscheinlichkeit kleiner ist als die Gefahr, welche aus der Ungestraftheit des Verbrechens entspringen würde,

so mufs man billig fragen, woran jener Irrtum und diese Gefahr gemessen werden sollen. Als selbstverständlich nimmt Laplace an, dafs die Wahrscheinlichkeit a der Schuld, bei welcher die Verurteilungen zu beginnen hätten, über $\frac{1}{2}$ liege, und setzt weiter voraus, dafs ein Richter, der das „schuldig" ausspricht, damit bekennt, dafs er für seine Person die Wahrscheinlichkeit der Schuld des Angeklagten mindestens gleich a halte. Wird diese Wahrscheinlichkeit mit x bezeichnet, und wird ferner angenommen, dafs von den $p+q$ Mitgliedern des Gerichtshofes p für die Verurteilung, q für den Freispruch stimmen, so ist die Wahrscheinlichkeit a priori, dafs diese Entscheidung richtig sei,

$$\frac{x^p(1-x)^q}{x^p(1-x)^q+(1-x)^p x^q};$$

die Wahrscheinlichkeit des angenommenen Wertes von x (oder genauer: die Wahrscheinlichkeit eines zwischen x und $x+dx$ gelegenen Wertes) auf Grund des beobachteten Stimmenverhältnisses

$$\frac{\{x^p(1-x)^q+(1-x)^p x^q\}\,dx}{\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\{x^p(1-x)^q+(1-x)^p x^q\}\,dx}=\frac{\{x^p(1-x)^q+(1-x)^p x^q\}\,dx}{\int\limits_{0}^{1}x^p(1-x)^q\,dx};$$

daraus folgt als Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der Entscheidung unter Rücksichtnahme auf alle Werte, deren x nach dem Vorbemerkten fähig ist,

$$\frac{\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}x^p(1-x)^q\,dx}{\int\limits_{0}^{1}x^p(1-x)^q\,dx},$$

welcher die Wahrscheinlichkeit einer falschen Entscheidung

$$\frac{\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}x^p(1-x)^q\,dx}{\int\limits_{0}^{1}x^p(1-x)^q\,dx}$$

complementär ist. Für die letztere giebt Laplace Näherungsausdrücke, einmal unter der Voraussetzung, dafs $p-q$ im Vergleich

zu $p + q$ eine beträchtliche Zahl, das andere Mal unter der Annahme eines relativ kleinen $p - q$.

Der Fortschritt, welcher in dieser Darstellung liegt, ist darin zu erblicken, dafs die Vorstellung einer festen Wahrscheinlichkeit für die richtige Aussage des einzelnen Richters aufgegeben ist; dagegen setzt die Rechnung wieder alle, die an der Entscheidung teilnehmen, als gleichwertig und von einander unabhängig voraus, was der Wirklichkeit so wenig entspricht, dafs auch diese Resultate wenig Vertrauen verdienen.

Poisson[8]) ist bei seinen ausgedehnten Untersuchungen über die Entscheidungen sowohl crimineller wie civilrechtlicher Natur zum Teil andere Wege gegangen als seine Vorgänger; aber in den wesentlichen Voraussetzungen trifft er doch wieder mit ihnen zusammen. Er führt bei Fällen, welche der Judicatur der Geschwornen unterworfen werden, die apriorische Wahrscheinlichkeit der Schuld des Angeklagten, wie sie sich aus der Voruntersuchung und der auf diese gestützten Anklage ergiebt, als neues Rechenelement ein, über das er aber im weiteren Verlaufe wenig Brauchbares beizubringen vermag; er führt für die einzelnen Geschwornen verschiedene Wahrscheinlichkeiten des Irrens und des Nichtirrens ein, geht aber dann doch wieder zu einem gemeinsamen Wert über, der dadurch, dafs er ihn als „durchschnittliche Wahrscheinlichkeit" bezeichnet, an Klarheit nicht gewinnt. Was bei Laplace als Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit eines in bestimmter Weise zustandegekommenen Urteils figurirt, führt bei Poisson den Namen „Wahrscheinlichkeit der Schuld des Angeklagten" auf Grund des verdammenden Urteils. In dem Gefühle, dafs diese Benennung nicht ohne weiteres verständlich sei, — in Wirklichkeit ist sie logisch unzulässig, da nur von einem Vorhandensein oder Nichtvorhandensein der Schuld, nicht aber von einem Wahrscheinlichkeitsgrade derselben gesprochen werden kann, — sucht er ihren Sinn durch eine Umschreibung zu kennzeichnen und sagt, man habe darunter strenge genommen „die Wahrscheinlichkeit der Verurteilbarkeit" eines Angeklagten auf Grund eines in bestimmter Weise über ihn gefällten verdammenden Urteils zu verstehen.

Aus der Kritik, welche v. Kries[1]) (l. c.) an den gegenwärtig in Rede stehenden Untersuchungen geübt hat, wollen wir die folgenden Momente hervorheben. v. Kries entwickelt eine ideale Vorstellung von der Entstehung eines Geschwornenverdictes, indem er von der Annahme ausgeht, es sei als von vornherein bestimmt anzusehen, welches Votum jede auf der Geschwornenliste stehende Person über den zu entscheidenden Fall abgeben würde, wenn sie in die Jury käme. Dann sondern sich die auf der Liste verzeichneten Personen in eine Majorität, deren Meinung die „consentirende", und in eine Minorität, deren Meinung die „dissentirende" genannt werden soll. Das Zahlenverhältnis der beiden Gruppen als bekannt vorausgesetzt,

wäre es eine auf ein Urnenschema zurückführbare Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, das Verdict werde im Sinne der consentirenden Meinung ausfallen; denn diese Wahrscheinlichkeit deckt sich mit der Wahrscheinlichkeit, dafs die Auslosung einen Schwurgerichtshof ergeben werde, in welchem die consentirende Meinung über die zur Entscheidung nötige Stimmenzahl verfügt. Selbst über das oben erwähnte Stärkeverhältnis der Vertreter beider Meinungen liefse sich auf empirischem Wege eine bis zu einem gewissen Grade befriedigende Auskunft erlangen; v. Kries rechnet es Laplace sehr hoch an, einen solchen Weg angegeben zu haben; er ist oben angedeutet worden und stützt sich auf die Zählung solcher Verdicte, welche mit einer bestimmten Majorität abgegeben worden sind, und die Vergleichung ihrer Anzahl mit der aller giltigen Entscheidungen. Die Art und Weise aber, in welcher die Verdicte entstehen, — nicht durch stumme Abgabe des Votums, sondern nach vorausgegangener Rechtsbelehrung und mehr oder weniger eingehender Beratung — läfst das ganze Bild als hinfällig und alle daraus gezogenen Schlüsse als unzutreffend erscheinen. Diesem Bilde entsprechen aber im Grunde genommen die Darstellungen von Condorcet, Laplace, Poisson u. a., nur mit dem Unterschiede, dafs sie den mafsgebenden Begriffen eine andere, dem wirklichen Sachverhalt nicht angemessene Formulirung geben. Das Schwurgerichtsverfahren zielt unmittelbar zunächst auf die Erlangung eines der consentirenden Meinung entsprechenden Verdicts, d. h. eines Verdicts, welches die Meinung der Mehrheit unter den zum Geschwornenamte Berufenen zum Ausdruck bringt; und weil die Annahme berechtigt ist, dafs die consentirende Meinung in weit zahlreicheren Fällen dem wirklichen Sachverhalt entsprechen und daher zu einem „gerechten" Urteil führen werde als die dissentirende, darf man aus der wachsenden Häufigkeit consentirender Urteile auch auf zunehmende Häufigkeit der gerechten Urteile schliessen. Aber zwischen der Wahrscheinlichkeit einer consentirenden und der einer gerechten Entscheidung besteht ein wesentlicher Unterschied.

52. Im Schlufsartikel des II. Capitels der „Théorie analytique" behandelt Laplace[13]) zwei Probleme, die, weil sie Entscheidungen auf Grund abgegebener Urteile betreffen, hierher gehören, wiewohl es sich dabei um Fragen ganz anderer Natur handelt als bei gerichtlichen Entscheidungen.

Das erste Problem lautet: Angenommen, ein beobachteter Erfolg könne nur einer von n Ursachen $A, B, C, \cdots$ zugeschrieben werden; die Mitglieder einer Jury, die berufen ist darüber zu entscheiden, welcher von den Ursachen die gröfste Wahrscheinlichkeit zuzuschreiben sei, bringen ihre Anschauung dadurch zum Ausdruck, dafs jedes auf einer Karte die Buchstaben $A, B, C, \cdots$ in der Rangfolge der Wahrscheinlichkeiten aufschreibt, die es den entsprechenden Ursachen bei-

mifst, mit der wahrscheinlichsten Ursache beginnend: Wie ist auf Grund dieser Vota wissenschaftlich correct zu entscheiden?

Das zweite Problem ist das folgende: Eine Wahlversammlung (oder eine Jury) hat unter mehreren Candidaten (oder unter mehreren um einen Preis concurrirenden Entwürfen) einen zu wählen; die Mitglieder bringen ihre Meinung hierüber derart zum Ausdruck, dafs sie auf einer Karte die Namen der Candidaten (oder Entwürfe) in absteigender Rangfolge der Qualität, die sie ihnen beimessen, aufschreiben. Welcher Candidat (oder Entwurf) verdient auf Grund dieser Abstimmung den Vorzug vor allen anderen?

Die Lösung stützt sich auf die Theorie der Mittelwerte. Im ersten Falle handelt es sich um die Mittelwerte von n in absteigender Folge geordneten positiven Gröfsen, welche nur an die eine Bedingung gebunden sind, dafs ihre Summe der Einheit gleichkommen mufs; im zweiten Falle um die Mittelwerte von n ebenso geordneten positiven Gröfsen, die sämtlich unter einer festen Grenze zu liegen haben. Es ergeben sich die folgenden Resultate: Man schreibe auf jeder Karte zu den Buchstaben (beziehungsweise Namen), bei dem obersten beginnend, der Reihe nach die Zahlenwerte von

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{1}\right);\ \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}\right);\ \cdots\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

im ersten, und die Zahlenwerte

$$n;\quad n-1;\quad \cdots 1$$

im zweiten Falle; bilde für jeden Buchstaben (jeden Namen) die Summe der Zahlen, welche ihm auf den einzelnen Karten beigeschrieben sind, und vergleiche diese Summen unter einander. Diejenige Ursache, deren Buchstabe die gröfste Summe führt, hat als die wahrscheinlichste zu gelten, gleichwie jener Candidat als der würdigste anzusehen ist, dem die gröfste Summe zufiel.

Laplace begründet diese Resultate auf analytischem Wege und stützt sich bezüglich des ersten auf ein sehr allgemeines Problem, das in folgendem besteht: Von n positiven variablen Gröfsen $t_1, t_2, \cdots t_n$ ist das Wahrscheinlichkeitsgesetz gegeben, d. h. es ist von jeder derselben, t_λ, bekannt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ihr Wert zwischen den Grenzen t_λ und $t_\lambda + dt_\lambda$ gelegen ist; es ist der Mittelwert oder der wahrscheinliche Wert einer gegebenen Function $\psi(t_1, t_2, \cdots t_n)$ jener Gröfsen zu bestimmen.

Eine einfache, auf geometrischen Betrachtungen ruhende Begründung jener Resultate hat Crofton[4]) (art. 42—43) gegeben.

Sechster Abschnitt.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Resultate von Messungen.

53. Die ersten Untersuchungen, welche sich mit der Frage der Bildung des Endresultates aus einer Anzahl einander widersprechender directer Beobachtungen beschäftigen, knüpfen an das althergebrachte Verfahren des arithmetischen Mittels an. Sie gehen bereits von der für die Fehlertheorie grundlegenden Vorstellung aus, dafs der Fehler einer Beobachtung, was seine Gröfse betrifft, ein zufälliges Ereignis sei, dessen Wahrscheinlichkeit von der Fehlergröfse abhängt. Die möglichen Fehlerbeträge werden zunächst durch eine discrete Wertreihe dargestellt und über die Wahrscheinlichkeit der einzelnen mehr oder weniger willkürliche Annahmen gemacht.

Simpson[2]) war der erste, welcher in einem Abschnitt der „Miscellaneous Tracts", betitelt „An Attempt to shew the Advantage arising by Taking the Mean of a Number of Observations, in Practical Astronomy", Untersuchungen solcher Art angestellt hat. Die von ihm in Angriff genommenen Probleme sind 16 Jahre später durch Lagrange[3]) wieder aufgenommen und in einer klaren Weise erledigt worden in einem Mémoire, das seinerzeit Aufsehen erregte und gewöhnlich als erste Publication auf fehlertheoretischem Gebiete bezeichnet wird.*)

Die Aufgaben, um welche es sich handelt, mögen durch die folgende Ausführung gekennzeichnet werden: Jede der n ausgeführten unmittelbaren Beobachtungen einer unbekannten Gröfse könne mit einem Fehler aus der Reihe $p, q, r, \cdots$ behaftet sein, und es seien $a, b, c, \cdots$ beziehungsweise die Zahlen, welche die Häufigkeit des Auftretens dieser Fehler anzeigen; gefragt wird um die Wahrscheinlichkeit, dafs der dem arithmetischen Mittel anhaftende Fehler innerhalb vorgezeichneter Grenzen enthalten sei, — in einem anderen Problem um denjenigen Fehler im arithmetischen Mittel, welchem die gröfste Wahrscheinlichkeit zukommt. Die Lösung dieser Aufgaben kommt dem Wesen nach darauf zurück, die analogen Fragen in Bezug auf die Summe der den einzelnen Beobachtungen anhaftenden Fehler zu beantworten; denn aus dieser Summe geht der Fehler des Mittels durch blofse Division mit n hervor. In dieser Fassung erkennt man aber jenes vielfach behandelte Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welches wir in Art. 19 unter dem Namen des Moivre'schen Problems besprochen haben.

Bei Daniel Bernoulli[8]), der das Verfahren des arithmetischen

*) Auf eine Ungenauigkeit in der Behandlung der Probleme, welche bei Lagrange als IV. und V. bezeichnet sind, hat Pizzetti[6]) (p. 175) aufmerksam gemacht.

Mittels gleichfalls einer wissenschaftlichen Kritik unterzog, findet sich der Begriff eines Fehlergesetzes schon in ziemlich bestimmter Weise ausgesprochen vor; Bernoulli legt ihm auch eine Eigenschaft bei, wenn er die Überzeugung ausspricht, dafs kleine Fehler wahrscheinlicher seien als grofse; statt einer discreten Fehlerreihe stellt er sich einen stetigen Fehlerbereich vor. Sein Vorschlag, die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers e durch den Ausdruck $\sqrt{r^2 - e^2}$ „zu messen", in welchem r eine Constante vorstellt, kommt darauf hinaus, die Wahrscheinlichkeit der Fehler nach den Ordinaten eines über dem (symmetrischen) Fehlerbereich als Durchmesser beschriebenen Halbkreises zu beurteilen; ohne Zweifel schreibt Bernoulli bei jener Festsetzung diese geometrische Darstellung vor.

Während Laplace[13]) die Fehlertheorie mit sehr abstracten Untersuchungen eröffnet, zuerst von einer arithmetisch geordneten Fehlerreihe $-n, -(n-1), \cdots 0, \cdots n-1, n$ ausgeht und jedem einzelnen Fehler die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2n+1}$ beimifst, das allgemeine Fehlergesetz dann in der wenig durchsichtigen Weise einführt, dafs er $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ als die Wahrscheinlichkeit eines jeden positiven und negativen Fehlers bezeichnet, darin unter x und n unendliche Zahlen verstanden, setzt Gaufs sich zu der Wirklichkeit sogleich in enge Beziehungen. In der „Theoria combinationis"[5]) vollzieht er die wichtige Scheidung der Beobachtungsfehler in regelmäfsige (darunter auch constante) einerseits und in unregelmäfsige (unvermeidliche) andererseits; nur die letzteren, deren Gröfse mit den Umständen während der Beobachtung in keinem erkennbaren, der Rechnung zugänglichen Zusammenhange steht, bezeichnet er als einen Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Bei der Einführung des Fehlergesetzes ist Gaufs nicht mit der wünschenswerten Klarheit und Consequenz zuwerkegegangen, und dieser Umstand hat sich auch in späteren Schriften über diese Materie, die sich naturgemäfs an seine Arbeiten anlehnen mufsten, vielfach bemerklich gemacht. Das erste Mal, im art. 175 der „Theoria motus"[1]), erklärt er $\varphi(\Delta)$ als die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers Δ und bezeichnet ohne eigentliche Begründung $\varphi(\Delta)d\Delta$ als die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen den Grenzen Δ und $\Delta + d\Delta$; im art. 4 der „Theoria combinationis" wird $\varphi(x)$ die „relative Häufigkeit" des Fehlers x genannt und daraus „vermöge der Stetigkeit der Fehler" geschlossen, $\varphi(x)dx$ drücke „die Wahrscheinlichkeit eines zwischen den unendlich nahen Grenzen x und $x + dx$ liegenden Fehlers" aus; an den beiden Orten vermifst man einen deutlichen Zusammenhang zwischen φ und dem Product φdx. Auf diesen Mangel, der auch bei Encke[2]) nicht behoben ist, hat Reuschle[1]) nachdrücklich hingewiesen und ihn aufzuklären gesucht. Am besten

wird diese Schwierigkeit umgangen, wenn man, statt von der Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Fehlers auszugehen, die Wahrscheinlichkeit eines in dem Intervall $(0, x)$ liegenden Fehlers als grundlegende Function $\Phi(x)$ wählt; man erreicht dabei den doppelten Vorteil, mit einer dem Verständnis und der empirischen Bestimmung zugänglichen Gröfse zu beginnen und für $\varphi(x)$ eine bestimmte analytische Bedeutung zu finden; denn weil nun augenscheinlich $d\Phi(x) = \Phi'(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers aus dem Elementarintervall $(x, x + dx)$ vorstellt, so deckt sich die als Fehlergesetz bezeichnete Function $\varphi(x)$ mit der Ableitung von $\Phi(x)$. Diese Darstellung hat Referent in seiner „Theorie der Beobachtungsfehler“ [10]) gegeben, und sie findet sich auch bei Zachariae [2]) und ähnlich bei Thiele [2]) vor. Es mag noch bemerkt werden, dafs $\varphi(x)$ bei Cauchy [5]) den Namen „l'indice de probabilité de l'erreur x“ führt.

Die Bestimmung der Form von $\varphi(x)$ kann nur auf Grund von Thatsachen und Erfahrungen erfolgen, welche aus der Natur des Gegenstandes hervorgehen. Die allgemeine Einsicht in denselben giebt nur einige wenige Eigenschaften an die Hand, welche man der Function mit einiger Sicherheit wird zuschreiben können. Gaufs fafst dieselben in den beiden oben citirten Schriften dahin zusammen, dafs $\varphi(x)$ zu den „unstetigen“ Functionen insofern gehöre, als es aufserhalb eines gewissen Intervalls beständig Null sein müsse; dafs es in den meisten Fällen eine gerade und ferner sicher eine solche Function sein werde, die mit absolut wachsendem Argument abnimmt und somit $\varphi(0)$ zum Maximum hat. Schon auf Grund dieser wenigen Eigenschaften, die zu einer Bestimmung von $\varphi(x)$ nicht ausreichen, sind mehrfach bemerkenswerte Resultate abgeleitet worden. Ehe wir diese anführen, wird es notwendig sein, gewisse Gröfsen namhaft zu machen, welche einen Schlufs auf die Güte oder Genauigkeit der Beobachtungen zulassen; es sind dies folgende mit Hilfe des Fehlergesetzes gebildete Integralwerte:

$$P = \int_{-x_0}^{x_0} \varphi(x)\,dx \qquad (\alpha)$$

$$K' = \int x\varphi(x)\,dx \qquad (\beta)$$

$$K_1 = \int |x|\,\varphi(x)\,dx, \quad K_2 = \int x^2\varphi(x)\,dx, \cdots K_n = \int |x|^n\varphi(x)\,dx. \quad (\gamma)$$

Das erste Integral bedeutet die Wahrscheinlichkeit, dafs der einer Beobachtung anhaftende Fehler zwischen den Grenzen $-x_0$ und x_0 enthalten oder dem Betrage nach nicht gröfser sei als x_0; wird sein Intervall bis an die äufsersten Fehlergrenzen erstreckt, so nimmt es den Wert 1 an. — Das zweite Integral K', zwischen den äufsersten Fehlergrenzen genommen, stellt den Mittelwert von x oder den Durch-

schnittswert aller Fehler dar; Gaufs[5]) (art. 5) nennt K' den constanten Teil des Fehlers und erkennt in seinem Verschwinden das Fehlen einseitig wirkender (also systematischer) Fehlerursachen. — Die Integrale (γ), auf das ganze Fehlergebiet bezogen, geben den mittleren Wert der ersten, zweiten, $\cdots$ n-ten Potenzen der Fehler, diese immer nur ihrem Betrage nach genommen. $K_1 = \vartheta$ wird gegenwärtig als der durchschnittliche Fehler bezeichnet; $\sqrt{K_2} = k_2 = \mu$ ist von Gaufs[5]) (art. 7) unter dem Namen des mittleren oder des mittleren zu befürchtenden Fehlers eingeführt worden. Wir setzen des weiteren $\sqrt[n]{K_n} = k_n$.

Die Integrale (γ) bilden besondere Fälle eines allgemeinen Begriffes, dem die Auffassung zugrundeliegt, ein jeder Fehler, ob positiv oder negativ, bedeute ein Abgehen von der Wahrheit und sei vergleichbar einem Verluste in einem Glücksspiele. Wonach die Gröfse dieses Verlustes beurteilt werden soll, läfst sich a priori nicht feststellen und ist bis zu einem gewissen Grade willkürlich; jedenfalls mufs die betreffende Function des Fehlers, welche dazu dient, vom Vorzeichen desselben unabhängig und so beschaffen sein, dafs sie mit dem Fehlerbetrage wächst. Nennt man sie $f(x)$, so ist nach Analogie des Begriffs der mathematischen Erwartung der Wert von

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx,$$

über das Gebiet der Fehler erstreckt, dasjenige, was man unter dem Namen des totalen Fehlerrisicos in die Theorie eingeführt hat. In dieser allgemeinen Fassung findet sich der Begriff bei Pizzetti[6]) (p. 179). Die Auffassung stammt aber von Laplace[13]) (art. 20) her; er nimmt $f(x) = |x|$ an, und indem er $\varphi(x)$ als eine gerade Function voraussetzt, benützt er die Hälfte von K_1 unter dem Namen „l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins". Gaufs[5]) nimmt diesen Gedankengang auf und wählt $f(x) = x^2$, wodurch er eben zu seinem „mittleren Fehler" geführt wird.

Unter der alleinigen Voraussetzung, dafs $\varphi(x)$ mit wachsendem Betrage von x beständig abnehme oder wenigstens niemals wachse, hat Gaufs[5]) (art. 10, 11) bewiesen, dafs

$$\frac{x_0}{\mu} \leqq P\sqrt{3}, \qquad \text{solange } P < \tfrac{2}{3},$$

und

$$\frac{x_0}{\mu} \leqq \frac{2}{3\sqrt{1-P}}, \quad \text{solange } P > \tfrac{2}{3};$$

ferner ohne Beweis mitgeteilt, dafs

$$\frac{K_4}{\mu^4} \geqq \tfrac{9}{5}.$$

Diese Resultate sind von Winckler[1]) durch geometrische Betrachtung neu abgeleitet und durch zahlreiche neue bereichert worden; die beiden ersten Gaufs'schen Resultate erscheinen bei ihm als besondere Fälle des allgemeinen Satzes, wonach

$$\frac{x_0}{k_n} \leqq P\sqrt[n]{n+1}, \qquad \text{solange } P < \frac{n}{n+1},$$

$$\frac{x_0}{k_n} \leqq \frac{n}{(n+1)\sqrt[n]{1-P}}, \quad \text{solange } P > \frac{n}{n+1},$$

und ergeben sich daraus für $n = 2$. Die letztangeführte Gaufs'sche Relation hat neuerdings Krüger[1]) zum Gegenstande einer Untersuchung gemacht und dabei das merkwürdige Ergebnis festgestellt, dafs, sobald nur $\varphi(x)$ mit wachsendem Betrage von x nicht wächst,

$$\left(\frac{k_{2q}}{\mu}\right)^{2q} \gtrless \frac{3^q}{2q+1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{k_{4q}}{k_{2q}}\right)^{4q} \gtreqless \frac{(2q+1)^2}{4q+1}$$

ist. Des weiteren ist hierher zu zählen, was Pizzetti[6]) (p. 184) über den Zusammenhang der Wahrscheinlichkeit P eines Fehlers zwischen den Grenzen $-x_0$ und x_0 mit dem mittleren Fehler μ ohne jede einschränkende Voraussetzung über $\varphi(x)$ nachgewiesen hat, wonach

$$P > 1 - \frac{\mu^2}{x_0^{\,2}}, \qquad \text{solange } |x_0| > \mu\cdot$$

54. Seine erste Begründung der Methode der kleinsten Quadrate hat Gaufs[1]) auf ein Princip gestützt, welches bereits Daniel Bernoulli[8]) ausgesprochen hatte. Danach soll jene Combination der Beobachtungen die vorteilhafteste, also allen anderen vorzuziehende sein, welche die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten liefert, mit anderen Worten, welche den Beobachtungen solche Fehler beilegt, für deren Coexistenz sich die gröfstmögliche Wahrscheinlichkeit ergiebt.

Indem er des weiteren bezüglich der einfachsten Form von Beobachtungen, das sind directe Beobachtungen gleicher Genauigkeit einer einzigen unbekannten Gröfse, die Hypothese aufstellte, das seit jeher von den Beobachtern in diesem Falle adoptirte arithmetische Mittel aus den Beobachtungsergebnissen bilde den wahrscheinlichsten Wert, ergab sich ihm die Form von φ, das er von vornherein als eine analytische Function voraussetzte. Der Kern der Deduction besteht in folgendem: Sind $l_1, l_2, \cdots l_n$ die Ergebnisse der n Beobachtungen, so hat die Hypothese, x sei der Wert der Unbekannten, $x - l_1, x - l_2, \cdots x - l_n$ also das System der

begangenen Fehler, eine Wahrscheinlichkeit, deren Ausdruck nach der Bayes'schen Regel sich in der Form

$$\Omega = A\varphi(x-l_1)\varphi(x-l_2)\cdots\varphi(x-l_n)$$

darstellt; der wahrscheinlichste Wert von x ist also aus der Gleichung

$$\frac{dl.\Omega}{dx} = \frac{\varphi'(x-l_1)}{\varphi(x-l_1)} + \frac{\varphi'(x-l_2)}{\varphi(x-l_2)} + \cdots + \frac{\varphi'(x-l_n)}{\varphi(x-l_n)} = 0 \quad (\alpha)$$

zu bestimmen. Diese Gleichung muſs aber den gleichen wesentlichen Inhalt haben wie die Gleichung

$$(x-l_1)+(x-l_2)+\cdots+(x-l_n)=0, \qquad (\beta)$$

wenn das arithmetische Mittel der wahrscheinlichste Wert sein soll; mit anderen Worten, sie muſs identisch befriedigt werden, wenn man für x das arithmetische Mittel $\frac{l_1+l_2+\cdots+l_n}{n}$ einsetzt. Macht man die Annahme $l_2 = l_3 = \cdots = l_n = l_1 - nN$, so verwandelt sich das arithmetische Mittel in $l_1 - nN + N$, und die Gleichung (α) geht nach einiger Umformung über in

$$\frac{\varphi'(N)}{N\varphi(N)} = \frac{\varphi'(\overline{1-n}N)}{\overline{1-n}N\varphi(\overline{1-n}N)},$$

woraus der Schluſs zu ziehen ist, daſs $\frac{\varphi'(z)}{z\varphi(z)}$ eine Constante, und zwar eine negative Constante sein müsse, soll Ω ein Maximum werden. Schreibt man diese Constante in der Form $-2h^2$, so kommt:

$$\varphi(z) = Ce^{-h^2z^2};$$

C bestimmt sich aus der Forderung, daſs $\int\varphi(z)dz$, über das ganze Fehlergebiet erstreckt, der Einheit gleich werden muſs, mit $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$, sodaſs

$$\varphi(z) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2z^2} \qquad (\gamma)$$

als die endgiltige Form des Fehlergesetzes resultirt.

Gauſs stützt die Bemerkung, daſs diese Function das Gesetz der Fehler in aller Strenge nicht darstellen könne, auf den äuſserlichen Umstand, daſs sie einem Fehler auch dann eine endliche relative Wahrscheinlichkeit zuschreibt, wenn er sicher auſserhalb der Grenzen der möglichen Fehler liegt. Diesen Mangel, der jeder analytischen Function anhaften müſste, erklärt er mit Rücksicht auf die auſserordentlich rasche Abnahme von (γ) für unschädlich und mit Rücksicht auf die Unbestimmtheit der Fehlergrenzen für notwendig.

Die spätere Kritik ist über diese Bemerkungen weit hinausgegangen und hat sich den Unterlagen der Deduction zugewendet; sie führte infolgedessen auch zu vielfachen Untersuchungen über die theoretische Bedeutung des arithmetischen Mittels, auf welche wir im nächsten Artikel eingehen wollen. Hier sollen einige andere Einwendungen angeführt werden.

Pizzetti[6]) (p. 213) macht die Bemerkung, die Gleichung (γ) sei nur dann mit (α) notwendig coexistent, wenn die l solche Werte bedeuten, die aus einer Reihe wirklicher Beobachtungen hervorgegangen sein können. Dieser Forderung trage die Deduction nicht Rechnung, sie gehe vielmehr von der mathematischen Fiction aus, dafs aus der Gleichung (α) für ein beliebiges Wertsystem der l das arithmetische Mittel für x hervorgehen solle. Er stellt die ganze Schlufsweise, welche ein physikalisches Gesetz, wie es das der Beobachtungsfehler ist, aus einem rein conventionellen Princip (dem des arithmetischen Mittels) ableitet, in logischer Beziehung auf gleiche Stufe mit dem Vorgehen eines Physikers, welcher die wahre Verteilung der inneren Spannungen in einem auf Biegung beanspruchten Träger von der Annahme ausgehend bestimmen wollte, dafs eine gewisse von den Constructeuren angenommene Trägerform den gröfsten Biegungswiderstand leiste.

Bei der Aufstellung der Hypothese des arithmetischen Mittels macht Gaufs[1]) (art. 177) selbst die abschwächende Bemerkung, das arithmetische Mittel stelle „zum mindesten sehr nahe“ den wahrscheinlichsten Wert vor. Eine solche Abschwächung ist aber imstande, den aufrechten Bestand des Gesetzes (γ) zu erschüttern, weil es sehr viele von diesem verschiedene Gesetze giebt, welche auf einen dem arithmetischen Mittel sehr nahen Wert führen. Als Beispiel eines solchen Gesetzes giebt Pizzetti (l. c.) die Form

$$Ce^{-h^2 z^4}$$

an; für diese bekommt nämlich Ω den Ausdruck

$$Ae^{-h^2\{(x-l_1)^4+(x-l_2)^4+\cdots+(x-l_n)^4\}},$$

sein Maximum erfordert, dafs die Summe in $\{\ \}$ ein Minimum werde, was wiederum zu der Gleichung

$$(x-l_1)^3+(x-l_2)^3+\cdots+(x-l_n)^3=0$$

führt; setzt man darin $x=\dfrac{l_1+l_2+\cdots+l_n}{n}+\theta$ und bezeichnet mit $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ die Abweichungen der Beobachtungen von ihrem arithmetischen Mittel, so ergiebt sich zur Bestimmung von θ die Gleichung

$$[\lambda^3]+3\,[\lambda\lambda]\theta^2+n\theta^3=0,$$

aus welcher sich in erster Näherung für θ der Wert $-\frac{[\lambda^3]}{3[\lambda\lambda]}$ berechnet, der mit wachsender Zahl der Beobachtungen sehr rasch gegen Null convergirt. Eine Prüfung der 29 Resultate von Cavendish für die mittlere Erddichte bestätigte die Richtigkeit dieser Schlufsweise.

Als einen entscheidenden Anhalt für die Anfechtbarkeit der oben entwickelten Theorie erkennt Bertrand[3]) (art. 140, 142) den folgenden Umstand. Wenn aus einer Urne von unbekanntem Mischungsverhältnis weifser und schwarzer Kugeln n Reihen von je μ Ziehungen vorgenommen worden sind, so können die Quotienten $\frac{m_1}{\mu}$, $\frac{m_2}{\mu}$, $\ldots \frac{m_n}{\mu}$, deren Zähler die Anzahlen der erschienenen weifsen Kugeln bedeuten, als n gleich genaue Beobachtungen jenes Mischungsverhältnisses angesehen werden, dessen wahrscheinlichster Wert auf Grund dieser Beobachtungen in aller Strenge

$$\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n\mu} = \frac{1}{n}\left\{\frac{m_1}{\mu} + \frac{m_2}{\mu} + \cdots + \frac{m_n}{\mu}\right\},$$

also das arithmetische Mittel der beobachteten Werte ist. Wäre die Deduction correct, schliefst Bertrand, so müfste auch der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit einer zwischen z und $z + dz$ fallenden Abweichung des Einzelresultats von dem wahrscheinlichsten Werte, der nach Art. 33 allerdings die Form (γ) besitzt — er lautet

$$\sqrt{\frac{\mu^3}{2\pi m(\mu - m)}}\, e^{-\frac{\mu^3 z^2}{2m(\mu - m)}}\, dz$$

— streng richtig sein; er ist es aber nur angenähert, wie dies aus der Analyse des Bernoulli'schen Theorems hervorgeht.

Die Ableitung der Formel (γ) beruht auf der stillschweigenden Voraussetzung, dafs die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers nur von diesem allein abhänge.*) Bertrand[3]) (art. 144) hat sich mit der Untersuchung beschäftigt, welche Formen der Function, die den wahrscheinlichsten Wert der Unbekannten durch die Beobachtungsergebnisse darstellt, mit jener Voraussetzung verträglich sind. Er fand, dafs jene Function — sie heifse x — der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial x}{\partial l_1} + \frac{\partial x}{\partial l_2} + \cdots + \frac{\partial x}{\partial l_n} = 1$$

---

*) Seeliger[8]) hat gezeigt, dafs es Fälle giebt (z. B. in der Photometrie), wo die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers auch von der gemessenen Gröfse selbst abhängt. In solchen Fällen sei unter Umständen ein anderer Mittelwert, wie $\frac{[ll]}{[l]}$, $\sqrt[n]{l_1 l_2 \cdots l_n}$, zu nehmen.

genügen müsse, und leitete hieraus

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n} + \Phi\,(l_2 - l_1,\ l_3 - l_1,\ \cdots l_n - l_1) \quad (\varepsilon)$$

als ihre allgemeinste Form ab. Wie Tisserand*) bemerkt hat, ist x eine symmetrische Function der Argumente, wenn die willkürliche Function Φ symmetrisch ist in Bezug auf

$$l_1 - \frac{[l]}{n},\quad l_2 - \frac{[l]}{n},\ \cdots l_n - \frac{[l]}{n}.$$

Nicht jede Combinationsform der Beobachtungen, als wahrscheinlichster Wert aufgefafst, führt also zu einem Fehlergesetz, das den Fehler als alleiniges Argument enthält. Da allen in (ε) enthaltenen Formen die Eigenschaft zukommt, dafs eine durchgängige Änderung der Beobachtungsergebnisse um einen Betrag α eine ebensolche Änderung von x zur Folge hat, so sind die von Reuschle[1]) für möglich gehaltenen Formen des wahrscheinlichsten Wertes:

$$x = \sqrt[m]{\frac{S_m}{n}},\quad x = \sqrt[m]{\frac{C_m}{c_m}},\quad x = \sqrt[m]{\frac{C'_m}{c'_m}},$$
$$x = \sqrt[m]{\frac{V_m}{v_m}},\quad x = \sqrt[m]{\frac{V'_m}{v'_m}}, \quad (\zeta)$$

worin S_m die Summe der m-ten Potenzen, C_m, C'_m; V_m, V'_m die Summen der Combinationen, beziehungsweise Variationen m-ter Classe ohne und mit Wiederholung der l und c_m, c'_m; v_m, v'_m die Anzahlen dieser Complexionen bedeuten, als mit einem Fehlergesetz der gedachten Art unvereinbar erwiesen.

Wie aus dem Gange der Herleitung von (γ) hervorgeht, drückt diese Formel nicht eigentlich das Gesetz der wahren Beobachtungsfehler, sondern das der scheinbaren, d. i. der Abweichung der einzelnen Beobachtung von dem wahrscheinlichsten Werte, hier dem arithmetischen Mittel, aus. Indessen ist die Formel von Gaufs[1])[8]) sowohl wie von späteren Schriftstellern als das Gesetz der wahren Fehler angesehen worden. Referent hat in einer Note[9]) gezeigt, dafs, sofern man (γ) als Ausdruck des Gesetzes der wahren Fehler annimmt, die Abweichungen vom arithmetischen Mittel ein ebensolches Gesetz, jedoch mit einem anderen Präcisionsmafs h, befolgen.

Die vorstehende Gaufs'sche Ableitung des Fehlergesetzes**) und die daraus fliefsende Begründung des Princips der kleinsten

*) Compt. rend., CV, p. 231.

**) Eine beachtenswerte Kritik dieser und einiger später zur Sprache zu bringenden Ableitungen des Fehlergesetzes ist von De Tilly[1]) veröffentlicht worden, der selbst in der unter[2]) genannten Schrift eine lichtvolle Darstellung der Fehlertheorie auf Gaufs'scher Grundlage gegeben hat.

Fehlerquadratsumme ist in späterer Zeit von vielen namhaften Schriftstellern aufgenommen worden sowohl in Werken, welche die Ausgleichungsrechnung oder die Wahrscheinlichkeitsrechnung zum Gegenstande haben, wie auch in Schriften über Astronomie und Geodäsie, auf welch beiden Gebieten die Methode der kleinsten Quadrate in beständig wachsendem Maſse zur Geltung gekommen ist. Wir führen nur an: Littrow[1]), Encke[2]), Fischer[1]), Wittstein (s. Navier-Wittstein[1])), Hartner[1]), Brünnow[1]), Dienger[3]), Ritter[1]), Hansen[1]), Watson[1]), Chauvenet[1]), Laurent[1]), Natani[1]), Jordan[3])[4]), Meyer[1]). Mehrere der Genannten haben die Darstellung Encke's im Berliner Astronom. Jahrb. zur Grundlage genommen.

Pizzetti[6]) (p. 216) beklagt es, daſs von der Gauſs'schen Deduction, welche der heutigen wissenschaftlichen Kritik nicht mehr standhalten könne, in Universitätsvorlesungen Gebrauch gemacht werde. Dazu ist zu bemerken, daſs dort, wo der Fehlertheorie eine ausführlichere Behandlung zuteil wird, jene Ableitung gewiſs nicht allein zum Vortrage kommt. Wo es sich jedoch darum handelt, auf kurzem Wege in die Methode der kleinsten Quadrate einzuführen, wird die Ableitung wegen ihrer Einfachheit sich wohl noch weiter behaupten; man wird es aber dann, wo man über sie nicht hinausgeht, gewiſs nicht unterlassen, das exponentielle Fehlergesetz wenigstens durch Erfahrungsdaten weiter zu stützen.

55. Der Umstand, daſs Gauſs in seiner ersten Begründung der Methode der kleinsten Quadrate dem arithmetischen Mittel eine wichtige Rolle eingeräumt und eine bestimmte theoretische Eigenschaft zugesprochen hat, gab Anlaſs zu einer ganzen Reihe dasselbe betreffender Untersuchungen, die vielfach groſsen Scharfsinn ihrer Autoren bekunden. Das Ziel, welches dabei angestrebt wurde, das arithmetische Mittel als das einzige Resultat zu erweisen, das mit zwingender Notwendigkeit gewählt werden müsse, und dadurch der erwähnten Begründung eine feste Stütze zu geben, ist nicht erreicht worden, weil es nicht erreicht werden kann. Trotzdem behalten die Untersuchungen ihren Wert, weil sie einen genauen Einblick in die Natur der Mittelwerte und in die Stellung, welche das arithmetische Mittel unter ihnen einnimmt, vermittelt haben.

Einer der ersten Versuche, die Hypothese, das arithmetische Mittel sei der „wahrscheinlichste" Wert, auf einfachere Annahmen zurückzuführen, stammt von Encke[1])[2]) her. Es werden folgende Voraussetzungen gemacht: 1) Der wahrscheinlichste Wert aus zwei gleich verläſslichen Beobachtungen ist ihr arithmetisches Mittel; 2) der wahrscheinlichste Wert aus drei (und beliebig vielen) Beobachtungen ist eine symmetrische Function der letzteren; 3) bei beliebig vielen Beobachtungen muſs das Bildungsgesetz des wahrscheinlichsten Wertes ein solches sein, daſs der gleiche Wert erhalten wird, ob man es auf die einzelnen Beobachtungen oder auf Resultate an-

wendet, welche aus gleichartigen Gruppen der Beobachtungen nach demselben Gesetze abgeleitet worden sind. Die analytische Verwertung dieser Voraussetzungen führt bei beliebig vielen Beobachtungen zu dem arithmetischen Mittel. — Während Chauvenet[1])[2]) den Voraussetzungen axiomatische Kraft zuerkannt und den Beweis als einen völlig befriedigenden bezeichnet hat, ist von anderen Seiten manches gegen ihn eingewendet worden; so von Glaisher[2]), der sich mit Recht gegen die keineswegs einfache Voraussetzung 3) gewendet hat; ferner von Reuschle[1]), welcher seinerseits von der Annahme 2) und der weiteren 4) ausgeht, dafs bei völlig übereinstimmenden Beobachtungen auch das zu wählende Resultat mit ihnen übereinstimmen müsse, und zu dem Schlusse kommt, der wahrscheinlichste Wert sei zu suchen unter den Functionen (ζ) des vorigen Artikels; unter diesen fällt die letzte, $x = \sqrt[m]{\frac{V'_m}{v'_m}}$, mit dem arithmetischen Mittel zusammen, und Reuschle führt Gründe an, warum sie den anderen vorzuziehen sei.*) — Des weiteren haben Schiaparelli[2]) und De Tilly[1]) an Encke's Beweis Kritik geübt.

Schiaparelli[1])[2]) selbst hat zwei Beweise gegeben, durch welche aus Vernunftgründen, also a priori, das arithmetische Mittel als die allen anderen vorzuziehende Combination der Beobachtungen dargethan werden soll. Der erste geht von folgenden Annahmen aus: 5) Das zu wählende Resultat mufs unabhängig sein von der Einheit, in welcher die Beobachtungen ausgedrückt sind; 6) seine Stellung unter den Beobachtungen mufs unabhängig sein von der Wahl des Nullpunktes der Zählung; 7) eine Änderung, die einer der Beobachtungen erteilt worden ist, mufs am Resultate dieselbe Änderung hervorbringen, gleichgiltig, welcher Beobachtung sie erteilt wurde. Ist also $f(l_1, l_2, \cdot\cdot l_n)$ die Function, welche den vorteilhaftesten Wert darstellt, so werden ihr durch die Annahmen folgende Eigenschaften zugeschrieben:

$$\frac{\partial f}{\partial l_1} l_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2} l_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial l_n} l_n = f \quad \text{(Homogenität vom Grade 1);}$$

$$f(l_1 + \alpha, l_2 + \alpha, \cdots l_n + \alpha) = f + \alpha,$$

$$\text{woraus} \quad \frac{\partial f}{\partial l_1} + \frac{\partial f}{\partial l_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial l_n} = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial l_1} = \frac{\partial f}{\partial l_2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial l_n},$$

woraus $f = \frac{[l]}{n}$. — Zu der ersten Voraussetzung und der daraus

*) Gegenbemerkungen zu Reuschle's Kritik machte Encke, J. f. Math., 27. p. 220.

gezogenen analytischen Folgerung hat Pizzetti[6]) (p. 202) Bemerkungen gemacht, aus welchen hervorgeht, dafs zwischen beiden kein notwendiger Zusammenhang besteht; dafs ferner Schiaparelli's Beweis aufrecht bleibt, wenn man die Voraussetzung 5) durch die früher unter 4) ausgesprochene ersetzt.

Der zweite Schiaparelli'sche Beweis[2]) beruht auf den Annahmen 1), 4) und der folgenden: 8) Ist $f(l_1, l_2, \cdots l_n)$ der vorteilhafteste Wert, so mufs der nämliche Wert auch durch

$$f(l_1', l_2', \cdots l_n'),\ f(l_1'', l_2'', \cdots l_n''), \cdots$$

dargestellt sein, wenn $l_1', l_2', \cdots l_n'$ die vorteilhaftesten Werte aus je $n-1$ Gliedern der Reihe $l_1, l_2, \cdots l_n$; $l_1'', l_2'', \cdots l_n''$ die vorteilhaftesten Werte aus je $n-1$ Gliedern der Reihe $l_1', l_2', \cdots l_n'$ u. s. w. sind. Wäre nämlich die Geltung des arithmetischen Mittels für $n-1$ Beobachtungen bereits erwiesen, so hätte das in dem Satze 8) vorgeschriebene Verfahren fortgesetzte Mittelbildung zur Folge; es kann aber erwiesen werden, dafs die $l_i^{(r)}$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ für $\lim r = \infty$ der gemeinsamen Grenze $\frac{l_1 + l_2 \cdots + l_n}{n}$ zustreben, wodurch das Princip des arithmetischen Mittels nun auch für n Beobachtungen als geltend erwiesen ist. Die beiden anderen Voraussetzungen vervollständigen den Beweis. — Einen auf dieselbe Wahrnehmung, dafs nämlich die $l_i^{(r)}$ gegen die gemeinschaftliche Grenze $\frac{[l]}{n}$ convergiren, beruhenden Beweis hat Czuber[7]) gegeben; Seyfert[2]) ist auf diesen Gedanken später nochmals zurückgekommen.

Stone[2]) stützt sich bei seinem Beweise lediglich auf die zwei Annahmen 1) und 7); bezüglich der letzteren kam es zwischen ihm und Schiaparelli zu einem Prioritätsstreit.*) Die erste Annahme führt Stone dazu, dafs der vorteilhafteste Wert eine Function $f(M)$ des arithmetischen Mittels sei; indem er dieses selbst für n Beobachtungen als geltend, also $f(M) = M$ voraussetzt, benützt er bei der Ausdehnung auf $n+1$ Beobachtungen eine Reihenentwicklung, in deren Verlaufe $f(M) = M$, $f'(M) = 1$, $f''(M) = \cdots = 0$ gesetzt wird. Dazu bemerkt Pizzetti[6]) (p. 199), es sei denkbar, dafs $f(M)$ aufser von M auch von n abhänge, und dann könnte es bei dem Übergang von n zu $n+1$ seine Form derart ändern, dafs die Ansätze $f(M) = M$, $f'(M) = 1, \cdots$ nicht mehr zurecht bestehen; als Beispiel führt er an:

$$f(M) = M - \frac{n-2}{n}\left\{M - \frac{a}{n}\, l\left(1 + \frac{nM}{a}\right)\right\},$$

das für $n = 2$ sich wirklich auf M reducirt, nicht aber für die anderen Werte von n.

*) Astr. N., 88, Nr. 2092 u. 2097.

Pizzetti[6]) (p. 204) hat gezeigt, dafs, sofern die Beobachtungsfehler so klein sind, dafs man ihre Potenzen und Producte vernachlässigen darf, das Princip des arithmetischen Mittels aus den beiden Annahmen 2) und 4) sich erweisen lasse.

Durch eine eigentümliche sophistische Schlufsweise hat Bertrand[3]) (art. 143) die Unbeweisbarkeit und Ungenauigkeit der Regel des arithmetischen Mittels darzuthun versucht. Wenn man eine Gröfse mifst, meint er, so messe man dadurch auch alle ihre Functionen, z. B. das Quadrat, oder den Logarithmus der Mafszahl. Warum soll der wahrscheinlichste Wert des Quadrats, des Logarithmus nicht durch das arithmetische Mittel der Quadrate, der Logarithmen gegeben sein? Der wahrscheinlichste Wert der Gröfse selbst wäre dann $\sqrt{\frac{l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_n^2}{n}}$, beziehungsweise $\sqrt[n]{l_1 l_2 \cdots l_n}$. Den Hinweis auf directe Messungen glaubt er mit der Bemerkung hinfällig zu machen, es könnte ein Mechaniker an dem Mefsapparat eine Vorrichtung anbringen, durch welche, indem man die Gröfse selbst mifst, ihr Logarithmus beispielsweise angezeigt würde, und dieser wäre das Beobachtungsresultat. Pizzetti[6]) (p. 206), welcher Bertrand's Auffassung sehr treffend widerlegt, kommt zu dem Schlusse, dafs es ganz falsch und unzulässig sei, das Princip des arithmetischen Mittels, wenn es einmal als für directe Beobachtungen geltend angenommen worden, auf beliebige Functionen der beobachteten Gröfse auszudehnen.*)

Sehr bemerkenswerte Untersuchungen über das arithmetische Mittel und die „Mittelwerte" überhaupt hat De Morgan[3]) angestellt; dieselben sind später von Ferrero[1]) mit einigen Abänderungen weiter ausgeführt worden. Mit dem Namen Mittelwert werden darin solche symmetrische Functionen $f(l_1, l_2, \cdots l_n)$ belegt, welche die Eigenschaft besitzen, sich für $l_1 = l_2 = \cdots = l_n = l$ auf l zu reduciren; Eindeutigkeit und Stetigkeit sind dabei selbstverständliche Voraussetzung. De Morgan hat gezeigt, dafs alle derartigen Functionen sich auf die Form

$$f(l_1, l_2, \cdots l_n) = \frac{[l]}{n} + \frac{1}{2}(Q[\delta^2] + R[\delta_i \delta_j]) + \frac{1}{6}(S[\delta^3] + T[\delta_i^2 \delta_j] + U[\delta_i \delta_j \delta_k]) + \cdots \qquad (\alpha)$$

bringen lassen, worin die δ_i die mit einem beliebigen a gebildeten Differenzen $l_i - a$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ und $Q, R, S, \cdots$ Gröfsen bedeuten, deren Werte von der Natur der Function f, von a und von n abhängen. Aus dem Umstande, dafs sich über das dem arithmetischen Mittel $\frac{[l]}{n}$ folgende Aggregat auf der rechten Seite von (α) in betreff des Betrages

*) Als Ausnahme führt er Messungen an, die im Grunde von Weber-Fechner's psychophysischem Gesetze ausgeführt werden.

und des Vorzeichens keine bestimmte Aussage machen läſst, zog De Morgan den Schluſs, das arithmetische Mittel stelle unter allen Mittelwerten den a priori wahrscheinlichsten vor. Glaisher[2]) hat diese Folgerung als unhaltbar gekennzeichnet und das Resultat (α) auf seine wahre Bedeutung zurückgeführt. — Ferrero wählte für a das arithmetische Mittel, wodurch jedes δ_i in das entsprechende $-\lambda_i = l_i - \frac{[l]}{n}$ übergieng; weil nun $[\lambda] = 0$ und infolgedessen auch $[\lambda^2] + [\lambda_i \lambda_j] = 0$ ist, ergab sich ihm bei Beschränkung auf Glieder der zweiten Ordnung in den λ_i für die Mittelwerte der Ausdruck

$$f(l_1, l_2, \cdots l_n) = \frac{[l]}{n} + \frac{Q-R}{2}[\lambda\lambda]; \qquad (\beta)$$

da des weiteren gezeigt werden konnte, daſs $n\frac{Q-R}{2} = k$ niemals eine mit n wachsende Zahl ist, so war damit erwiesen, daſs, je kleiner $\frac{[\lambda\lambda]}{n}$, je weniger also die einzelnen Beobachtungsergebnisse von einander abweichen, um so enger alle Mittelwerte sich um das arithmetische Mittel gruppiren, und daſs daher die Wahl des letzteren um so berechtigter ist, je besser die Beobachtungen.

Von eigenartigen Gesichtspunkten ausgehend hat Fechner[2]) die Mittelwerte einer eingehenden Untersuchung unterzogen und dabei auch das arithmetische Mittel und seine Beziehung zum Fehlergesetz behandelt. Die Abhandlung geht von dem arithmetischen Mittel der Maſsverhältnisse von Collectivgegenständen aus, worunter zufällig variirende Exemplare einer Species verstanden werden, wie Beobachtungswerte einer und derselben physischen Gröſse, Maſse gleichartiger Dimensionen an verschiedenen Individuen einer Art, seien es Natur- oder Kunstobjecte u. dgl. Als analytisches Merkmal dieses Mittelwertes wird die Thatsache angeführt, daſs er Abweichungen λ hervorbringt, für welche $\Sigma\lambda = 0$ und „$\Sigma\lambda^2$ ein Min." ist. Jenen Mittelwert, welcher durch die Bedingung „$\Sigma|\lambda|$ ein Min." gekennzeichnet ist, nennt Fechner den Centralwert, untersucht seine Bestimmung und Bedeutung und sucht die Frage zu erledigen, wo er Berechtigung hat. Des weiteren werden die Potenzmittelwerte in Betracht gezogen, welche aus der Bedingung „$\Sigma\lambda^r$ ein Min. ($r \gtrless 2$)" hervorgehen. — Untersuchungen, welche mit den hier erwähnten mehrfache Beziehungen aufweisen, sind von Edgeworth[7])[8]) angestellt worden. — Eine allgemeine und umfassende Theorie der Mittelwerte, welche Beachtung verdient, hat Hauber[2]) gegeben.

56. Wir kehren nun zur Ableitung des Fehlergesetzes wieder zurück. Unter den Auffassungen dieses Gegenstandes steht ohne Zweifel wissenschaftlich am höchsten diejenige, welche von der Annahme ausgeht, jeder Beobachtungsfehler sei das Resultat der Vereinigung einer groſsen Anzahl sehr kleiner Fehler, welche verschie-

denen, von einander unabhängigen Ursachen entspringen. Diese Annahme ist aus der Natur des Gegenstandes hergeholt; Glaisher[2]) bezeichnet sie als die einzige wahrhaft philosophische Basis, auf welche das Gesetz der Häufigkeit der Beobachtungsfehler gegründet werden kann.

Die Entwicklung dieses Gedankens läfst deutlich drei Stadien erkennen, welche in den Voraussetzungen zum Ausdruck kommen, die man über die Wirkungsweise der Fehlerquellen aufgestellt hat. Wird im ersten Stadium an eine bestimmte Gröfse der Elementarfehler und ein bestimmtes Gesetz in ihrem Auftreten gedacht, so besteht der Fortschritt zum zweiten Stadium darin, dafs zwar das Häufigkeitsgesetz für die einzelnen Elementarfehler als verschieden und beliebig angenommen wird, mit der Einschränkung jedoch, dafs Fehlerbeträge, die nur im Vorzeichen sich unterscheiden, als gleich wahrscheinlich gelten; im dritten Stadium wird auch diese Einschränkung fallen gelassen.

Zum ersten Male ist die Anschauung, dafs der Fehler einer Beobachtung sich aus Elementarfehlern zusammensetze, von Young[1]) ausgesprochen worden in einer Arbeit, die zu den ersten Untersuchungen über die zweckmäfsigste Combination physikalischer Messungen zum Zwecke der Bestimmungen von Constanten gehört. Alle Elementarfehler werden als gleich angenommen, und weiter wird vorausgesetzt, jeder könne mit derselben Leichtigkeit positiv wie negativ ausfallen. Die Betrachtung wird an ein Würfelspiel angeknüpft; und wenn Young auch zu einer Aufstellung des Gesetzes des resultirenden Fehlers nicht kommt, so geht doch aus seiner Arbeit hervor, dafs ihm die Coefficienten der Entwicklung $(1 + 1)^n$ die relative Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Fehlerwerte bei n Ursachen vorgestellt haben.

Als eine unmittelbare Verwertung dieser Vorstellung ist die Hypothese von Hagen[1]) anzusehen, welcher annimmt, der Fehler einer Beobachtung sei das Ergebnis des Zusammentreffens einer sehr grofsen Anzahl von einander unabhängiger, gleicher, sehr kleiner Elementarfehler, von denen jeder einzelne mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ im positiven wie im negativen Sinne auf das Beobachtungsresultat einwirken kann. Die analytische Verfolgung dieses Gedankens, von Encke[3]) mit der wünschenswerten Strenge durchgeführt, liefert für den Gesamtfehler z das Gesetz

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon E}}\, e^{-\frac{z^2}{2\varepsilon E}}, \qquad (\alpha)$$

das die Herleitung als ein nur angenähert giltiges deutlich erkennen läfst; ε bedeutet die absolute Gröfse des Elementar-, E jene des gröfstmöglichen Gesamtfehlers.*)

*) Die von Seyfert[1]) mitgeteilte Entwicklung von $\varphi(z)$ ist im Wesen eine Wiedergabe der Hagen'schen Theorie. — Vgl. auch die Arbeit von Laquière.[1])

Eine der Hagen'schen gleichartige Vorstellung von der Entstehung eines Fehlers entwickelt Quetelet[2]) (lettres XV—XVII) und führt sie (p. 381 flg.) auch analytisch durch.

In die erste der oben unterschiedenen Kategorien ist auch die Ableitung des Fehlergesetzes zu zählen, welche Tait[1]) gegeben hat. Er geht dabei von der Annahme aus, der durch irgend eine Ursache veranlafste Fehler sei vergleichbar der Abweichung, welche das Ergebnis einer grofsen Anzahl von Ziehungen aus einer, weifse und schwarze Kugeln in bestimmtem Verhältnis enthaltenden Urne gegenüber dem wahrscheinlichsten Resultate aufweist. Ist p die apriorische Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen, q jene für das Ziehen einer schwarzen Kugel, n die Anzahl der Ziehungen, und sind α weifse, β schwarze Kugeln erschienen, so soll $\alpha - pn = qn - \beta$ als Mafs des Fehlers x angesehen werden, mit welchem dieses Ziehungsergebnis behaftet ist; Tait setzt daher $\alpha - pn = qn - \beta = mx$ und findet für das Zustandekommen dieses Resultats die Wahrscheinlichkeit

$$\varphi(x) = ce^{-\frac{m^2 x^2}{2npq}}. \qquad (\beta)$$

Er zeigt dann weiter, dafs ein aus mehreren Fehlerquellen hervorgehender Gesamtfehler, unabhängig von der Anzahl derselben und gleichgiltig, ob jeder Fehlerquelle, dargestellt durch eine Urne, dasselbe oder jeder ein anderes wahrscheinlichstes Ergebnis entspricht, ein Gesetz von der gleichen Form befolgt. Die Annahme, von welcher diese Deduction ausgeht, ist unhaltbar, weil sie zu der Ungereimtheit führt, jeder, aus was immer für einer Ursache entspringende Elementarfehler befolge das exponentielle Gesetz; wenn sich dann für den aus mehreren Elementarfehlern zusammengesetzten Totalfehler ein ebensolches Gesetz ergiebt, so ist das nur mehr eine selbstverständliche Folgerung aus jener Prämisse.

Des weiteren ist an dieser Stelle derjenigen Ableitung zu gedenken, welche Airy[2]) in seinem vorzüglichen Buche anführt. Indem er jeden Fehler als das Resultat einer grofsen Anzahl von Elementarfehlern ansieht, welche einzeln gleiche Gesetze befolgen, nimmt er auf Grund einer Laplace'schen Analyse[13]) (art. 18) das exponentielle Gesetz für den Totalfehler an. An der citirten Stelle behandelt Laplace die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dafs die algebraische Summe der bei n directen Beobachtungen begangenen Fehler innerhalb vorgegebener Grenzen gelegen sei; die dabei gemachten Voraussetzungen sind: 1) dafs n sehr grofs sei, 2) dafs alle Fehler einem und demselben Gesetze $\varphi(x)$ unterliegen, und 3) dafs $\varphi(x) = \varphi(-x)$ sei. Dieses Problem fällt aber im Wesen mit der Frage nach der Wahrscheinlichkeit eines aus n Quellen hervorgehenden Totalfehlers unter den analogen Voraussetzungen zusammen.

Den bedeutungsvollen Fortschritt, welcher in dem Aufgeben der

einengenden und der Natur der Sache wenig entsprechenden Annahme des gleichartigen Wirkens aller Fehlerursachen besteht, hat Bessel angebahnt; die bezügliche Arbeit[2]) ist. für die Entwicklung der Fehlertheorie von maſsgebender Bedeutung. Bessel befaſste sich zunächst mit der Combination von zwei, drei, vier Elementarfehlern, deren jeder ein anderes stetiges Gebiet und ein anderes Häufigkeitsgesetz besitzt; schon bei dieser kleinen Zahl concurrirender Fehlerquellen zeigten sich gewisse hervorstechende Eigenschaften im Gesetz des Totalfehlers. Die bezüglichen Rechnungen, deren Schwierigkeit im Wechsel der analytischen Darstellungsform des letztgedachten Gesetzes in verschiedenen Abschnitten des Wertgebiets des Gesamtfehlers liegt, sind später von Kummell[1]) und insbesondere von Schols[4]) mit Erfolg wieder aufgenommen worden; letzterer ist zu einer allgemeinen Formel für die Wahrscheinlichkeit gegebener Grenzen eines aus beliebig vielen Elementarfehlern zusammengesetzten Gesamtfehlers gelangt. Den wertvolleren Teil der Bessel'schen Untersuchung bildet die Ableitung des Fehlergesetzes aus der Annahme, der Fehler einer Beobachtung entstehe durch das Zusammenwirken einer groſsen Anzahl unabhängiger Fehlerursachen, deren jede nach irgend einem Gesetze und zwischen irgend welchen Grenzen wirkt, jedoch so, daſs gleich groſse positive wie negative Fehler gleich häufig vorkommen und daſs die mittleren Quadrate der einzelnen Elementarfehler Gröſsen gleicher Ordnung sind. Die letzte Voraussetzung enthält die Forderung einer gewissen Ebenmäſsigkeit in der Wirkungsweise der einzelnen Fehlerquellen, durch welche ausgeschlossen werden soll, daſs eine oder die andere die übrigen derart überragt, daſs sie auf den Gesamtfehler einen vorwaltenden Einfluſs ausübt; bei gut ausgebildeten Messungsmethoden und Meſsinstrumenten wird die Voraussetzung erfüllt sein. Ist $\varphi_i(x_i)$ das Gesetz des Elementarfehlers x_i $(i = 1, 2, \cdots n)$, $K_i'' = \int x_i^2 \varphi_i(x_i) dx_i$ sein mittleres Quadrat (das Integral über das Gebiet von x_i erstreckt), so findet Bessel unter den in der Hypothese ausgesprochenen Voraussetzungen für den Totalfehler $z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ das näherungsweise geltende Gesetz

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[K'']}} e^{-\frac{z^2}{2[K'']}}, \qquad (\gamma)$$

worin sich die Summe $[K'']$ über alle K_i'' ausdehnt.

Die letzte, mit der Natur der Sache nicht recht verträgliche Einschränkung, die in Bessel's Annahme noch geblieben ist und dahin geht, daſs das Häufigkeitsgesetz eines jeden Elementarfehlers durch eine gerade Function der Fehlergröſse dargestellt sei, hat Crofton[2]) zuerst aufgegeben. Er geht von der Hypothese aus, der Fehler einer Beobachtung entstehe durch das Zusammenwirken einer

sehr grofsen Anzahl unabhängiger Fehlerquellen, deren jede, wenn sie allein wirkte, Fehler von sehr geringem Betrage hervorbrächte im Vergleich zu jenen, welche aus der Combination aller übrigen Ursachen hervorgehen. Unter eingehender Beleuchtung aller Detailfragen, welche hier in Betracht kommen, hat Crofton diese Hypothese auf drei verschiedene Arten analytisch durchgeführt: zwei Ableitungen finden sich in der oben citirten grofsen Abhandlung, die dritte im art. 48 des Artikels „Probability".[4]) Das Resultat ist folgendes: Bestimmt $\varphi_i(x_i)$ das Gesetz des Elementarfehlers x_i $(i = 1, 2, \cdots n)$, sind $K_2' = \int x_i \varphi_i(x_i)\,dx_i$ und $K_i'' = \int x_i^2 \varphi_i(x_i)\,dx_i$ die mittleren Werte seiner ersten und zweiten Potenz (die Integrale über das Gebiet von x_i ausgedehnt), so befolgt der Totalfehler

$$z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

näherungsweise das Gesetz

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi([K''] - [K'^2])}}\, e^{-\frac{(z-[K'])^2}{2([K'']-[K'^2])}}; \qquad (\delta)$$

darin erstrecken sich die durch die eckigen Klammern angedeuteten Summen über alle Elementarfehler. Die Formel geht in jene (γ), also dem Wesen nach in das Gaufs'sche Gesetz [(γ) des Art. 54] über, nicht allein, wenn jeder einzelne Elementarfehler symmetrisch wirkt (Bessel'sche Voraussetzung), sondern auch dann, wenn die Fehlerursachen gegen einander so abgeglichen sind, dafs der Gesamtfehler frei ist von einem constanten Anteil, d. h. wenn $\int z\varphi(z)\,dz = 0$ ist für das ganze Gebiet von z.

Aus einer Hypothese von demselben Grade der Allgemeinheit wie die Crofton'sche hat in jüngster Zeit Pizzetti[6]) (parte prima) eine Ableitung des Fehlergesetzes gegeben, die in mehrfacher Beziehung von Interesse ist. Über das Gesetz des einzelnen Elementarfehlers wird zunächst keine Voraussetzung gemacht, auch nicht die, dafs sein Gebiet stetig sei; jedem Werte x_i, dessen der Fehler aus der Ursache C_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ fähig ist, wird eine Wahrscheinlichkeit X_i zugeordnet; es ist dann $\sum_{a_i}^{b_i} X_i = 1$; ferner bedeuten $\sum_{a_i}^{b_i} x_i X_i = K_i'$ und $\sum_{a_i}^{b_i} x_i^2 X_i = K_i''$ den mittleren Wert der ersten Potenz und des Quadrates des aus C_i entspringenden Elementarfehlers, wenn a_i, b_i die äufsersten Werte sind, welche er annehmen kann. Pizzetti setzt sich als Ziel die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dafs der Totalfehler $z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ in einem

endlichen Intervall $(0, 2t)$ enthalten sei; mit Benützung des Discontinuitätsfactors

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(z-t)u\sqrt{-1}} \frac{\sin ut}{u}\, du,$$

der für Werte von z aus $(0, 2t)$ gleich 1 und für alle anderen gleich 0 ist, findet er für diese Wahrscheinlichkeit zunächst den Ausdruck:

$$P_{2t} = \frac{1}{\pi}\sum_{a_1}^{b_1}\sum_{a_2}^{b_2}\cdots\sum_{a_n}^{b_n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(z-t)u\sqrt{-1}} X_1 X_2 \cdots X_n \frac{\sin ut}{u}\, du$$

und weiter, wenn R das Product der Moduli, ψ die Summe der Amplituden der Complexen $\sum_{a_i}^{b_i}{}_{x_i} X_i e^{u x_i \sqrt{-1}}$ bedeutet,

$$P_{2t} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} R \cos(\psi - ut) \frac{\sin ut}{u}\, du.$$

Um zu einem verwendbaren Näherungsausdruck hierfür zu gelangen, sucht Pizzetti die Grenze dieses Ausdruckes für eine unendlich wachsende Anzahl von Ursachen, wobei er die Voraussetzung macht, dafs alle Ursachen von gleicher Bedeutung seien oder dafs zum mindesten solche, deren Wirkung die der anderen namhaft übertrifft, nur in endlicher Zahl sich vorfänden. Er kommt so zu der Formel

$$P_z = \frac{1}{\sqrt{2\pi[K'' - K'^2]}}\int_0^z e^{-\frac{(z-[K'])^2}{2[K''-K'^2]}}\, dz \tag{ε}$$

für die Wahrscheinlichkeit, dafs der resultirende Gesamtfehler in das Intervall $(0, z)$ falle; nach einem in Art. 53 erwähnten Vorgange ergiebt sich daraus das Gesetz $\varphi(z)$ des Totalfehlers übereinstimmend mit (δ).

57. Es soll nun in Kürze noch einiger Ableitungen des Fehlergesetzes gedacht werden, die zwar vor der strengen Kritik nicht standzuhalten vermögen, die aber vielseitige Beachtung gefunden haben und zum Teil historisches Interesse beanspruchen dürfen.

Nach einem Berichte Abbe's[1]) war Adrain[1]) noch vor Gaufs, im Jahre 1808, zu einem Ausdruck für das Fehlergesetz gelangt, der im Wesen mit dem dafür jetzt allgemein angenommenen Exponentialgesetz übereinstimmt. Die Annahme, welche der Ableitung zugrundeliegt, besteht in folgendem: Ist das zusammenhängende Streckenpaar

AB, BC gemessen und statt dessen $\overline{Ab} = a$, $\overline{bc} = b$ gefunden worden, so ist die wahrscheinlichste Verteilung des Gesamtfehlers $\overline{cC} = E$ auf die Strecken diejenige, welche der Gleichung $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ entspricht; dabei bedeuten x, y die in den Einzelresultaten a, b zu befürchtenden Fehler. Zur Kritik dieser Deduction vergleiche man Glaisher[2]) und Czuber[10]) (p. 100ff.).

Gelegentlich der Besprechung von Quetelet's „Lettres sur la théorie des probabilités" hat Herschell[1]) einen mechanischen Vorgang benützt, um mit Hinzuziehung zweier Annahmen eine Ableitung des Fehlergesetzes auf ihn zu gründen. Ein Stein wird aus einer Höhe geworfen in der Absicht, eine Marke mit ihm zu treffen; seine Abweichung von der Marke wird als der begangene Fehler aufgefaſst. Der ersten Annahme zufolge soll die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung nur von deren Gröſse und nicht auch von der Richtung abhängen; legt man ferner durch die Marke ein rechtwinkliges System, so soll, und das ist die zweite Annahme, eine beliebige Abweichung als das Resultat des Zusammentreffens zweier Abweichungen in Richtung der beiden Axen, diese Abweichungen als unabhängige Ereignisse gedacht, angesehen werden. An der Herschell'schen Deduction ist vielfache, zumeist abfällige Kritik geübt worden, so durch Ellis[2]), Glaisher[2]), Donkin (Phil. Mag. 2, 1852, p. 55ff.); sie hat indessen in späteren Schriften auch Aufnahme gefunden, wie bei Thomson and Tait (Treatise on Natural Philosophy), bei Natani[1]). Der ihr zugrundeliegende Gedankengang ist der nämliche wie in dem Scheibenproblem, welches Bertrand und Poincaré als Beispiel fehlerhafter Anwendung des Satzes von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit anführen (s. Art. 14).

Eine Herleitung des Fehlergesetzes, die von Donkin[2]) stammt, geht von folgenden Betrachtungen aus. Ist $\varphi(x - a)dx$ die Wahrscheinlichkeit, daſs der Wert einer Gröſse, für welche eine Beobachtung den Wert a ergab, zwischen x und $x + dx$ liege, so wird auf Grund einer unter ganz gleichen Verhältnissen angestellten Beobachtung b dieselbe Wahrscheinlichkeit durch $\varphi(x - b)dx$ auszudrücken sein, auf Grund beider Beobachtungen aber durch

$$C\varphi(x - a)\varphi(x - b)dx,$$

wobei C eine Constante bedeutet, die so zu bestimmen wäre, daſs das Integral dieses Ausdrucks, über die möglichen Grenzen von x ausgedehnt, den Wert 1 annimmt. Da nun unter den vorliegenden Umständen, so nimmt Donkin an, $\frac{a + b}{2}$ der wahrscheinlichste Wert von x ist, so muſs einer zweiten „natürlichen und einleuchtenden Annahme" zufolge dieselbe Wahrscheinlichkeit auch durch einen Ausdruck von der Gestalt

$$\chi\left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx$$

darstellbar sein; aus der Functionalgleichung

$$C\varphi(x-a)\varphi(x-b) = \chi\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

wird dann die Form von φ abgeleitet, die übereinstimmt mit der Gaufs'schen.

Auf eine eigenartige Grundlage suchte Gosiewski[1]) das Fehlergesetz zu stützen, nämlich auf eine von ihm vermutete Analogie zwischen dem Maxwell'schen Gesetz der Geschwindigkeiten der Moleküle in einem vollkommenen Gase und dem Gesetz der Fehlerverteilung. Man vergleiche hierzu Bertrand[3]) (p. 30).

58. Eine der wichtigsten Fragen der Fehlertheorie richtet sich nach der Genauigkeit einer Beobachtungsreihe. Der Begriff bedarf zunächst der Definition. Eine solche wird in befriedigender Weise nur dann zu geben sein, wenn es sich um die Vergleichung von Beobachtungsreihen handelt, deren Fehler gleichartigen Gesetzen folgen. Man wird dann sagen können: Ist bei einer Beobachtungsreihe die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers aus dem Intervall $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ ebenso grofs wie bei einer anderen die eines Fehlers aus dem Intervall $(h\varepsilon, h(\varepsilon + d\varepsilon))$, so ist es naturgemäfs, der ersten Reihe eine h-mal so grofse Genauigkeit zuzusprechen als der zweiten. Nimmt man an, beide Reihen befolgten das exponentielle Gesetz, die erste in der Form $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}$, die andere in der Form $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon^2}$, so besteht zwischen ihnen das in der obigen Festsetzung ausgesprochene Verhältnis; schreibt man also der zweiten Reihe die Genauigkeit 1 zu, so hat die erste die Genauigkeit h. Gaufs[1]) (art. 178) hat dem Parameter h den Namen „Präcisionsmafs der Beobachtungen" gegeben, dies jedoch in anderer Weise begründet. Ein Fehler zwischen den Grenzen $-\delta, \delta$ bei der zweitgedachten Beobachtungsreihe hat die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\delta e^{-t^2} dt;$$

dieselbe Wahrscheinlichkeit kommt bei der ersten Beobachtungsreihe einem Fehler zwischen den Grenzen $-\frac{\delta}{h}, \frac{\delta}{h}$ zu; denn es ist

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\delta}{h}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\delta e^{-t^2} dt;$$

daher verdient, so schliefst Gaufs, die erste Reihe für h-mal genauer zu gelten als die zweite. Man kann dies auch dahin aus-

sprechen, daſs die Genauigkeiten zweier dem Exponentialgesetz gehorchenden Beobachtungsreihen im umgekehrten Verhältnis gleichwahrscheinlicher Fehlergrenzen zu einander stehen.

Statt durch das Präcisionsmaſs kann man die Genauigkeit der Beobachtungen auch durch ihr Gewicht charakterisiren. Man schreibt einer Beobachtung, welche dem Gesetze $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ folgt, das (ganzzahlige) Gewicht p zu, wenn sie in Bezug auf die Folgerungen, die man aus ihr für die beobachtete Gröſse ziehen kann, p übereinstimmende Beobachtungen von der Art $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon^2}$ aufwiegt, sofern man eine Beobachtung dieser letzteren Art als Gewichtseinheit annimmt.*) Die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von p Fehlern irgend eines Betrags ε ist hier proportional $e^{-p\varepsilon^2}$; die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers vom selben Betrag dort ist proportional $e^{-h^2\varepsilon^2}$; beide Wahrscheinlichkeiten sind für alle Fehlerbeträge zu einander proportional und infolgedessen gleich, wenn $p = h^2$. Ohne also auf eine Gewichtseinheit Bezug zu nehmen, kann man sagen, daſs die Gewichte zweier Beobachtungen den Quadraten ihrer Präcisionsmaſse proportional seien.

Wie schon bemerkt, lassen die vorgeführten Definitionen für Präcision und Gewicht nicht auf alle Fehlergesetze sich anwenden und führen auch nicht bei allen zu einer so einfachen Beziehung beider Gröſsen. Nach einer Untersuchung Bertrand's[3]) (p. 210, ferner Compt. rend. 105, p. 1099) ist dies nur bei Fehlergesetzen von der allgemeinen Form $\varphi(\varepsilon) = Ce^{-a\varepsilon^{\mu+1}}$ (C, a, μ bedeuten Constanten) der Fall, und zwar ist das Gewicht der $(\mu + 1)$-ten Potenz der Präcision proportional. Das Gauſs'sche Gesetz ist ein besonderer Fall davon.

Statt des Präcisionsmaſses kann zur Beurteilung der Genauigkeit einer Gattung von Beobachtungen ihr wahrscheinlicher Fehler, d. i. diejenige Fehlergrenze benützt werden, für deren Unterschreitung wie Überschreitung je die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ besteht. Bezeichnet man sie mit r, so hat ihre Bestimmung aus dem Ansatze

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-r}^{r} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{rh} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \qquad (\alpha)$$

zu erfolgen, welcher $rh = 0{\cdot}476936 (= \varrho)$ ergiebt; infolgedessen verhalten sich die wahrscheinlichen Fehler zweier Beobachtungsarten umgekehrt wie ihre Präcisionsmaſse und sind daher wie diese zur

*) Über die mechanische Definition des Gewichts vgl. man Donkin[1]), bezüglich der obigen Definition Bertrand[3]), p. 208.

Beurteilung der Genauigkeit geeignet. Der wahrscheinliche Fehler ist von Gaufs[3]) (art. 2) in die Theorie eingeführt worden.

Zu einer unbegrenzten Reihe theoretisch gleichberechtigter Genauigkeitsmafse führen die mittleren Werte der absoluten Beträge der verschiedenen Fehlerpotenzen (s. Art. 53), weil sich bei Geltung des exponentiellen Gesetzes zeigt, dafs dieser mittlere Wert der betreffenden Potenz des Präcisionsmafses umgekehrt proportional ist. Gleichgiltig nämlich, ob m eine gerade oder ungerade Zahl, ist der mittlere Wert von $|\varepsilon^m|$

$$K_m = 2\int_0^\infty \varepsilon^m \varphi(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{h^m\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{\frac{m-1}{2}} c^{-t} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{h^m\sqrt{\pi}}, \quad (\beta)$$

wodurch die ausgesprochene Behauptung erwiesen ist. Insbesondere hat man

$$K_1 = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \quad K_2 = \frac{1}{2h^2}, \quad K_3 = \frac{1}{h^3\sqrt{\pi}}, \quad K_4 = \frac{3}{4h^4},$$
$$K_5 = \frac{2}{h^5\sqrt{\pi}}, \quad K_6 = \frac{15}{8h^6} \quad \text{u. s. w.} \qquad (\gamma)$$

Welches von diesen Fehlerpotenzmitteln zu wählen sei, ist nicht blofs eine Frage des Arbeitsaufwandes — von diesem Gesichtspunkte wäre K_1 allen anderen vorzuziehen —, sondern auch eine solche der Wahrscheinlichkeitstheorie, welche auf das folgende Problem der apriorischen Wahrscheinlichkeitsrechnung zurückkommt: Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die Summe (oder das Mittel) der m-ten Potenzen der wahren Fehler von n erst anzustellenden Beobachtungen zwischen gegebenen Grenzen enthalten sein werde, wobei die Fehler ihrem Betrage nach zu nehmen sind? Diese Fragestellung stammt von Gaufs[3]) (art. 5), der dabei auf die Analyse hinweist, welche Laplace[13]) (art. 19) für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit vorgezeichneter Grenzen für die Summe der Beträge der ersten und zweiten Fehlerpotenzen unter der Voraussetzung eines sehr grofsen n und eines Fehlergesetzes gegeben hat, das nur die Bedingung $\varphi(-\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)$ zu erfüllen braucht. Durch Verallgemeinerung dieser Analyse [s. Czuber[10]), (p. 130ff.)] ergiebt sich zunächst, dafs

$$nK_m$$

der wahrscheinlichste Wert der Summe der absoluten Beträge der m-ten Potenzen von n anzustellenden Beobachtungen sei, welche dem Gesetze $\varphi(\varepsilon)$ folgen, und weiter, dafs die Wahrscheinlichkeit, es werde die genannte Summe von ihrem wahrscheinlichsten Werte innerhalb der Grenzen z und $z + dz$ abweichen, gleichkommt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n\left(K_{2m}-K_m^2\right)}}\, e^{-\frac{z^2}{2n(K_{2m}-K_m^2)}}\, dz\,, \tag{δ}$$

sodafs der Fehler in der gedachten Summe unter den namhaft gemachten Voraussetzungen das Gaufs'sche Gesetz befolgt. Das Präcisionsmafs ist dabei

$$\frac{1}{\sqrt{2n\left(K_{2m}-K_m^2\right)}},$$

woraus sich der wahrscheinliche Fehler in jener Summe gleich

$$\varrho\sqrt{2n\left(K_{2m}-K_m^2\right)}$$

ergiebt. Hiernach ist also der Wert der aus n Gliedern bestehenden Summe $[|\varepsilon^m|]$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zwischen den Grenzen $nK_m \pm \varrho\sqrt{2n\left(K_{2m}-K_m^2\right)}$, der mittlere Wert von $|\varepsilon^m|$ mit der nämlichen Wahrscheinlichkeit zwischen den Grenzen

$$K_m\left[1 \mp \varrho\sqrt{\frac{2}{n}\,\frac{K_{2m}-K_m^2}{K_m^2}}\right] \tag{ε}$$

zu erwarten.

Nimmt man an, dafs die Fehler ε das Gesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}$ befolgen, so sind K_m, K_{2m} durch ihre aus (β) stammenden Werte zu ersetzen, und aus dem symbolischen Ansatze

$$\frac{[|\varepsilon^m|]}{n} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{h^m}\left(1 \mp \varrho\sqrt{\frac{2}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)-\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}}\right)$$

ergeben sich die wahrscheinlichen Grenzen von h:

$$\sqrt[m]{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\;\sqrt[m]{\frac{n}{[|\varepsilon^m|]}}\left(1 \mp \frac{\varrho}{m}\sqrt{\frac{2}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)-\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}}\right),$$

und daraus wiederum die wahrscheinlichen Grenzen des wahrscheinlichen Fehlers r:

$$\frac{\varrho}{\sqrt[m]{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}}\sqrt[m]{\frac{[|\varepsilon^m|]}{n}}\left(1 \mp \frac{\varrho}{m}\sqrt{\frac{2}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)-\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}}\right). \tag{ζ}$$

Die Sicherheit in der Bestimmung von r hängt ab von dem Factor, mit welchem $\frac{1}{\sqrt{n}}$ in der Klammer verbunden ist, also von dem Ausdruck

$$\frac{\varrho}{m}\sqrt{2\,\frac{\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)-\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}}\,; \qquad (\vartheta)$$

Gaufs[3]) (art. 6) hat seinen Wert für die Fälle $m = 1$ bis $m = 6$ angegeben, und zwar

für $m = 1$	2	3	4	5	6
0·5095841	0·4769363	0·4971987	0·5507186	0·6355080	0·7557764,

und daraus den Schlufs gezogen, dafs die Bestimmung von h oder r aus den Fehlerquadraten ($m = 2$) die vorteilhafteste, weil die sicherste, sei. Durch Weiterführung der Rechnung bis $m = 10$ zeigte Jordan[1]) das weiter anhaltende Wachsen der Zahlen der obigen Reihe; allgemein erwiesen hat es Helmert[2]) (p. 213), indem er durch näherungsweise Darstellung der Gammafunctionen mittels der Stirling'schen Formel den Ausdruck (ϑ) auf die Form

$$\frac{\varrho\sqrt{2}}{m}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2e}}\left(\frac{2m-1}{m-1}\right)^m-1} \qquad (\vartheta^*)$$

brachte [vgl. auch Pizzetti[6]) (p. 261)].

Die vorstehenden Untersuchungen fufsen auf der Voraussetzung eines sehr grofsen n. Ist diese nicht erfüllt, vielmehr n nur eine kleine Zahl, dann befolgt, wie Helmert[2]) gezeigt hat, der in der Summe $[|\varepsilon^m|]$ zu befürchtende Fehler z wohl nicht mehr das Gaufs'sche Gesetz; aber schon bei einem mäfsig grofsen n findet eine solche Annäherung an dieses statt, dafs man an dem theoretischen Ergebnis festhalten kann, die Beurteilung der Genauigkeit nach dem Durchschnitt der Fehlerquadrate sei unter allen die sicherste.

Bertrand[3]) (p. 194—195, s. auch Compt. rend. 106, p. 440 ff.) hat, um die Genauigkeit der Bestimmung von r zu verschärfen, mit anderen Worten, den Fehler des Ansatzes

$$\frac{[|\varepsilon^m|]}{n} = K_m$$

möglichst einzuschränken, den Vorschlag gemacht, $[|\varepsilon^m|]$ mit einem Factor $\varkappa_m$ zu versehen derart, dafs der durchschnittliche Wert von

$$(\varkappa_m[|\varepsilon^m|] - nK_m)^2$$

ein Minimum werde. Die rechnerische Verfolgung dieses Gedankens führt auf

$$\varkappa_m = \frac{n K_m^2}{K_{2m} + (n-1) K_m^2},$$

sodafs man beispielsweise bei $m = 2$ statt $r = \varrho\sqrt{2}\sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}$, wie es aus ($\gamma$) folgt, zu setzen hätte $r = \varrho\sqrt{2}\sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n+2}}$; wie man bemerkt, ist die Correctur bei grofsem n bedeutungslos und bei kleinem n fragwürdig, weil dann die Bestimmung von r ohnehin wenig Anspruch auf Sicherheit hat.

Zur Litteratur des soeben behandelten Gegenstandes sei noch das folgende bemerkt. In einer beachtenswerten Arbeit war Hauber[1]) von der folgenden allgemeinen Fragestellung ausgegangen: Es sei ε_i der wahre Fehler der i-ten von n Beobachtungen, $\varphi_i(x)$ das Gesetz, welches er befolgt; $F(x)$ irgend eine gegebene Function des Fehlers, γ_i ein beliebiger Factor; ferner sei

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\varphi_i(x)dx = K_1^{(i)}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x)\varphi_i(x)dx = K_2^{(i)},$$

$$L^{(i)2} = K_2^{(i)} - K_1^{(i)2};$$

gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit vorgezeichneter Grenzen der Summe $\sum_1^n {}^i \gamma_i F(\varepsilon_i)$. Die Analyse ergiebt die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\Theta e^{-t^2}dt,$$

dafs die genannte Summe zwischen den Grenzen

$$\Sigma\gamma_i K_1^{(i)} \mp \theta\sqrt{2\Sigma\gamma_i^2 L_i^2}$$

eingeschlossen sei. Aus diesem Resultat werden dann durch Specialisirung von $F(x)$ und γ die Fälle $\Sigma|\varepsilon_i|$, $\Sigma|\varepsilon_i^2|$ und $\Sigma|\varepsilon_i^m|$ abgeleitet. Die Gröfse $K_1^{(i)}$ ist dasjenige, was in der späteren Litteratur [z. B. Pizzetti[6]) (p. 151)] als das totale Risico des Fehlers ε_i bezeichnet wird, wenn man den Nachteil eines begangenen Fehlers nach der Function $F(\varepsilon_i)$ beurteilt. — Sehr eingehende Untersuchungen über den vorliegenden Gegenstand, auf die bereits oben Bezug genommen wurde, hat Helmert[2]) durchgeführt; man vergleiche auch seine Kritik zu der, der gleichen Frage geltenden Arbeit von Mees[1]), die in demselben Bande der Zeitschr. f. M. u. Ph. enthalten ist wie

diese. — Aus der jüngsten Zeit stammt eine analytische bemerkenswerte Behandlung der folgenden Fragen durch Lipschitz[1]): Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daſs das arithmetische Mittel der m-ten (geraden) Potenzen von n zu gewärtigenden Fehlern, welche sämtlich dem Gesetze $\varphi(x)$ folgen $\{\varphi(-x) = \varphi(x)\}$, zwischen gegebenen Grenzen $-g$, g enthalten sei; und welches ist die Wahrscheinlichkeit gegebener Grenzen $-g, g$ für die Differenz $\frac{[|\varepsilon^m|]}{n} - K_m$? Die Antwort auf diese Fragen giebt Lipschitz in den beiden Ausdrücken:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \sqrt{\frac{n}{2K_{2m}}}\, g\, e^{-\frac{n}{2K_{2m}} g^2 y^2}\, dy\,,$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \sqrt{\frac{n}{2\left(K_{2m} - K_m^2\right)}}\, g\, e^{-\frac{n}{2\left(K_{2m} - K_m^2\right)} g^2 y^2}\, dy\,.$$

Das halbe Differential des zweiten Ausdruckes in Bezug auf g ergiebt, wenn man $ng = z$ setzt, thatsächlich wieder den oben angeführten Ausdruck (δ).

In der oben erwähnten Arbeit hat Helmert auch den Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit abgeleitet, daſs die Summe der Quadrate einer beliebigen Anzahl wahrer Fehler, welche sämtlich dem Gesetze $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}$ folgen, in das differentielle Intervall $(u, u + du)$ falle, und fand für n Fehlerquadrate die Formel

$$\frac{h^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, u^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-h^2 u}\, du\,;$$

bezüglich der Ableitung derselben vergleiche man Czuber[10]) (p. 145—150) und Pizzetti[6]) (p. 256).

Gauſs[3]) (art. 7) hat darauf hingewiesen, daſs es möglich sei, die Genauigkeit einer Beobachtungsreihe, statt nach der Gesamtheit aller, nach der Gröſse eines einzelnen Fehlers zu beurteilen, und zwar nach dem mittelsten (oder dem arithmetischen Mittel der beiden mittleren*)) t in der steigend oder fallend geordneten Reihe der Fehlerbeträge. Ohne Begründung führt er an, daſs sich aus t die wahrscheinlichen Grenzen für den wahrscheinlichen Fehler wie folgt ergeben:

$$t\left(1 \mp e\varrho^2 \sqrt{\frac{\pi}{8n}}\right),$$

d. i. in Zahlen (da $\varrho = 0{\cdot}476936$):

*) Wenn die Anzahl der Fehler gerade ist.

$$t\left(1 \mp \frac{0 \cdot 786716}{\sqrt{n}}\right);$$

daraus geht hervor, dafs diese Methode noch unsicherer wäre als die Genauigkeitsbestimmung durch das Mittel der sechsten Fehlerpotenzen. Zur Begründung dieses Resultates, welche zuerst von Dirichlet gegeben ward, vergleiche man Encke[2]) (1834, p. 294ff.) und Rebstein[1]).

Zum Schlusse noch eine Bemerkung. Wenn man das Fehlergesetz $\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ durch eine Curve darstellt, so erhalten auch die Genauigkeitsmafse wie: der durchschnittliche Fehler $\vartheta = K_1$, der mittlere $\mu = \sqrt{K_2}$, der wahrscheinliche $r = \frac{\varrho}{h}$, geometrische oder mechanische Bedeutung. Mit solchen geometrischen Eigenschaften der Fehlerwahrscheinlichkeitscurve, mit der Deutung von μ, r u. dgl. hat sich d'Arrest[1]) in einer eigenen Arbeit befafst.

Die vorstehenden Untersuchungen bilden die theoretische Grundlage für die Beurteilung der Genauigkeit von Beobachtungen; da sie jedoch die Kenntnis der wahren Beobachtungsfehler voraussetzen, so können sie unmittelbare Verwendung nicht finden. Die Heranziehung zugänglicher Gröfsen zu dem gleichen Zwecke hängt von der Natur und der Lösung des Ausgleichungsproblems ab. Wir stellen daher diesen Gegenstand zunächst zurück und beschäftigen uns mit dem Ausgleichungsproblem selbst, d. i. mit der Frage nach der zweckmäfsigsten Combination der Beobachtungen zum Zwecke der Bestimmung unbekannter Elemente vom Standpunkte der Fehlertheorie.

59. Der Typus, auf welchen die Probleme der Ausgleichungsrechnung zurückführbar sind, besteht in folgendem: Eine der unmittelbaren Beobachtung zugängliche Gröfse V ist Function von ω unbekannten Elementen; jede Beobachtung von V führt zu einer Gleichung zwischen den Elementen, dem beobachteten Wert von V und dem ihm anhaftenden Fehler. Die Gleichung kann, wie dies häufig der Fall, von Natur aus linear sein in Bezug auf die unbekannten Elemente; ist sie es nicht, so kann dieser Zustand durch einen Näherungsprocefs herbeigeführt werden. Man verschafft sich auf einem geeigneten Wege gute Näherungswerte der Elemente, bringt an diesen Correctionen an und behält von der Taylor'schen Entwicklung des V nach diesen Correctionen nur die Glieder mit ihren ersten Potenzen bei. Die Gleichung darf also unter allen Umständen in der Form

$$\varepsilon_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots \qquad (\alpha)$$

vorausgesetzt werden; darin bedeuten $x, y, z, \cdots$ die unbekannten Elemente selbst oder die an ihren Näherungswerten anzubringenden

Correctionen*); a_i, b_i, c_i, $\cdots$ entweder a priori bekannte oder durch Beobachtung gewonnene Gröſsen, die aber in dem letzteren Falle als fehlerfrei angesehen werden; l_i bei linearem Zusammenhang und wenn $x, y, z, \cdots$ die Elemente selbst sind, den beobachteten Wert von V, wenn dagegen $x, y, z, \cdots$ Correctionen bedeuten, den Unterschied aus dem beobachteten und dem mit Hilfe der Näherungswerte berechneten Werte von V; ε_i endlich den bei der Beobachtung begangenen Fehler.

Sind $n (> \omega)$ Beobachtungen ausgeführt worden und besteht zwischen den zugehörigen homogenen Functionen $a_i x + b_i y + c_i z + \cdots$ keine lineare Abhängigkeit, so lautet das Ausgleichungsproblem dahin, für die Fehler $\varepsilon_i (i = 1, 2, \cdots n)$ ein solches Wertsystem zu finden, daſs sämtlichen Gleichungen (α) durch ein Wertsystem der Elemente $x, y, z, \cdots$ genügt werde, und daſs dieses Wertsystem unter allen das vorteilhafteste sei.

Das Gröſsensystem, das solchermaſsen an die Stelle der ε_i tritt, ist gewiſs immer von dem System der wahren Beobachtungsfehler verschieden und wird als das System der scheinbaren Fehler**) bezeichnet. In gleicher Weise weicht das so errechnete Wertsystem $x, y, z, \cdots$ von den wahren Werten der Elemente (oder ihrer Correctionen) ab und soll allgemein das System der plausibelsten Werte genannt werden, eine Benennung, von der Gauſs[5]) (art. 21) Gebrauch gemacht hat.

Die Formulirung des Problems ist insofern unbestimmt, als sie keine Aussage darüber enthält, welche analytische Eigenschaft unter dem Begriff der „vorteilhaftesten Werte“ der Elemente zu verstehen sei.

Den ersten Versuch einer systematischen Lösung des Problems hat Laplace***) unternommen, dabei einem Vorschlage Boscowich's folgend; das ohne Begründung aufgestellte Princip ging dahin, 1) die Summe der absoluten Werte der Fehler zu einem Minimum†), 2) ihre algebraische Summe der Null gleich zu machen.

Diejenige Lösung, welche zur allgemeinen Geltung gekommen ist, wurde zuerst durch Legendre[1]) publicirt; er entwickelt sie auf

---

*) Die Benützung von Näherungswerten der Elemente auch bei linearem Zusammenhange geschieht nicht aus principiellen, sondern aus praktischen Gründen; über ihren Wert hat Gauſs[8]) sich eingehend ausgesprochen.

**) Die in der Litteratur dafür gebräuchlichen Bezeichnungen sind: „erreurs présumées“ oder „erreurs apparentes“; bei den englischen Geometern „residuals“, bei den italienischen „residui“ oder „scostamenti“.

***) Die Arbeit ist 1792 entstanden. Man vgl. Méc. cél. II, art. 39—42 und Hist. Ac. Par. pour l'a. 1789.

†) Andrae[3]) hat sich mit der Frage beschäftigt, wie aus einer Reihe gleich verläſslicher Beobachtungen zwei, drei, $\cdots$ derselben zur Bildung des vorteilhaftesten Wertes der gemessenen Gröſse auszuwählen wären, statt alle dazu zu verwenden; die Wahl einer einzigen Beobachtung führte ihn auf dieses Laplace'sche Princip.

vier Seiten des Anhangs der im März 1805 vollendeten und 1806 erschienenen Schrift „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes“. Das zugrundegelegte Princip, darin bestehend, dafs die Summe der Quadrate der Fehler zu einem Minimum gemacht wird, benennt Legendre als „Méthode des moindres quarrés“, und dieser Name hat sich erhalten und ist in alle Litteraturen übergegangen. Spätere Versuche, die kurze Bezeichnung „Methode der kleinsten Quadrate“ durch die ausführlichere, auch zutreffendere: „Methode der kleinsten Quadratsumme“, zu ersetzen, sind vergeblich geblieben. *)

Legendre versuchte es nicht, das Princip zu begründen; er führt nur verschiedene Momente an, welche zu seiner Unterstützung dienen sollen, so den Umstand, dafs es genau so viele Gleichungen liefere, als es zu bestimmende Elemente giebt; dafs die Regel des arithmetischen Mittels als ein besonderer Fall darin enthalten sei; dafs es mit den Eigenschaften des Schwerpunktes eine Analogie aufweise.

Über die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate, welche in späterer Zeit Gegenstand so vielfältiger und tiefgehender Untersuchungen war, werden wir alsbald berichten. Hier möge nur festgestellt werden, dafs die Methode, welche ursprünglich vornehmlich für die Zwecke der Astronomie ausgebildet worden war, in alle messenden Disciplinen Eingang gefunden hat und hier das wichtige Bindeglied zwischen dem Beobachtungsmaterial und dem aus demselben abgeleiteten Resultate bildet. Neben der Astronomie ist es vor allem die Geodäsie, welche sich die Vorteile der Methode in weitem Umfange zunutzegemacht und zur Ausbildung der mannigfachen Anwendungsarten Anlafs geboten hat. Aus der Reihe derjenigen, welche sich um die praktische Durchbildung der Methode und ihre Verbreitung verdient gemacht haben, seien unter den Deutschen insbesondere Gaufs[5]), Gerling[1]), Encke[2]), Hansen[6])[7]), Helmert[1]) und Jordan[4]) genannt. Bei den Franzosen, welche nach der theoretischen Seite durch Laplace, Poisson und Cauchy so hervorragend vertreten sind, hat die Anwendung der Methode nicht so rasche Fortschritte gemacht; hier erwarben sich Bienaymé[1]) und Bertrand [durch die Herausgabe des Gaufs'schen Hauptwerkes (s. Gaufs[6]))] Verdienste um dieselbe. Ein hervorragendes italienisches Werk über den Gegenstand aus der neueren Zeit ist das von Ferrero[1]), dem sich die grofse Abhandlung Pizzetti's[6]) würdig zur Seite stellt. In England ist die Methode der kleinsten Quadrate, namentlich in ihrer Anwendung auf geodätische Vermessungen, durch Galloway[2]) eingeführt worden. Seit Decennien widmen ihr die

*) Man sehe Hülsse[1]) und Jordan[4]) (vgl. hier die Auflagen von 1877 u. 1888).

Schriften über messende Astronomie, über Geodäsie und auch manche über Physik [so Kunzek[1]) u. a.] mehr oder weniger ausführliche Darstellungen. Gegenüber einer solchen Ausbreitung und Anerkennung, welche die Methode seit ihrer ersten Publication gefunden hat, mag es befremdend erscheinen, wenn in einer Schrift aus der jüngsten Zeit [Kloock[1])] der Versuch gemacht wird, ihre Unhaltbarkeit zu erweisen.

60. Die erste wissenschaftliche Begründung*) der Methode der kleinsten Quadrate hat Gaufs[1]) gegeben, und zwar auf Grund des Fehlergesetzes, das er aus der Hypothese des arithmetischen Mittels abgeleitet hatte (s. Art. 54). Jedes Wertsystem der unbekannten Elemente $x, y, z, \cdots$ hat vermöge der Fehlergleichungen

$$\varepsilon_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

ein System von Fehlerwerten ε_i zur Folge; die Wahrscheinlichkeit a priori für die Coexistenz dieser Werte, gleiche Präcision der Beobachtungen vorausgesetzt, ist proportional

$$e^{-h^2[\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\cdots+\varepsilon_n^2]}; \qquad (\alpha)$$

derselben Gröfse ist auch nach vollführten Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit der getroffenen Annahme über die Werte $x, y, z, \cdots$ proportional; die wahrscheinlichste Annahme ist somit diejenige, für welche

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 \text{ ein Minimum} \qquad (\beta)$$

ist, und aus ihr ergeben sich die wahrscheinlichsten Werte der Elemente. Bei ungleicher Präcision der Beobachtungen tritt

$$e^{-[h_1^2\varepsilon_1^2+h_2^2\varepsilon_2^2+\cdots+h_n^2\varepsilon_n^2]} \qquad (\alpha^*)$$

an die Stelle von (α) und

$$h_1^2\varepsilon_1^2 + h_2^2\varepsilon_2^2 + \cdots + h_n^2\varepsilon_n^2 \text{ ein Minimum}$$

an die Stelle von (β); diese Bedingung kann (s. Art. 58) auch durch

$$p_1\varepsilon_1^2 + p_2\varepsilon_2^2 + \cdots + p_n\varepsilon_n^2 \text{ ein Minimum} \qquad (\beta^*)$$

ersetzt werden, wenn $p_1, p_2, \cdots p_n$ die Gewichte der Beobachtungen bedeuten.

*) Nach einer Bemerkung im art. 186 der Theoria motus hat Gaufs[1]) sich im Besitze des Rechnungsverfahrens, zu welchem die Methode führt, schon 1795 befunden, sodafs ihm hiernach die Priorität der Erfindung zukommt. — Einer historischen Notiz Abbe's[1]) zufolge scheint Adrain[1]) 1808 unabhängig von anderen zu dem gleichen Ausgleichungsprincip gekommen zu sein. Vgl. dazu Glaisher[1]).

Diese Begründung des Ausgleichungsprincips hat vermöge ihrer didaktischen Vorzüge am meisten Eingang gefunden in der zur Einführung in die Methode der kleinsten Quadrate bestimmten Litteratur. Die Kritik, welche an ihr geübt wurde, kehrte sich gegen die Ableitung des Fehlergesetzes. Diese aber wurde später auf festere Grundlagen, namentlich auf die Anschauung von der Zusammensetzung der Beobachtungsfehler aus elementaren Componenten, gestellt (s. Art. 56). Dadurch, dafs sich die Giltigkeit des von Gaufs gefundenen Fehlergesetzes unter sehr weiten Bedingungen ergab, hat auch diese seine Ableitung des Ausgleichungsprincips an Kraft gewonnen, und die neuere Forschung schlägt ihren Wert höher an, als es Gaufs in späterer Zeit selbst gethan hat. Hansen[6]), der sich in seinen Arbeiten ganz auf den Boden dieser ersten Begründung stellt, kennzeichnet seine Stellung zur Methode der kleinsten Quadrate damit, dafs er als die Grenze des streng Beweisbaren die folgende Aussage hinstellt: „Mit demselben Rechte, mit welchem man im einfachsten Falle das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen als den wahrscheinlichsten Wert der einzigen Unbekannten ansieht, mufs man im allgemeinen Falle diejenigen Werte der Unbekannten als die wahrscheinlichsten Werte derselben betrachten, durch welche bewirkt wird, dafs die Summe der mit ihren bezüglichen Gewichten multiplicirten Quadrate der übrigbleibenden Fehler ein Minimum wird.“ Wird hier die Hauptstütze der Methode in der Regel des arithmetischen Mittels erblickt, welche zum Ausgangspunkt der Begründung genommen ward, so stellt sich eine neuere Kritik über die physischen Grundlagen des Ausgleichungsprincips auf einen anderen Standpunkt, dem wir den Vorzug geben; Burton[1]) gelangt nämlich zu den folgenden Schlüssen: Das Fehlergesetz einer jeden Beobachtungsreihe hängt allerdings von den Bedingungen ab, unter welchen sie gemacht wurde; aber schon die Vereinigung von drei, vier Fehlerquellen giebt im allgemeinen ein dem Exponentialgesetz naheliegendes Häufigkeitsgesetz, und die Annäherung nimmt mit der Anzahl der Fehlerquellen zu; darum ist die Methode der kleinsten Quadrate das praktisch vorteilhafteste und bestbegründete Verfahren, wenn nur nicht eine Fehlerquelle von abweichendem Gesetze stark hervortritt.

61. Die Untersuchungen, welche Laplace[13]) zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate unternommen hat, zählen zu den schwierigsten Teilen der „Théorie analytique“, in welcher sie den Inhalt der art. 20—21 (p. 312—329) ausmachen. Er beginnt mit dem Falle eines unbekannten Elementes x, bildet aus den zugehörigen Fehlergleichungen

$$\varepsilon_i = - l_i + a_i x \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

durch Multiplication derselben mit unbestimmten, positiven oder nega-

tiven, ganzzahligen*) Factoren α_i und darauffolgende Addition die Endgleichung

$$[\alpha\varepsilon] = -[\alpha l] + [\alpha a]x,$$

aus welcher

$$x = \frac{[\alpha l]}{[\alpha a]} + \frac{[\alpha\varepsilon]}{[\alpha a]}$$

folgt. Behält man das erste Glied allein, so hat die Bestimmung

$$x = \frac{[\alpha l]}{[\alpha a]} \tag{A}$$

den Fehler

$$u = \frac{[\alpha\varepsilon]}{[\alpha a]}. \tag{B}$$

Es wird nun die Wahrscheinlichkeit vorgegebener Grenzen dieses Fehlers unter den folgenden Voraussetzungen gesucht: 1) Alle möglichen Werte des Fehlers einer Beobachtung sind Vielfache eines sehr kleinen, zur Einheit gewählten Betrages und liegen zwischen bestimmten Grenzen $-g, g$; 2) die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers η ist dargestellt durch die für alle Beobachtungen geltende gerade Function $\varphi\left(\frac{\eta}{g}\right)$; 3) die Anzahl n der Beobachtungen ist sehr grofs. Es findet sich

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt$$

als Wahrscheinlichkeit dafür, dafs der Fehler u zwischen den Grenzen

$$0 \text{ und } 2gt\sqrt{\frac{\varkappa''}{\varkappa}}\,\frac{\sqrt{[\alpha\alpha]}}{[\alpha a]}\ **)$$

enthalten sei. Bei gegebenem t, also bei festgesetzter Wahrscheinlichkeit, werden diese Grenzen am engsten, wenn der von den unbestimmten Multiplicatoren abhängige Factor

$$\frac{\sqrt{[\alpha\alpha]}}{[\alpha a]} \text{ ein Minimum} \tag{C}$$

---

*) Diese Bestimmung wird aus rein analytischen Gründen getroffen.
**) Darin ist

$$\varkappa = 2\int_0^1 \varphi(\eta')\,d\eta'$$

$$\varkappa'' = 2\int_0^1 \eta'^2\varphi(\eta')\,d\eta'$$

$$\text{und } \eta' = \frac{\eta}{g}.$$

wird; den so bestimmten Wert von x betrachtet Laplace als den vorteilhaftesten; es ist derselbe, welchen das Princip „$[\varepsilon\varepsilon]$ ein Minimum“, also die Methode der kleinsten Quadrate liefert; denn die analytische Ausführung der Bedingung (C) führt auf $\alpha_i = M a_i$; es kann also durch Wahl von M immer bewirkt werden, dafs die α_i, wie es vorausgesetzt war, ganze Zahlen werden, und aus (A) ergiebt sich dadurch

$$x = \frac{[al]}{[a\alpha]}.$$

Dem hier befolgten Princip zufolge wird also jener Wert des Elementes als der zweckmäfsigste, allen anderen Bestimmungen vorzuziehende angesehen, dem mit gegebener Wahrscheinlichkeit ein Fehler innerhalb möglichst enger Grenzen anhaftet.

An dieser Stelle ist der Untersuchungen zu gedenken, welche Cauchy[4—7] zur Frage der günstigsten Combination von Beobachtungen angestellt hat, und durch die er die Allgemeingiltigkeit der Laplace'schen Resultate, also auch die Bedeutung der Methode der kleinsten Quadrate zu bestreiten suchte; als Vertheidiger dieser Methode trat ihm Bienaymé[2][4] entgegen.*) Der Weg, den Cauchy zur Lösung des Problems einschlägt, stimmt zunächst mit dem oben entwickelten, von Laplace gewählten Verfahren überein. Sind

$$\varepsilon_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

die Fehlergleichungen, so bildet Cauchy zum Zwecke der Bestimmung von x eine Endgleichung, indem er jene mit unbestimmten Factoren α_i multiplicirt und addirt, die genannten Factoren aber den folgenden, zu ihrer Bestimmung nicht ausreichenden Bedingungen unterwirft:

$$[a\alpha] = 1, \qquad [b\alpha] = 0, \qquad [c\alpha] = 0, \cdots.$$

Dadurch ergiebt sich die Bestimmung

$$x = [\alpha l]$$

mit dem Fehler

$$u = [\alpha\varepsilon].$$

Nun sucht er unter Annahme eines beliebigen, aber für alle Beobachtungen gleichmäfsig geltenden Fehlergesetzes $\varphi(\varepsilon)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs u zwischen vorgezeichnete Grenzen $-v, v$ zu liegen komme, und erklärt jenen Wert von x für den wahrscheinlichsten, für welchen diese Wahrscheinlichkeit am gröfsten ist. Zunächst stellt sich dieses wahrscheinlichste Resultat als abhängig von

*) In jüngster Zeit sind Cauchy's Untersuchungen von Sleschinsky[1]) wieder aufgenommen und zu einer neuen Begründung der Methode der kleinsten Quadrate verwendet worden.

den gewählten Grenzen $-v, v$ heraus, und dies veranlaſst Cauchy, die Frage aufzuwerfen, bei welcher Form des Fehlergesetzes es von diesen Grenzen unabhängig, also gewissermaſsen das absolut wahrscheinlichste würde. Er findet für dieses Gesetz den analytischen Ausdruck

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-c\theta^N} \cos \theta\varepsilon \, d\theta;$$

der specielle Fall $N = 2$ führt auf das Gauſs'sche Fehlergesetz und dadurch auch auf die Methode der kleinsten Quadrate, während der Fall $N = 1$ das Gesetz

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{K}{\pi} \frac{1}{1 + K^2 \varepsilon^2}$$

ergiebt, dessen praktische Unmöglichkeit Bienaymé (l. c.) dargethan hat. In der unter[5]) genannten Arbeit verfolgt Cauchy den eingeschlagenen Weg weiter und findet, daſs bei $N > 2$ die wahrscheinlichste Bestimmung von derjenigen nach dem Princip „$[\varepsilon\varepsilon]$ ein Minimum“ abweicht, daſs diesem Princip aber die Eigenschaft zukommt, dann auf den wahrscheinlichsten Wert zu führen, wenn die Grenzen des einzelnen Beobachtungsfehlers endlich und die Zahl der Beobachtungen sehr groſs ist. In einer dritten Arbeit[6]) nimmt er den Gegenstand noch von einer andern Seite auf und sucht jene Bestimmung für x, für welche der gröſstmögliche Fehler, d. i. $[|\varkappa\alpha|]$, sofern $-\varkappa, \varkappa$ die Grenzen des einzelnen Beobachtungsfehlers sind, mit gröſster Wahrscheinlichkeit zwischen vorgegebenen Grenzen enthalten ist; er findet auch diese Bestimmung als verschieden von der durch die Methode der kleinsten Quadrate gelieferten, was auch $\varkappa$ und wie groſs auch die Anzahl der Beobachtungen sein möge. Bienaymé gelangt in seiner Kritik dieser Untersuchungen zu dem Resultate, daſs sie in einzelnen Teilen geradezu geeignet seien, bei nur leichter Abänderung die Ergebnisse der Laplace'schen Analyse aufs neue zu beweisen. Vom analytischen Standpunkte verdient der Umstand hervorgehoben zu werden, daſs Cauchy eines in späteren Arbeiten vielfach geübten Verfahrens sich bedient, indem er von Discontinuitätsfactoren Gebrauch macht, über die er, unter dem Namen „coefficients limitateurs ou restricteurs“, vorher eine Darstellung[3]) veröffentlicht hatte.

62. Laplace[13]) hat noch eine zweite Begründung der Methode der kleinsten Quadrate gegeben und dabei einen neuen Gedanken eingeführt, der sich später als höchst fruchtbar erwies. Er faſst jede Beobachtung und jede Annahme über den Wert von x als ein Spiel auf, bei dem nur verloren werden kann; den Verlust — die Abweichung von der Wahrheit — bildet der Fehler, gleichgiltig ob er positiv oder negativ ist; die Gröſse dieses Verlustes beurteilt Laplace

nach dem absoluten Werte des Fehlers und betrachtet in Festhaltung an den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung als Maſs des mit einer erst anzustellenden Beobachtung oder einer zu treffenden Annahme über x verbundenen Nachteils die aus den verschiedenen Fehlerwerten und ihren respectiven Wahrscheinlichkeiten resultirende Erwartung; d. h. den Wert des Integrals $\int_0^{-\infty} u\psi(u)du$, worin $\psi(u)du$ die Wahrscheinlichkeit eines zwischen u und $u + du$ liegenden Fehlers in der Bestimmung von x bedeutet; diesen Wert sieht er als den mit jener Bestimmung verbundenen Nachteil an und nennt ihn „l'erreur moyenne à craindre en plus“. Es ist die Hälfte jener Gröſse, die man gegenwärtig als durchschnittlichen Fehler bezeichnet. Da sich (s. Art. 61)

$$\psi(u)du = \frac{[\alpha a]}{2g\sqrt{\pi\frac{\varkappa''}{\varkappa}[\alpha\alpha]}}\, e^{-\frac{\varkappa[\alpha a]^2 u^2}{4g^2\varkappa''[\alpha\alpha]}}\, du$$

ergab, so hat das eben erwähnte Integral den Wert

$$g\sqrt{\frac{\varkappa''}{\pi\varkappa}}\,\frac{\sqrt{[\alpha\alpha]}}{[\alpha a]}.$$

Laplace erklärt nun jene Bestimmung des Elementes x für die vorteilhafteste, welcher das Minimum dieses „mittleren Fehlers“ entspricht, und kommt dadurch wieder zu der Bedingung (C) des vorigen Artikels:

$$\frac{\sqrt{[\alpha\alpha]}}{[\alpha a]} \text{ ein Minimum,}$$

welche auf die Methode der kleinsten Quadrate hinführt.

Die Ausdehnung dieses Gedankenganges auf zwei Elemente, also auf ein System von Fehlergleichungen der Form

$$\varepsilon_i = -l_i + a_i x + b_i y \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

auf welche Laplace nun eingeht, erfordert schon eine sehr beschwerliche Analyse. Werden die Gleichungen nacheinander mit ganzzahligen Factorensystemen α_i, β_i multiplicirt, dann addirt, wodurch die Endgleichungen

$$\begin{aligned} [\alpha\varepsilon] &= -[\alpha l] + [a\alpha]x + [b\alpha]y \\ [\beta\varepsilon] &= -[\beta l] + [a\beta]x + [b\beta]y \end{aligned} \qquad (A)$$

entstehen, und nimmt man die Bestimmung von x, y statt aus diesen aus den reducirten Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= -[\alpha l] + [a\alpha]x + [b\alpha]y \\ 0 &= -[\beta l] + [a\beta]x + [b\beta]y \end{aligned} \qquad (B)$$

vor, so sind die an diesen Bestimmungen haftenden Fehler u, v durch das Gleichungspaar

$$\begin{aligned}[\alpha\varepsilon] &= [a\alpha]u + [b\alpha]v \\ [\beta\varepsilon] &= [a\beta]u + [b\beta]v\end{aligned} \tag{C}$$

definirt. Unter den im vorigen Artikel aufgezählten Voraussetzungen ergiebt sich für die Wahrscheinlichkeit, daſs u, v gleichzeitig zwischen die respectiven Grenzen $(u, u + du)$, $(v, v + dv)$ fallen, der Ausdruck

$$\frac{\varkappa}{4\pi\varkappa'' g^2}\frac{\varDelta}{\sqrt{R}} e^{-\frac{\varkappa(Fu^2 + 2Guv + Hv^2)}{4\varkappa'' g^2 R}} du dv, \tag{D}$$

worin auſser den bereits erklärten Buchstaben noch folgende Bedeutungen gelten:

$$\begin{aligned}F &= [a\alpha]^2[\beta\beta] - 2[a\alpha][a\beta][\alpha\beta] + [a\beta]^2[\alpha\alpha] \\ G &= [a\alpha][b\alpha][\beta\beta] - ([a\alpha][b\beta] + [b\alpha][a\beta])[\alpha\beta] + [a\beta][b\beta][\alpha\alpha] \\ H &= [b\alpha]^2[\beta\beta] - 2[b\alpha][b\beta][\alpha\beta] + [b\beta]^2[\alpha\alpha] \\ \varDelta &= [a\alpha][b\beta] - [b\alpha][a\beta] \\ R &= [\alpha\alpha][\beta\beta] - [\alpha\beta]^2.\end{aligned}$$

Die Integration von (D) in Bezug auf v zwischen den Grenzen $-\infty, \infty$ führt zu der Wahrscheinlichkeit eines zwischen u und $u + du$ liegenden Fehlers in der Bestimmung von x, d. i.

$$\frac{\varDelta}{g}\sqrt{\frac{\varkappa}{4\pi\varkappa'' H}}\, e^{-\frac{\varkappa\varDelta^2}{4\varkappa'' g^2 H}u^2} du, \tag{E}$$

mit deren Hilfe sich der durchschnittliche Wert der positiven u zu

$$\frac{g}{\sqrt{\pi\frac{\varkappa''}{\varkappa}}}\frac{\sqrt{H}}{\varDelta} \tag{F}$$

ergiebt. Die Bedingung, daſs er ein Minimum werde, gleichbedeutend mit der Forderung „$\frac{\sqrt{H}}{\varDelta}$ ein Minimum", führt wieder auf die Bestimmung von x, y nach dem Princip der kleinsten Fehlerquadratsumme.

Die in diesem und dem vorhergehenden Artikel befolgte Schreibung der Laplace'schen Resultate schlieſst sich an jene Darstellung seiner Untersuchungen an, welche Referent in seiner „Fehlertheorie"[10]) gegeben hat.

Laplace's Begründung der Methode der kleinsten Quadrate hat

eine Reihe namhafter Arbeiten im Gefolge gehabt.*) Einmal bot die complicirte, wenig durchsichtige Analyse Anlafs zu weiteren Ausführungen; ferner handelte es sich darum, die angewandten Näherungen auf ihre Stichhaltigkeit zu prüfen; des weiteren galt es, zu untersuchen, ob dieselben Principien nicht auch bei Aufhebung gewisser einschränkender Voraussetzungen über das Fehlergesetz zu einem befriedigenden Resultate führen. Dazu kam noch, dafs Laplace mit dem Falle zweier Elemente abschlofs**), das Erwiesene auf beliebig viele Elemente ausdehnend mit der Bemerkung: „car il est visible que l'analyse précédente peut s'étendre à un nombre quelconque d'élémens" (p. 327).

Der erste Commentator war Poisson[2])***). Er lehnt sich an den Vorgang seines Vorbildes insofern an, als er wie dieser die möglichen Werte eines Fehlers als Vielfache einer sehr kleinen Einheit ansieht; dagegen ist er allgemeiner in den Eigenschaften des Fehlergesetzes, das er weder als gerade Function noch als gleichbleibend für alle Beobachtungen voraussetzt. Poisson beschränkt sich jedoch auf den Fall eines Elementes.

Von hervorragender Bedeutung sind die Arbeiten von Ellis[1]) und von Glaisher.[2]) Die Zahl der Elemente wird beliebig vorausgesetzt; die Analyse erlangt durch Heranziehung moderner Hilfsmittel Symmetrie und Einfachheit; dies gilt in höherem Mafse von der Darstellung Glaisher's, der von einem in Form eines einfachen bestimmten Integrals von Dirichlet angegebenen Discontinuitätsfactor Gebrauch macht. Das Fehlergesetz wird von Beobachtung zu Beobachtung wechselnd angenommen, von Ellis noch als gerade Function vorausgesetzt, während Glaisher auch diese Annahme fallen läfst und dadurch die gröfste Allgemeinheit erzielt. An dem Laplace'schen Gedanken festhaltend, dafs jene Bestimmung der Elemente die vorteilhafteste sei, welche für den Durchschnitt der positiven Werte des Fehlers eines Elements ein Minimum giebt, gelangt Glaisher zu dem allgemeinsten Ausdruck des Princips der kleinsten Quadratsumme, welcher sich folgendermafsen wiedergeben läfst: Führt die i-te Beobachtung auf die Fehlergleichung

$$\varepsilon_i = - l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots;$$

ist $\varphi_i(\varepsilon)$ das Gesetz ihres Fehlers, ferner

*) Eine kritische Untersuchung der beiden Principien, auf welche sich Laplace bei seiner Beweisführung stützt, hat Edgeworth[3]) gegeben.

**) Die erste Beweisführung beschränkte sich nur auf den Fall eines Elementes; sie ist für beliebig viele Elemente verallgemeinert worden durch Dienger.[5])

***) Die betreffende Arbeit ist auch im dritten Anhang der deutschen Übersetzung von Poisson's Recherches[6]), leider durch zahlreiche Druckfehler entstellt, wiedergegeben.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon \varphi_i(\varepsilon)\, d\varepsilon = K_1^{(i)}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 \varphi_i(\varepsilon)\, d\varepsilon = K_2^{(i)}, \qquad \tfrac{1}{2}(K_2^{(i)} - K_1^{(i)2}) = \chi_i^2,$$

so ist diejenige Bestimmung der Elemente die vorteilhafteste, welche sich aus der Bedingung:

$$\left[\left(\frac{\varepsilon - K_1}{\chi}\right)^2\right] \text{ ein Minimum} \tag{G}$$

ergiebt.

Für ein symmetrisches Fehlergesetz wird $K_1^{(i)} = 0$, $\chi_i = \frac{1}{2} K_2^{(i)}$, und man kommt zu dem gewöhnlichen Princip der kleinsten Fehlerquadratsumme für ungleich genaue Beobachtungen.

Aus Glaisher's Untersuchungen (l. c., p. 108) ist noch ein Resultat als bemerkenswert hervorzuheben: es ist der Nachweis dafür, daſs die Beurteilung des mit einem Fehler verbundenen Nachteils nach irgend einer positiven, ganzen oder gebrochenen Potenz seines Betrages zu demselben Princip der Elementenbestimmung führt wie der Durchschnitt der absoluten Werte selbst; von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet verdient die erste Laplace'sche Begründung (Art. 61) den Vorzug vor der zweiten, der sich eine unbegrenzte Zahl analoger Begründungen an die Seite stellen läſst.

Eine analytisch bemerkenswerte Darstellung des zweiten Laplace'schen Beweises, welche wieder in den wesentlichen Punkten an des letzteren Gedankengang anknüpft, das Fehlergesetz jedoch nicht symmetrisch und nicht gleich für alle Beobachtungen voraussetzt, hat Todhunter[2]) gegeben [s. des Referenten „Fehlertheorie"[10]), p. 272—288]. Aus derselben geht auch ein Resultat hervor, welches Laplace[13]) im I. Supplement (p. 11) ohne Beweis mitgeteilt hat. Unter den verallgemeinerten Voraussetzungen Todhunter's lautet dieses Resultat dahin, daſs den aus der Bedingung (G) resultirenden vorteilhaftesten Werten der Elemente $x, y, z, \cdots$ Fehler anhaften, welche mit der Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{\sqrt{R}}{(2\sqrt{\pi})^{\omega}}\, e^{-\Sigma\left(\frac{a_i x' + b_i y' + c_i z' + \cdots}{2\chi_i}\right)^2} dx'\, dy'\, dz' \cdots.$$

zwischen den bezüglichen Grenzen x' und $x' + dx'$, y' und $y' + dy'$, z' und $z' + dz'$, $\cdots$ zu erwarten sind. In diesem Ausdrucke bedeutet ω die Anzahl der Elemente und R die Determinante

$$\begin{vmatrix} \left[\frac{aa}{\chi^2}\right], & \left[\frac{ab}{\chi^2}\right], & \left[\frac{ac}{\chi^2}\right], & \cdots \\ \left[\frac{ba}{\chi^2}\right], & \left[\frac{bb}{\chi^2}\right], & \left[\frac{bc}{\chi^2}\right], & \cdots \\ \left[\frac{ca}{\chi^2}\right], & \left[\frac{cb}{\chi^2}\right], & \left[\frac{cc}{\chi^2}\right], & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

während, wie früher, $\chi_i^2 = \frac{1}{2}(K_2^{(i)} - K_1^{(i)2})$ ist.

Einer Begründung der Methode der kleinsten Quadrate mufs hier noch gedacht werden, die durch die eigenartige Auffassung des Problems besondere Beachtung beanspruchen darf. Bienaymé[1]) [s. auch Meyer[1]), deutsche Bearb., p. 473—509] hat sich auf den Standpunkt des ersten Laplace'schen Beweises gestellt, insofern diejenige Bestimmung eines Elementes den Vorzug erhält, deren Fehler bei gegebener Wahrscheinlichkeit innerhalb der engstmöglichen Grenzen eingeschlossen ist. Während jedoch Laplace und Gaufs (s. den nächsten Artikel) bei ihrer zweiten Begründung jedes Element für sich betrachten und die Forderung aufstellen, dafs sein durchschnittlicher, beziehungsweise mittlerer Fehler ein Minimum werde ohne Rücksicht auf die Fehler der anderen Elemente, vertritt Bienaymé die Anschauung, die Elemente müfsten als zusammengehörig betrachtet und daher die Wahrscheinlichkeit, dafs die Fehler in den Bestimmungen aller innerhalb vorgezeichneter Grenzen liegen, als mafsgebend angesehen werden bei der Entscheidung über die zweckmäfsigste Wahl der Werte der Elemente. Die analytische Verfolgung dieses Gedankens führt zu dem Resultate, dafs das Princip der kleinsten Fehlerquadratsumme dasjenige Verfahren sei, bei welchem die Fehler aller Elemente gleichzeitig innerhalb möglichst enger Grenzen liegen. Es giebt Fälle, wo die Elemente Gröfsen ohne einen sachlich begründeten Zusammenhang vorstellen und wo das Interesse jeweilen auch nur auf die eine oder die andere gerichtet ist; dann hat Bienaymé's Auffassung keine Berechtigung. In anderen Fällen aber gehören die Elemente derart zusammen, dafs erst aus dem Complex aller die Bestimmung des fraglichen Objectes hervorgeht; sind z. B. die Elemente Coordinaten eines in einer Ebene oder im Raume zu bestimmenden Punktes, so bilden sie einen natürlich zusammenhängenden Gröfsencomplex und erfordern daher auch gleichzeitige Berücksichtigung; dann ist Bienaymé's Theorie in ihrem Rechte (vgl. Art. 69).

63. In der Theoria combinationis hat Gaufs[5]) eine zweite Begründung der Methode der kleinsten Quadrate gegeben, die gleichwie der zweite Laplace'sche Beweis auf dem Begriff des Fehlerrisicos beruht. Während jedoch Laplace den mit einem Fehler verbundenen Nachteil nach dem absoluten Betrage des Fehlers beurteilt, wählt Gaufs hierfür das Quadrat des Fehlers und betrachtet den mittleren Fehler in der Bestimmung einer Gröfse, d. i. $\sqrt{K_2}$, als das Mafs der Genauigkeit, $\frac{1}{K_2}$ oder eine dazu proportionale Gröfse als das Gewicht dieser Bestimmung. Er spricht sich in einem Briefe an Bessel (Briefwechsel Gaufs-Bessel, 1880, p. 523) in der bestimmtesten Weise darüber aus, warum er von seiner ersten Begründung abgegangen ist, und betont ausdrücklich die Willkür, die in der Wahl des Quadrates liegt. Durch diese Wahl sind aber erhebliche Vorteile erreicht worden. Zunächst entfiel die den

Laplace'schen Beweisen zugrundeliegende einschränkende und der Wirklichkeit nicht entsprechende Voraussetzung einer sehr grofsen Anzahl von Beobachtungen. Der Beweis wurde durch den Wegfall jeglicher Approximation einfach und durchsichtig. Die berechneten Werte der Elemente erhalten ohne Rücksicht auf die Anzahl der Beobachtungen und auf die specielle Form des bei der einzelnen geltenden Fehlergesetzes, das nur als ein gerades vorausgesetzt wird, eine bestimmte Bedeutung: Jeder derselben ist mit dem kleinstmöglichen mittleren Fehler behaftet.

Führt die i-te unter den n Beobachtungen auf die Fehlergleichung

$$\varepsilon_i = - l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots;$$

ist $\varphi_i(\varepsilon_i)$ das ihren Fehler beherrschende Gesetz, von dem blofs die Eigenschaft $\varphi_i(-\varepsilon_i) = \varphi_i(\varepsilon_i)$ vorausgesetzt wird; hat man ferner aus dem System der Fehlergleichungen durch Multiplication mit unbestimmten Factoren α_i und Addition die Endgleichung

$$[\alpha\varepsilon] = -[\alpha l] + [\alpha a]x + [\alpha b]y + [\alpha c]z + \cdots \qquad (A)$$

abgeleitet, so ergiebt diese, wenn man die genannten Factoren den zu ihrer Bestimmung unzureichenden Bedingungen

$$[\alpha a] = 1, \qquad [\alpha b] = 0, \qquad [\alpha c] = 0, \cdots \qquad (B)$$

unterwirft, für x den Wert

$$x = [\alpha l] \qquad (C)$$

mit dem Fehler

$$u = [\alpha\varepsilon]. \qquad (D)$$

Das mittlere Quadrat dieses Fehlers ergiebt sich, wenn man die Wahrscheinlichkeit $\varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)\cdots\varphi_n(\varepsilon_n)d\varepsilon_1 d\varepsilon_2\cdots d\varepsilon_n$ einer Wertcombination der Beobachtungsfehler mit dem Quadrate des daraus entspringenden Wertes von u multiplicirt und dieses Product auf dem ganzen Wertgebiet von $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$ integrirt; es kommt also gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}[\alpha\varepsilon]^2\varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)\cdots\varphi_n(\varepsilon_n)d\varepsilon_1 d\varepsilon_2\cdots d\varepsilon_n. \qquad (E)$$

Das Integral löst sich aber nach Entwickelung von $[\alpha\varepsilon]^2$ in zwei Gruppen von Integralen auf; das allgemeine Glied der ersten n-gliedrigen Gruppe ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\alpha_i^2\varepsilon_i^2\varphi_i(\varepsilon_i)\varphi_1(\varepsilon_1)\cdots\varphi_n(\varepsilon_n)d\varepsilon_i d\varepsilon_1\cdots d\varepsilon_n = \alpha_i^2 K_2^{(i)},$$

weil jedes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(\varepsilon_k)\, d\varepsilon_k = 1$$

ist; das allgemeine Glied der zweiten $n(n-1)$-gliedrigen Gruppe ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_i \alpha_k \varepsilon_i \varepsilon_k \varphi_i(\varepsilon_i)\varphi_k(\varepsilon_k)\varphi_1(\varepsilon_1)\cdots\varphi_n(\varepsilon_n)\, d\varepsilon_i\, d\varepsilon_k\, d\varepsilon_1 \cdots d\varepsilon_n = 0\,,$$

weil jedes $\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_k \varphi_k(\varepsilon_k)\, d\varepsilon_k = 0$ ist. Hiernach ist der Mittelwert von u^2 gleich

$$\alpha_1^2 K_2^{(1)} + \alpha_2^2 K_2^{(2)} + \cdots + \alpha_n^2 K_2^{(n)} = [\alpha^2 K_2]\,.$$

Die mit dem kleinsten mittleren Fehler behaftete Bestimmung des Elementes x ist also diejenige, für welche

$$[\alpha^2 K_2] \text{ ein Minimum} \qquad (F)$$

ist.

Zu dieser Bedingung treten die früher aufgestellten Bedingungsgleichungen (B) hinzu, sodafs die Bestimmung der Factoren α_i so zu geschehen hat, als ob es sich um das absolute Minimum der mit den Multiplicatoren $2q_1, 2q_2, 2q_3, \cdots$ gebildeten Function

$$[\alpha^2 K_2] - 2q_1([\alpha a] - 1) - 2q_2[\alpha b] - 2q_3[\alpha c] - \cdots$$

handelte. Die Differentiation in Bezug auf α_i giebt

$$\alpha_i K_2^{(i)} = a_i q_1 + b_i q_2 + c_i q_3 + \cdots \quad (i = 1, 2, \cdots n)\,;$$

die Eintragung dieser Werte in (B) giebt zur Bestimmung der q das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= \left[\frac{aa}{K_2}\right] q_1 + \left[\frac{ab}{K_2}\right] q_2 + \left[\frac{ac}{K_2}\right] q_3 + \cdots \\ 0 &= \left[\frac{ba}{K_2}\right] q_1 + \left[\frac{bb}{K_2}\right] q_2 + \left[\frac{bc}{K_2}\right] q_3 + \cdots \\ 0 &= \left[\frac{ca}{K_2}\right] q_1 + \left[\frac{cb}{K_2}\right] q_2 + \left[\frac{cc}{K_2}\right] q_3 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (G)$$

Bezeichnet man seine Determinante mit R, die Adjuncten zu den Elementen der ersten Zeile mit $A_1, A_2, A_3, \cdots$, so lautet die Lösung:

$$q_1 = \frac{A_1}{R}\,, \qquad q_2 = \frac{A_2}{R}\,, \qquad q_3 = \frac{A_3}{R}\,, \cdots,$$

und vermöge derselben wird

$$R\alpha_i = \frac{a_i}{K_2^{(i)}} A_1 + \frac{b_i}{K_2^{(i)}} A_2 + \frac{c_i}{K_2^{(i)}} A_3 + \cdots;$$

nun ist es möglich, die Endgleichung (C) für x aufzustellen, sie lautet:

$$Rx = \left[\frac{al}{K_2}\right] A_1 + \left[\frac{bl}{K_2}\right] A_2 + \left[\frac{cl}{K_2}\right] A_3 + \cdots.$$

Dies aber ist dieselbe Lösung, welche sich für x aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\left[\frac{al}{K_2}\right] &= \left[\frac{aa}{K_2}\right]x + \left[\frac{ab}{K_2}\right]y + \left[\frac{ac}{K_2}\right]z + \cdots \\
\left[\frac{bl}{K_2}\right] &= \left[\frac{ba}{K_2}\right]x + \left[\frac{bb}{K_2}\right]y + \left[\frac{bc}{K_2}\right]z + \cdots \qquad (H) \\
\left[\frac{cl}{K_2}\right] &= \left[\frac{ca}{K_2}\right]x + \left[\frac{cb}{K_2}\right]y + \left[\frac{cc}{K_2}\right]z + \cdots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ergiebt. Die Anwendung des gleichen Gedankenganges auf die übrigen Elemente führt immer wieder auf dieses Gleichungssystem, sodafs dasselbe die vorteilhaftesten Werte für alle Elemente liefert; es ist dies aber dasselbe Gleichungssystem, welches aus der Bedingung:

$$\left[\frac{\varepsilon\varepsilon}{K_2}\right] \text{ ein Minimum}$$

hervorgeht. Damit ist der Beweis erbracht, dafs unter den linearen Combinationen der Fehlergleichungen diejenige, welche dem Princip der kleinsten Quadratsumme der auf gleiches Gewicht reducirten Beobachtungsfehler entspricht, die vorteilhafteste ist insofern, als sie an den Elementen die kleinsten mittleren Fehler befürchten läfst.

Über die Begründung des Ansatzes (E) für den Mittelwert von $[\alpha\varepsilon]$ vergleiche man die Artikel 12 und 13 der Theoria combin. und Glaisher[2]) (p. 109 ff.) [s. auch des Referenten „Fehlertheorie"[10]), p. 208].

Bertrand[3]) (p. 267; s. auch Compt. rend. 106, p. 1115 ff.) hat einen Zusammenhang zwischen den beiden von so verschiedenen Voraussetzungen ausgehenden Gaufs'schen Beweisen herzustellen gesucht; er erblickt das Mittel hierzu in den Annahmen, die Gaufs[5]) (art. 18) über die Fehler macht, sie als so klein voraussetzend, dafs man ihre Quadrate und Producte den ersten Potenzen gegenüber vernachlässigen darf. Innerhalb eines so begrenzten Fehlerbereichs lasse sich aber jede gerade Function näherungsweise durch das Gaufs'sche Gesetz substituiren. Diese Argumentation ist insofern nicht zutreffend, als der zweite Beweis keinerlei einschränkende Voraussetzung über die Gröfse der Fehler macht.

64. Es soll nun über einige Begründungen und Auffassungen der Methode der kleinsten Quadrate aus späterer Zeit berichtet und dabei mit denjenigen Arbeiten begonnen werden, welche auf dem Boden der Wahrscheinlichkeitstheorie ruhen.

In der unter[1]) angeführten Abhandlung hatte Tchebycheff zwei allgemeine Sätze über Mittelwerte (mathematische Hoffnungen) abgeleitet, welche sich als fruchtbar erwiesen; auf einen derselben hat Tchebycheff den Beweis des Bernoulli'schen Theorems und des Gesetzes der grofsen Zahlen gegründet. Die Sätze lauten wie folgt: „Sind $a, b, c, \cdots$ die mathematischen Hoffnungen der Gröfsen $x, y, z, \cdots$; $a_1, b_1, c_1, \cdots$ die mathematischen Hoffnungen ihrer Quadrate $x^2, y^2, z^2, \cdots$, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs $x + y + z + \cdots$ zwischen den Grenzen

$$a + b + c + \cdots \mp \alpha\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \cdots - a^2 - b^2 - c^2 - \cdots}$$

liegt, immer gröfser als $1 - \frac{1}{\alpha^2}$, was auch α sei.“ Und der zweite: „Wenn die mathematischen Hoffnungen der Gröfsen $u_1, u_2, u_3, \cdots$ und ihrer Quadrate $u_1^2, u_2^2, u_3^2, \cdots$ endlich sind, so wird die Wahrscheinlichkeit, dafs der Unterschied zwischen dem arithmetischen Mittel einer Anzahl N dieser Gröfsen und dem arithmetischen Mittel ihrer mathematischen Hoffnungen kleiner ist als ein gegebener Betrag, gleich 1 für $N = \infty$.“

Den ersten Satz hat Yarochenko[1])[2]) zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate verwendet, und zwar sowohl für jene Fassung des Problems, welche Laplace gewählt hat und der wir hier gefolgt sind, als auch in der allgemeineren Formulirung, wie sie Gaufs[5]) seinem zweiten Beweise zugrundegelegt hat.

Den zweiten Satz hat Tchebycheff[3]) selbst zum Ausgangspunkte einer Untersuchung genommen, welche auf das Princip der kleinsten Fehlerquadratsumme als diejenige Methode hinführt, welche die „sichersten“ Werte für die unbekannten Elemente liefert. Es ist der folgende bemerkenswerte Satz, den Tchebycheff zu diesem Zwecke ableitet: „Sind die mathematischen Hoffnungen der Gröfsen $u_1, u_2, u_3, \cdots$ sämtlich Null und bleiben die mathematischen Hoffnungen aller ihrer Potenzen unter irgend einer endlichen Grenze, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die Summe von n dieser Gröfsen, dividirt durch die Quadratwurzel aus der doppelten Summe der mathematischen Hoffnungen ihrer Quadrate, zwischen irgend zwei Grenzen t und t' enthalten sei, darstellbar durch $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{t'} e^{-x^2}\,dx$, wenn n unendlich grofs wird.“ *)

*) In jüngster Zeit hat Markoff[1]) diese Sätze von Tchebycheff und die von letzterem gegebenen Beweise einer Kritik unterzogen. Er

Eine Darstellung der Fehlertheorie und der darauf gegründeten Methode der kleinsten Quadrate, die in ganz eigenartigen Ideen sich bewegt, hat der dänische Geometer Thiele[2]) gegeben.*) Er unterscheidet factische Fehlergesetze (übersichtliche Darstellungen der vorgelegten Beobachtungen), theoretische Fehlergesetze (welche Schlüsse ziehen über den Ausfall künftiger Beobachtungen) und Methodenfehlergesetze (Grenzen der factischen Fehlergesetze für eine beständig wachsende Anzahl der Beobachtungen). Zur Darstellung factischer Fehlergesetze bedient sich Thiele aufser der Reihenentwicklungen eigentümlicher Functionen der Beobachtungsergebnisse, die er als Halbinvarianten des betreffenden Fehlergesetzes bezeichnet; heifsen dieselben $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots$, ist n die Anzahl der Beobachtungen, die mit l_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ bezeichnet werden mögen, so bestehen zur Bestimmung der Halbinvarianten die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
[l] &= n\mu_1 \\
[l^2] &= [l]\mu_1 + n\mu_2 \\
[l^3] &= [l^2]\mu_1 + 2[l]\mu_2 + n\mu_3 \\
[l^4] &= [l^3]\mu_1 + 3[l^2]\mu_2 + 3[l]\mu_3 + n\mu_4 \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Bei continuirlichen (theoretischen) Fehlergesetzen treten Integrale an die Stelle der Summen. Von dem exponentiellen Gesetz $e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m x}{n}\right)^2}$ wird gezeigt, dafs $\mu_1 = m$ und $\mu_2 = n^2$ ist, während alle weiteren μ Null sind; darin wird ein Kriterium für die Prüfung eines Fehlergesetzes darauf erblickt, ob es ein exponentielles ist. Von den weiteren Begriffsbildungen soll als wesentlich angeführt werden, dafs sie so gestaltet sind, dafs sich das Minimum der Fehlerquadratsumme als ihre notwendige Folge ergiebt, ohne dafs es nötig wäre, irgend eine Minimumsbedingung in den Gang der Betrachtung einzuführen.

Die Zurückführbarkeit der Methode der kleinsten Quadrate auf blofse Bildung von Mittelwerten ist schon von Jacobi in seinen Untersuchungen über die Determinantentheorie (Crelle J., 22, p. 285 ff.) dargethan worden;**) das betreffende Resultat, später auch von Glaisher und van Geer abgeleitet, besteht in folgendem: Annullirt man in dem System

$$\varepsilon_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

---

spricht sich gegen die Versuche aus, die Methode der kleinsten Quadrate auf jene Sätze zu stützen, und tritt für die zweite Gaufs'sche Begründung als die einzig rationelle ein.

*) Da die betreffende Schrift in dänischer Sprache verfafst ist, konnten wir uns nur durch das Referat im Jahrb. über die Fortschr. d. M. XXI, 1889, p. 210—217 über ihren Inhalt orientiren.

**) Vgl. hierzu die Arbeit von Mansion[3]).

die linken Seiten, bildet alle möglichen Partialsysteme von je ω Gleichungen, löst jedes derselben nach x, y, z, $\cdots$ auf, legt diesen Lösungen als Gewicht jeweilen das Quadrat der Determinante des betreffenden Partialsystems bei, so stimmen die mit diesen Gewichten gebildeten Mittelwerte aller x, aller y, aller z, $\cdots$ überein mit denjenigen Werten, welche die Methode der kleinsten Quadrate liefert. Von diesem Gesichtspunkte aufgefaſst stellt sich die genannte Methode als ein ökonomisches Verfahren dar, indem sie die Auflösung von $\binom{n}{\omega}$ Systemen von je ω linearen Gleichungen auf die Lösung eines einzigen solchen Systems zurückführt.

In einer Schrift aus jüngster Zeit hat Veltmann[2]) sich auf den Standpunkt gestellt, die Bildung des arithmetischen Mittels aus gleich verläſslichen Beobachtungen sei das einzige Verfahren, dessen Richtigkeit man a priori als evident erklären könne. Er sucht es daher zur Grundlage der Ausgleichungsrechnung zu machen und Fehlergesetz, Princip der kleinsten Quadratsumme und Wahrscheinlichkeitstheorie aus ihr auszuscheiden. Der Weg, den er dabei einschlägt, führt zu denselben Werten der Elemente wie die Methode der kleinsten Quadrate; auch in der Beurteilung der Genauigkeit einer Beobachtung findet Übereinstimmung mit dieser Methode statt, nicht aber in der Gewichtsbestimmung der Elemente.

Biver[1]) machte den Versuch, für die Methode der kleinsten Quadrate eine einfache von wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtungen freie Begründung zu geben unter Zuhilfenahme eines neuen Begriffes, den er „risque d'erreur“ nennt und worunter er eine Function der Correctionen an den Beobachtungen versteht, welche die Gefahr ausdrückt, die man läuft sich von der Wahrheit zu entfernen, wenn man diese Correctionen annimmt. Es wird gezeigt, daſs bei gleich zuverlässigen Beobachtungen jede wachsende Function der Quadratsumme der Correctionen genommen werden könne, und daſs man unbeschadet der Endresultate die Quadratsumme selbst nehmen dürfe. Daſs jede solche Beweisführung nicht ohne mehr oder minder plausible Annahmen geschehen könne, liegt auf der Hand.

Die Analogien, welche zwischen den Formeln, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, und gewissen Formeln der Mechanik bestehen, haben Donkin[1]) Anlaſs gegeben, die Methode der kleinsten Quadrate auf der Mechanik aufzubauen; nicht also um eine Interpretation, sondern um eine neuartige Begründung der Rechnungsvorschriften handelt es sich. Von fundamentaler Bedeutung ist dabei die Auffassung des Kraftbegriffs. Donkin versteht unter Kraft jede Ursache, welche uns veranlaſst, den einer Gröſse zugeschriebenen Wert zu ändern. Ist p das Gewicht einer Beobachtung, welche für die beobachtete Gröſse den Wert x_0 ergab, und x irgend ein dieser Gröſse zugeschriebener Wert, so ist die aus der Beobachtung ent-

springende Kraft, welche dahin zielt, x auf x_0 zurückzuführen, proportional $p(x - x_0)$ und kann diesem Producte geradezu gleichgesetzt werden. Der wahrscheinlichste Wert aus mehreren Beobachtungen ist derjenige, welcher zwischen den Kräften das Gleichgewicht herstellt. Donkin's Arbeit ist als consequente Durchführung eines Gedankenganges gewifs von Interesse; die Stärke der wahrscheinlichkeitstheoretischen Begründungen kommt ihr nicht zu.

Jedenfalls übertrifft sie aber die Beweise, welche Ivory[1]) in einer viel früheren Zeit veröffentlicht hat und deren erster auch von mechanischen Betrachtungen, von einer Analogie zwischen dem Einflusse des Coefficienten a_i in der Gleichung $\varepsilon_i = - l_i + a_i x$ auf die Bestimmung von x und der Wirkungsweise eines Hebels ausgeht.*) Auch die beiden anderen Beweisversuche Ivory's bauen sich auf einer wenig einleuchtenden Analogie, beziehungsweise auf einer unrichtigen Schlufsfolgerung auf und sind, wie der erste, von Ellis[1]) und Glaisher[2]) als unhaltbar gekennzeichnet worden.

In seiner jüngst zum zweitenmale aufgelegten Dissertation hat Henke[1]) (p. 29—57) es unternommen, das Problem, welches der Ausgleichung einer Reihe überzähliger vermittelnder Beobachtungen zugrundeliegt, zu verallgemeinern und ohne Rücksicht darauf, ob die vorliegenden Daten mit unvermeidlichen zufälligen Fehlern behaftete Beobachtungsresultate oder gegebene Gröfsen irgend welcher anderen Abstammung sind, als eine Aufgabe darzustellen, welche das Verlangen stellt, ein analytisches oder geometrisches Gebilde von gegebenem Bildungsgesetz derart zu bestimmen, dafs es sich jenen Daten möglichst genau anpasse oder ihnen möglichst naheliege. Ohne daher, wie es dem Geiste dieser Auslegung entspricht, von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen Gebrauch zu machen, hat Henke dann nach einem Princip gesucht, welches dieser verallgemeinerten Forderung am natürlichsten Genüge leistet, und wurde auf das Princip der kleinsten Quadratsumme geführt. Es giebt in der That zahlreiche Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate, die nicht als Ausgleichung von Beobachtungsfehlern, sondern in dem eben dargelegten Sinne aufzufassen sind.

Zum Schlusse dieses Artikels möge noch des didaktischen Moments gedacht werden. Jede der wahrscheinlichkeitstheoretischen Begründungen der Methode der kleinsten Quadrate setzt eine Reihe subtiler Erörterungen voraus, die an den Anfang einer Disciplin gestellt notwendig Schwierigkeiten bereiten müssen; am günstigsten liegen noch die Verhältnisse bei dem ersten Gaufs'schen Beweise, weil er an eine plausible Hypothese anknüpft und sich in einer relativ kurzen Reihe klarer Schlüsse abwickelt. Gewifs liegt darin der Grund, warum in Schriften, welche der Anwendung dienen, zumeist diesem

*) Ein ähnlicher Scheinbeweis stammt von Hossard[1]).

Beweise der Vorzug gegeben wurde. Manche Autoren derartiger Schriften sind den Schwierigkeiten mit gutem Grunde zunächst völlig aus dem Wege gegangen und haben das Princip der kleinsten Quadratsumme ohne eine eigentliche Begründung, bloſs auf seine Vorteile hinweisend, aufgestellt, um es unmittelbar zur Lösung der Probleme der Ausgleichungsrechnung zu verwenden. Diesen Weg schlug schon Gerling[1]) (p. 9, 23—24) ein, desgleichen Jordan[4]) (1. Aufl. 1877, p. 25, 2. Aufl. 1888, p. 33), der erst nach Erledigung der Anwendungen auf das Fehlergesetz und seine Folgerungen eingeht, und ebenso Vogler[1]).

65. Obwohl hier die wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung der Methode der kleinsten Quadrate im Vordergrunde des Interesses steht, so sollen doch auch zur Durchführung der Methode und über einige mathematisch bemerkenswerte Anwendungen derselben Daten beigebracht werden.

Zu den Hauptgeschäften, welche bei der Behandlung eines Ausgleichungsproblems von der bisher besprochenen Art, welches man als Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen bezeichnet, zu erledigen sind, gehört die Bildung und Lösung jener Gleichungssysteme, welche die vorteilhaftesten Werte der Unbekannten und ihre Gewichte bestimmen. Das erstgedachte System führt den Namen der Normalgleichungen und kann, gleichgiltig ob die Beobachtungen von gleichem oder ungleichem Gewichte waren, auf die Form

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \cdots &= [al] \\ [ba]x + [bb]y + [bc]z + \cdots &= [bl] \\ [ca]x + [cb]y + [cc]z + \cdots &= [cl] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (A)$$

gebracht werden. Die Gewichtsbestimmung der Elemente $x, y, z, \cdots$ läſst sich auf Gleichungssysteme — Gewichtsgleichungen — zurückführen, die sich von diesem System nur in den rechtsseitigen Gliedern unterscheiden, in den Coefficienten aber mit ihm übereinstimmen.

Aber auch ein anderes Ausgleichungsproblem, die Ausgleichung bedingter, das ist solcher Beobachtungen*), bei welchen die beobachteten Gröſsen a priori gewissen theoretischen Bedingungsgleichungen zu genügen haben und wo die gleiche Forderung auch an die ausgeglichenen Beobachtungen gestellt werden muſs, führt

*) Die Ausgleichung bedingter Beobachtungen ist schon von Gauſs[5]) im Supplem. theor. comb. aufgenommen und auf die Berechnung geodätischer Dreiecksnetze angewandt worden. An der weiteren Ausbildung derselben haben sich Bessel[1]), Hansen[4])[6]), Zech[1]), der die erste erschöpfende Darstellung gab, u. a. beteiligt.

zu Gleichungen der Form (A), die wieder Normalgleichungen genannt werden.

Zur Bildung der Normalgleichungen, d. i. zur Herstellung ihrer Coefficienten und rechten Seiten, welche sämtlich Summen von Quadraten oder Producten darstellen, bedient man sich der Quadrattafeln; bei den quadratischen Coefficienten, wie $[aa]$, $[bb]$, $\cdots$, führen sie unmittelbar zum Ziele, bei den anderen auf dem Umwege über die für diesen Zweck zuerst von Bessel[3]) verwendete Identität $[na] = \frac{1}{2}\{[(n+a)^2] - [nn] - [aa]\}$.

Die Auflösung der Normalgleichungen, an sich eine einfache Aufgabe der Algebra, wird bei grofser Zahl der Elemente und vielzifferigen Coefficienten zu einer beschwerlichen Arbeit, die systematische Anordnung und fortlaufende Controle erfordert. Daher war das Interesse der Geometer auf die Durchbildung des Auflösungsverfahrens und in zweiter Reihe auf die Gewinnung von Näherungsmethoden gerichtet.

Das Bedeutendste, was nach dieser Richtung geleistet worden ist, ist der von Gaufs[2])[5]) begründete und in allen Teilen durchgebildete Algorithmus, der in einer successiven Elimination unter Anwendung einer eigenen Symbolik besteht und im Wesen bis in die Gegenwart beibehalten worden ist. Nach Gaufs war es vor allen Hansen[1])[2]), der in den beiden citirten Arbeiten, den ersten, welche nach dem Erscheinen der Theoria combinationis über den Gegenstand veröffentlicht worden sind, das Verfahren der unbestimmten Auflösung der Normalgleichungen ausgebildet hat, wodurch die Berechnung der Elemente mit ihrer Gewichtsbestimmung in einen wichtigen Zusammenhang gebracht worden ist.*) Alle diese Methoden hat Encke[2]) in übersichtlicher, kritisch vergleichender Form ausführlich wiedergegeben; seine Darstellung ist später von vielen Autoren zum Vorbild genommen worden.

Jacobi, der schon in der Abhandlung: De formatione et proprietatibus determinantium, Crelle J., XXV, 1841 (p. 285ff.) Andeutungen über die Anwendung der Determinanten in der Methode der kleinsten Quadrate gemacht hat, gab nach einer Mitteilung Bessel's[4]) für den Fall dreier Elemente Formeln zur Bestimmung der Elemente selbst und ihrer Gewichte, die sich von dem Gaufs'schen Algorithmus durch symmetrische Rechnung unterscheiden.

Nach Jacobi war d'Arrest[2]) der erste, welcher die Determinanten für die Zwecke der Ausgleichungsrechnung heranzog; er fand, dafs das Gewicht des Elementes x gleichkommt der Determinante der Normalgleichungen (A) dividirt durch die zu $[aa]$ adjungirte Unterdeterminante, und ähnlich für die anderen Elemente.

---

*) In einer späteren Abhandlung[5]) kam Hansen auf dieses Verfahren von einem allgemeineren Gesichtspunkte nochmals zurück.

Durchgebildet wurde diese Anwendungsweise der Determinanten durch Glaisher[4][5]) und van Geer[1]); es wurden nicht blofs die Elemente und ihre Gewichte, sondern auch die Quadratsumme der plausiblen Fehler mittelst Determinanten dargestellt und noch weitere Untersuchungen ausgeführt. Der Wert dieser Arbeiten liegt nicht in dem rechnerischen Moment, sondern in der Übersichtlichkeit der Form, welche unter anderem leicht erkennen läfst, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit durch ein System von Fehlergleichungen die Elemente wirklich bestimmt seien [vgl. des Referenten „Fehlertheorie“[10]), p. 320—333].

Unter den Näherungsverfahren zur Auflösung der Normalgleichungen ist der Zeitfolge nach als erstes das von Jacobi[1]) angegebene zu erwähnen. Dasselbe besteht in einer successiven Approximation, die jedoch nur dann zum Ziele führt, wenn die quadratischen Coefficienten $[aa]$, $[bb]$, $\cdots$ weitaus überwiegen; als erste Näherung werden jene Werte genommen, welche sich aus den Gleichungen (A) ergeben, wenn man links alle Glieder unterdrückt bis auf diejenigen der Hauptdiagonale; heifsen die so bestimmten Werte der Elemente $x_1, y_1, z_1, \cdots$, so wird die erste Correctur Δ_1 an x_1 mittelst der Gleichung $[aa]\Delta_1 = -\{[ab]y_1 + [ac]z_1 + \cdots\}$ gerechnet, u. s. w. Jacobi zeigt auch, wie man grofse Coefficienten aufserhalb der Hauptdiagonale durch Transformation zerstören kann. Indessen hat das ganze Verfahren mehr theoretischen als praktischen Wert.*)

Eine andere Methode zur Lösung der Normalgleichungen, die namentlich dann zur Anwendung kommen soll, wenn die Anzahl der Elemente eine sehr beträchtliche ist, stammt von Seidel[1]). Es wird von einem (beiläufig gewählten, theoretisch von einem beliebigen) Wertsystem der Elemente $x, y, z, \cdots$ ausgegangen; dasselbe befriedigt die Normalgleichungen (A) nicht, sondern bewirkt, dafs

$$\begin{aligned}
[aa]x + [ab]y + [ac]z + \cdots - [al] &= N_1 \\
[ba]x + [bb]y + [bc]z + \cdots - [bl] &= N_2 \qquad (B) \\
[ca]x + [cb]y + [cc]z + \cdots - [cl] &= N_3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

wird; nun wird an x allein eine solche Correctur vorgenommen, dafs die rechte Seite in jener Gleichung, in welcher x in der Hauptdiagonale steht, verschwinde; diese Correctur beträgt $\Delta x = -\frac{N_1}{[aa]}$. Dafs man sich dadurch dem richtigen Werte von x nähert, geht daraus hervor, das die Fehlerquadratsumme $[\varepsilon\varepsilon]$, welche vermöge der Fehlergleichungen und mit Benützung der Gaufs'schen Symbole sich auf die Form

---

*) Eine Anwendung hat Jacobi selbst, Crelle J. XXX, p. 51 gegeben.

$$\frac{1}{[aa]}\{[aa]x + [ab]y + [ac]z + \cdots - [al]\}^2$$
$$+ [bb \cdot 1]y^2 + [cc \cdot 1]z^2 + \cdots + 2[bc \cdot 1]yz + \cdots + [ll \cdot 1]$$
$$= \frac{N_1^2}{[aa]} + [bb \cdot 1]y^2 + [cc \cdot 1]z^2 \cdots$$

bringen läfst, durch einen solchen Vorgang verringert, also dem Minimum, das die Methode der kleinsten Quadrate hervorbringen soll, näher gebracht wird. An die Stelle der rechten Seiten in (B) treten nunmehr infolge des geänderten x neue Werte $0, N_2', N_3', \cdots$ Nun kann y corrigirt werden derart, dafs N_2' zu Null wird: die entsprechende Correctur ist $\Delta y = -\frac{N_2'}{[bb]}$; auch dadurch wird eine Verbesserung, weil eine Verminderung von $[\varepsilon\varepsilon]$, herbeigeführt. Auf diese Weise kann nach und nach die Fehlerquadratsumme ihrem Minimum immer näher und näher gebracht werden. — Mit der theoretischen Erforschung und weiteren praktischen Ausbildung dieses Näherungsverfahrens haben sich Mehmke[1])[2]) und Nekrassoff[1]) befafst; es handelte sich um die Convergenzbedingungen, um Mittel zur Beschleunigung der Convergenz und um Kriterien ihres Fortganges.

Wiederholt sind auch graphische Methoden für die Auflösung der Normalgleichungen in Anwendung gebracht worden; so hat Edgeworth[6]) den Fall zweier Unbekannten auf graphischem Wege behandelt durch ein Verfahren, welches sich an die von Laplace[13]) (2. Supplement, p. 47) entwickelte „méthode de situation“ anschliefst. Einen neuen Gedanken haben Klingatsch[1]) und Puller[1]) in die Sache gebracht, indem sie das Problem auf graphostatische Grundlagen zurückführten; der Zweitgenannte construirt aus diesen Grundlagen auch die Quadratsumme $[\lambda\lambda]$ der übrigbleibenden Fehler.

Die Methode der kleinsten Quadrate ist wiederholt bei Lösung analytischer Probleme mit Erfolg verwendet worden, so insbesondere bei dem Problem der Interpolation. Eine der ersten Arbeiten dieser Art stammt von Cauchy[2]), der sich mit der Aufstellung eines Verfahrens befafste, durch welches man die Parameter eines mathematischen Gesetzes auf Grund einer mindestens zureichenden oder einer überschüssigen Anzahl von Beobachtungen mit einer successive steigenden Annäherung bestimmen kann. Die Gleichungen werden bezüglich der Parameter als linear vorausgesetzt. Unter den Vorteilen des Verfahrens führt Cauchy auch den an, dafs bei jeder neuen Annäherung die Werte der Coefficienten diejenigen sind, für welche der gröfste zu befürchtende Fehler am kleinsten ist. Damit ist das Verfahren mit der Methode der kleinsten Quadrate in eine Beziehung gesetzt worden; über das Verhältnis beider zu einander hat Bienaymé[3]) eine eingehende Untersuchung veröffentlicht.

Mit der Aufgabe, aus einer überschüssigen Anzahl von Special-

werten einer ganzen Function m-ten Grades eine Interpolationsformel mit den Hilfsmitteln der Methode der kleinsten Quadrate herzustellen, befaſste sich mit hervorragendem Erfolge Tchebycheff[2][4][5][6]. Wenn

$$y = f(x) = a + bx + cx^2 + \cdots + hx^m$$

die Function ist, und wenn die zu den $n+1$ Werten der Variablen $x_0, x_1, \cdots x_n$ gehörigen Werte derselben mit möglichster Genauigkeit gegeben sind, so liegt für $n = m$ ein bestimmtes, für $n > m$ aber ein unbestimmtes Problem vor, und auf die Lösung des letzteren wendet Tchebycheff die Methode der kleinsten Quadrate an, indem er die Forderung

$$\sum_0^n {}_i \tfrac{1}{2}[y - f(x_i)]^2 \theta^2(x_i) \quad \text{ein Minimum}$$

hinzufügt. Die Specialisirung der willkürlichen Function $\theta(x_i)$ [wobei $\frac{1}{2}\theta^2(x_i)$ die Bedeutung des Gewichts des Specialwertes $f(x_i)$ hat], ferner die Aufstellung verschiedener Hypothesen über das Fortschreitungsgesetz der Reihe $x_0, x_1, \cdots x_n$ ergaben eine Anzahl bemerkenswerter analytischer Resultate. An diese Untersuchungen Tchebycheff's reiht sich auch eine dasselbe Problem behandelnde und an jene Untersuchungen anknüpfende Arbeit C. W. Borchardt's[1] an; auch Schols[1] hat über den Gegenstand eine Abhandlung veröffentlicht.

Auf Analogien zwischen der Methode der kleinsten Quadrate und gewissen Reihenentwicklungen, so den Entwicklungen nach Kugelfunctionen und den Fourier'schen Reihen, haben schon Plarr (Compt. rend. 1857) und Töpler (Wien. Anz., 1876) hingewiesen. In umfassender Weise hat diesen Gegenstand Gram zuerst in einer dänisch geschriebenen Dissertation[1] und später in einer deutsch verfaſsten Abhandlung[2] einer Untersuchung unterzogen. Seine Problemstellung ist die folgende: Zu einer Reihe von Werten des Arguments x sind die zugehörigen Werte zweier reellen Functionen o_x (Beobachtung) und $v_x(>0$, Gewicht) gegeben. In einer nach bekannten Functionen X_i von x fortschreitenden Reihe mit n Gliedern

$$y_x = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n \qquad (C)$$

sollen die Coefficienten a_i so bestimmt werden, daſs

$$\sum_x v_x (o_x - y_x)^2 \quad \text{ein Minimum}$$

werde. Statt des Gauſs'schen Eliminationsverfahrens zur Lösung der Normalgleichungen schlägt Gram einen anderen Weg ein. Kürzt man die Reihe auf $m(<n)$ Glieder ab, setzt

$$y_x^{(m)} = a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \cdots a_{mm} X_m,$$

$$[v_x X_i o_x] = s_i, \qquad [v_x X_i X_k] = p_{ik},$$

so lauten die Normalgleichungen zur Bestimmung der Coefficienten von $y_x^{(m)}$:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_{m1}p_{11} + a_{m2}p_{12} + \cdots + a_{mm}p_{1m} \\ s_2 &= a_{m1}p_{21} + a_{m2}p_{22} + \cdots + a_{mm}p_{2m} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_m &= a_{m1}p_{m1} + a_{m2}p_{m2} + \cdots + a_{mm}p_{mm}. \end{aligned}$$

Mit Benützung der weiteren Abkürzung

$$\Phi_r(x) = \begin{vmatrix} p_{11}\, p_{12} \cdots p_{1\,\overline{r-1}} & X_1 \\ p_{21}\, p_{22} \cdots p_{2\,\overline{r-1}} & X_2 \\ \cdots & \cdot \\ p_{r1}\, p_{r2} \cdots p_{r\,\overline{r-1}} & X_r \end{vmatrix}$$

kommt schliefslich die folgende Darstellung von $y_x^{(m)}$ zu stande:

$$y_x^{(m)} = \frac{[v_x \Phi_1(x) o_x]}{[v_x \Phi_1^2(x)]} \Phi_1(x) + \frac{[v_x \Phi_2(x) o_x]}{[v_x \Phi_2^2(x)]} \Phi_2(x) + \cdots$$
$$+ \frac{[v_x \Phi_m(x) o_x]}{[v_x \Phi_m^2(x)]} \Phi_m(x). \qquad (D)$$

Durch einen Grenzübergang gelangt Gram sodann zu Resultaten, die sich auf einen stetigen Verlauf von x, v_x, o_x beziehen; die Summen gehen dabei in Integrale über, und es entstehen Interpolationsreihen sehr allgemeinen Charakters, in welchen die Fourier'schen Entwicklungen und jene nach Cylinderfunctionen als specielle Fälle enthalten sind.

66. Wir knüpfen nun an den Artikel 59 wieder an und kehren zur Genauigkeitsbestimmung der Beobachtungen zurück, nunmehr von den scheinbaren Fehlern, d. i. von jenen Verbesserungen an den Beobachtungen Gebrauch machend, welche eine Folge der vorteilhaftesten Werte der Unbekannten sind. Zuerst soll der Fall directer Beobachtungen einer unbekannten Gröfse in Betracht gezogen werden.

Gegenwärtig ist der mittlere Fehler das gebräuchlichste Genauigkeitsmafs. Die einfachste Ableitung desselben gründet sich auf die strenge Beziehung

$$[\varepsilon\varepsilon] = [\lambda\lambda] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}$$

zwischen den wahren und scheinbaren Fehlern; indem an die Stelle von $[\varepsilon]^2 = [\varepsilon\varepsilon] + [\varepsilon_i \varepsilon_k]$ $(i \lesseqgtr k)$ der Mittelwert der rechten Seite, d. i. $n\mu^2 + 0$ gesetzt wird, ergiebt sich:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}. \qquad (\alpha)$$

Für die Summe $[\lambda\lambda]$ kann der von Fourier[1]) zuerst abgeleitete und zur Genauigkeitsbestimmung benützte Ausdruck $[ll] - \frac{[l]^2}{n}$ genommen werden, der lediglich die Beobachtungswerte in Rechnung zieht. Bemerkt sei, daſs Fourier, wie dies früher auch von anderer Seite geschah, die scheinbaren Fehler für die wahren nahm.

Gegen die obige Ableitung hat Bertrand[3]) (p. 204 u. 206) den Einwand erhoben, daſs sie die Gröſse $[\varepsilon_i\varepsilon_k]$ deshalb vernachlässige, weil ihr theoretischer Mittelwert Null ist; er suchte aus verschiedenen Annahmen über die Verteilung der Fehler nach dem Vorzeichen zu erweisen, daſs dieser Vorgang unter Umständen Bedenken erregen kann.

Einen strengen Beweis der Formel (α) aus dem Fehlergesetz hat Helmert[4]) gegeben. Er leitet aus der Wahrscheinlichkeit für die Coexistenz der wahren Fehler ε_i $(i = 1, 2, \cdots n)$, d. i. aus

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \cdots d\varepsilon_n,$$

die Wahrscheinlichkeit für die Coexistenz der scheinbaren Fehler λ_i ab, indem er mit Hilfe der $n+1$ Beziehungen

$$\lambda_i = \varepsilon_i - \frac{[\varepsilon]}{n} \quad (i = 1, 2, \cdots n); \quad \frac{[\varepsilon]}{n} = u$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ aus dem obigen Ausdruck eliminirt und ihn sodann in Bezug auf u zwischen $-\infty, \infty$ integrirt, weil ein bestimmtes Wertsystem λ_i mit allen Werten von u vereinbar ist; es ergiebt sich auf diese Art für die Wahrscheinlichkeit der Coexistenz der λ_i der Ausdruck:

$$\sqrt{n}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} e^{-h^2[\lambda\lambda]} d\lambda_1 d\lambda_2 \cdots d\lambda_n. \qquad (\beta)$$

Die wahrscheinlichste Bestimmung für h bei gegebenem $[\lambda\lambda]$ ist nun die, für welche

$$h^{n-1} e^{-h^2[\lambda\lambda]} \text{ ein Minimum}$$

ist; dies führt auf $h^2 = \frac{n-1}{2[\lambda\lambda]}$ und mit Hilfe der Beziehung $K_2 = \mu^2 = \frac{1}{2h^2}$ [Art. 58(γ)] wieder auf die Formel (α).

Verfasser[9]) [und[10]), p. 156—158] hat diese Formel aus der Beantwortung der folgenden Frage abgeleitet: Welches Gesetz befolgen die scheinbaren Fehler λ, welche das arithmetische Mittel den

Beobachtungen zuschreibt, wenn $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ das Gesetz der wahren Fehler ist? Die Analyse ergab für das gesuchte Gesetz den Ausdruck

$$\frac{h\sqrt{\frac{n}{n-1}}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n h^2}{n-1}\lambda^2}, \tag{γ}$$

sodafs es dieselbe Form, aber ein anderes Präcisionsmafs hat. Daraus folgt als Mittelwert von λ^2 einerseits $\frac{[\lambda\lambda]}{n}$, andererseits $\frac{n-1}{2nh^2}$; aus der Gleichsetzung beider Werte ergiebt sich (α).

Die Sicherheit oder Genauigkeit der Formel (α) hängt von dem Umfange der Beobachtungsreihe ab. Beurteilt man sie nach dem Mittelwert von $\left(\mu^2 - \frac{[\lambda\lambda]}{n-1}\right)^2$ [Czuber[10]), p. 159], so ergeben sich unter Voraussetzung eines grofsen n für μ die mittleren Grenzen

$$\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}\left(1 \mp \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\right). \tag{δ}$$

Helmert[4]) [s. auch Czuber[10]), p. 160—163] hat sich von der letzterwähnten Voraussetzung dadurch unabhängig gemacht, dafs er unmittelbar auf die Bestimmung des mittleren Fehlers in der Gleichung $\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}$ ausging. Er benützt zu diesem Zwecke die Wahrscheinlichkeit, dafs $[\lambda\lambda]$ zwischen die Grenzen $u, u + du$ falle, die sich aus (β) durch Integration auf dem Gebiet $u \leqq [\lambda\lambda] \leqq u + du$ ergiebt und gleich

$$\frac{h^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} u^{\frac{n-3}{2}} e^{-h^2 u} du \tag{ε}$$

ist; hieraus findet sich durch Multiplication mit $\sqrt{[\lambda\lambda]} = u^{\frac{1}{2}}$ und Integration zwischen 0 und ∞ der Mittelwert von $\sqrt{[\lambda\lambda]}$, und mit Hilfe desselben erhält man als mittlere Grenzen von μ:

$$\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}\left(1 \mp \sqrt{2 - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sqrt{\frac{8}{n-1}}}\right). \tag{ζ}$$

Bei grofsem n führt eine mit der Stirling'schen Formel vollzogene Näherungsrechnung von (ζ) wieder auf (δ) hin. Indessen ist der Unterschied beider Ausdrücke auch bei nur mäfsig grofsem n sehr gering.

Den Gedanken, zur Bestimmung der Genauigkeit directer Beobachtungen statt der Quadrate der scheinbaren Fehler die absoluten

Beträge ihrer ersten Potenzen zu verwenden, hat zuerst Peters[1]) in einer Formel verwirklicht. Er fand auf einem wenig befriedigenden Wege für den wahrscheinlichen Fehler r einer Beobachtung den Ausdruck*)

$$\frac{\varrho\sqrt{\pi}[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-1)}};$$

nimmt man die in Art. 58 angeführten Beziehungen hinzu, wonach $rh = \varrho$ und der durchschnittliche Fehler $K_1 = \vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$ ist, so ergiebt sich für den letzteren die Bestimmung**)

$$\vartheta = \frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-1)}}. \qquad (\eta)$$

Eine correcte Deduction dieser Formel kann auf das unter (γ) angegebene Häufigkeitsgesetz der λ gegründet werden; multiplicirt man nämlich den eben genannten Ausdruck mit $2\lambda d\lambda$ und integrirt das Product auf dem Gebiete der positiven reellen Zahlen, so erhält man als Mittelwert von $|\lambda|$

$$\frac{1}{h}\sqrt{\frac{n-1}{n\pi}};$$

wird dies gleich $\frac{[|\lambda|]}{n}$ gesetzt und dabei die Beziehung $\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$ beachtet, so kommt wieder die Formel (η) zu stande.

Dieselbe ist auch von Helmert[3]) auf einem Wege abgeleitet worden, welcher ihre Verallgemeinerung auf vermittelnde Beobachtungen mit mehreren unbekannten Elementen zuläſst***); in einer anderen Arbeit[4]) hat Helmert auch ihre mittlere Unsicherheit bestimmt und gefunden, daſs bei groſsem n die mittleren Grenzen für ϑ lauten:

$$\frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-1)}}\left(1 \mp \sqrt{\frac{\pi-2}{2(n-1)}}\right). \qquad (\iota)$$

Der Vorschlag, die absoluten Beträge der Beobachtungsdifferenzen zur Beurteilung der Genauigkeit einer Beobachtungsreihe zu verwenden, ist von Jordan[1]) ausgegangen.†) Setzt man voraus, daſs die wahren Fehler das Gesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}$ befolgen, so überzeugt man sich durch eine einfache Analyse, daſs die Beobachtungs-

*) Vgl. die Ableitung dieser Formel durch Johnson[1]).

**) Eine andere Formel, welche gleichfalls ϑ durch die Summe $[|\lambda|]$ ausdrückt, hat Fechner[1]) veröffentlicht; dieselbe ist von Helmert[4]) auf ihre Präcision untersucht worden.

***) Die diesem Fall entsprechende Formel für den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung ist auch von Lüroth[1]) gegeben worden.

†) Es scheint, daſs Brégel (Compt. rend. XCIII, p. 1119) unabhängig von ihm zu derselben Idee gekommen ist.

differenzen d dem Gesetze $\frac{h}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2} d^2}$ unterworfen sind. Daraus ergeben sich für den mittleren Wert D^2 von d^2 und den durchschnittlichen Wert $\mathfrak{D}$ von $|d|$ die Bestimmungen

$$D = \mu\sqrt{2}, \qquad \mathfrak{D} = \vartheta\sqrt{2};$$

verfügt man somit über s unabhängige Beobachtungsdifferenzen, so kann mit Hilfe derselben der mittlere und der durchschnittliche Fehler einer Beobachtung auf Grund der Formeln

$$\mu = \sqrt{\frac{[dd]}{2s}}, \qquad \vartheta = \frac{[|d|]}{s\sqrt{2}}$$

berechnet werden. Bei n Beobachtungen giebt es wohl $\frac{n(n-1)}{2}$ verschiedene, aber blofs $n-1$ unabhängige Differenzen; abstrahirt man bei den ersteren von der Abhängigkeit, so liefern sie demnach die Genauigkeitsmafse

$$\mu = \sqrt{\frac{[dd]}{n(n-1)}}, \qquad \vartheta = \frac{[|d|]\sqrt{2}}{n(n-1)}. \qquad (\varkappa)$$

Einen strengen Beweis für die Richtigkeit der ersten dieser zwei Formeln hat Andrae[2]) geliefert und sich auch um die Begründung der zweiten bemüht; *) erst Helmert[4]) ist sie in einwurfsfreier Weise gelungen. Dieser gab zugleich die Genauigkeitsbestimmung der Formel und fand als mittlere Grenzen von ϑ:

$$\frac{[|d|]\sqrt{2}}{n(n-1)}\left(1 \mp \sqrt{\frac{\frac{n+1}{3}\pi + 2(n-2)\sqrt{3} - 4n + 6}{n(n-1)}}\right). \qquad (\nu)$$

Bei der Wahl unter allen diesen Formeln hätte vom theoretischen Gesichtspunkte die Sicherheit zu entscheiden, welche sie bieten; diese ist durch den Zahlenwert des mit $\mp$ versehenen Gliedes in der Klammer von (δ), (ι), (ν) gekennzeichnet; für $n = 10$ und $n = 50$ ist dieser Zahlenwert bei den genannten Formeln:

	(δ)	(ι)	(ν)
$n = 10$	0·2357	0·2518	0·2411
$n = 50$	0·1010	0·1084	0·1023.

*) In der unter [4]) angeführten Untersuchung fand er als wahrscheinliche Grenzen des wahrscheinlichen Fehlers einer Beobachtung:

$$0{\cdot}5978\,\frac{[|d|]}{s}\left\{1 \mp \frac{0{\cdot}482 + \frac{1}{n}\,0{\cdot}055}{\sqrt{n-1}}\right\} \text{ mit } s = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Diese Probe zeigt und eine ausführlichere Rechnung bestätigt es, dafs der mittlere Fehler das zuverläfsigste Mafs der Genauigkeit darbietet. Aufser dieser Erwägung hat aber auch die Rücksichtnahme auf die erforderliche Rechenarbeit mitzusprechen; diese wäre bei der Formel (η) am geringsten, bei ($\varkappa$) am umfangreichsten. Trotzdem der mittlere Fehler nach dieser Richtung nicht der vorteilhafteste ist, wird er doch allgemein benützt.

67. Wenn bei vermittelnden Beobachtungen die Beurteilung der Genauigkeit in der Bestimmung der unbekannten Elemente selbst und von Functionen dieser Elemente als letztes Ziel zu betrachten ist, so mufs der Erledigung dieser Fragen doch die Genauigkeitsbestimmung für eine Beobachtung*) vorangehen; von dieser allein soll hier gehandelt werden.

Gaufs[5]) (art. 38) hat die Bestimmung des mittleren Fehlers einer Beobachtung aus den scheinbaren Fehlern λ, welche aus der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate entspringen, auf den merkwürdigen algebraischen Satz gegründet, dafs sich die Quadratsumme $[\lambda\lambda]$ dieser Fehler als quadratische Form der wahren Fehler ε_i darstellen läfst; den Mittelwert dieser Form setzte er ihrem wirklich beobachteten Wert $[\lambda\lambda]$ gleich und erzielte dadurch die Lösung der Aufgabe.

Geht man nämlich von der Erwägung aus, dafs jedes Wertsystem e_i, welches die Gleichungen

$$e_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots \quad (i = 1, 2, \cdots n) \qquad (\alpha)$$

widerspruchsfrei macht, $n - \omega$ lineare Gleichungen mit völlig bestimmten, weil nur von l_i, a_i, b_i, c_i, $\cdots$ abhängigen, Coefficienten erfüllt, welche Gleichungen sich durch Elimination der ω Elemente $x, y, z, \cdots$ aus dem System (α) ergeben und lauten mögen:

$$\begin{aligned} A_1 e_1 + A_2 e_2 + \cdots + A_n e_n &= w_1 \\ B_1 e_1 + B_2 e_2 + \cdots + B_n e_n &= w_2 \qquad (\beta) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ N_1 e_1 + N_2 e_2 + \cdots + N_n e_n &= w_\nu \quad (\nu = n - \omega), \end{aligned}$$

so hat man damit auch ein Gleichungssystem gefunden, welchem sowohl die wahren Fehler ε_i wie auch die scheinbaren λ_i genügen müssen; d. h. das System (β) besteht auch für $e_i = \varepsilon_i$ und $e_i = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \cdots n)$. Da nun die λ_i überdies die Bedingung „$[\lambda\lambda]$ ein

*) Im Falle gleich genauer Beobachtungen. Im anderen Falle handelt es sich um den mittleren Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 1 (Gewichtseinheit). Da aber Fehlergleichungen von ungleichem Gewicht durch Multiplication mit den Quadratwurzeln der respectiven Gewichte auf das Gewicht 1 zurückgeführt werden können, so beschränken wir uns in unseren Darlegungen auf gleich genaue Beobachtungen.

Minimum“ zu erfüllen haben, so sind sie bestimmt durch die Forderungen:

$$[A\lambda] - w_1 = 0 \quad [B\lambda] - w_2 = 0 \cdots \quad [N\lambda] - w_\nu = 0 \qquad (\gamma)$$

$$„[\lambda\lambda] - 2k_1\{[A\lambda] - w_1\} - 2k_2\{[B\lambda] - w_2\} - \cdots - 2k_\nu\{[N\lambda] - w_\nu\}$$

ein absol. Minimum“.

Aus diesen ergeben sich für die λ_i die Bestimmungen

$$\lambda_i = A_i k_1 + B_i k_2 + \cdots + N_i k_\nu \quad (i = 1, 2, \cdots n), \qquad (\delta)$$

und die Werte der Correlaten $k_1, k_2, \cdots k_\nu$ sind aus dem Normalgleichungssystem

$$\begin{aligned} [AA]k_1 + [AB]k_2 + \cdots + [AN]k_\nu &= w_1 \\ [BA]k_1 + [BB]k_2 + \cdots + [BN]k_\nu &= w_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [NA]k_1 + [NB]k_2 + \cdots + [NN]k_\nu &= w_\nu \end{aligned} \qquad (\varepsilon)$$

zu entnehmen. Aus (δ) folgt mit Zuziehung der (γ):

$$[\lambda\lambda] = w_1 k_1 + w_2 k_2 + \cdots + w_\nu k_\nu;$$

$k_1, k_2, \cdots k_\nu$ ergeben sich aus (ε) als lineare Formen der w, sodafs $[\lambda\lambda]$ zunächst als quadratische Form der w erscheint; die w sind aber auf Grund von (β) als lineare Formen der ε_i darstellbar, folglich ist schliefslich auch $[\lambda\lambda]$ eine quadratische Form der ε_i:

$$[\lambda\lambda] = \Sigma a_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j. \qquad (\zeta)$$

Der Mittelwert dieser Form ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\Sigma a_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j\varphi(\varepsilon_1)\varphi(\varepsilon_2)\cdots\varphi(\varepsilon_n)d\varepsilon_1 d\varepsilon_2\cdots d\varepsilon_n = K_2\Sigma a_{ii},$$

weil vermöge $\varphi(-\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)$ jedes

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_i\varepsilon_j\varphi(\varepsilon_i)\varphi(\varepsilon_j)d\varepsilon_i d\varepsilon_j = 0 \quad (i \lessgtr j)$$

und jedes $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\varepsilon_k)d\varepsilon_k = 1$ ist. Die weitere Analyse [vgl. Czuber[10]) (p. 307—312) und Guyou[1])] zeigt aber, dafs $\Sigma a_{ii} = \nu = n - \omega$; folglich ist im Sinne der obigen Ausführungen

$$[\lambda\lambda] = (n - \omega)K_2$$

zu setzen, woraus die bekannte Formel

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n - \omega}} \qquad (\eta)$$

resultirt.*)

Bertrand[3]) (p. 278—234) hat an dieser Ableitung Kritik geübt, indem er bemerkte, dafs man das hier befolgte Princip statt auf die Form der w, welche $[\lambda\lambda]$ darstellt, auch auf jede andere Form anwenden könnte und dadurch zu unbegrenzt vielen Bestimmungen von μ gelangen würde, und dafs die Formel (η) nur dann den Vorzug verdiente, wenn sie die sicherste, d. h. die mit dem kleinsten mittleren Fehler behaftete wäre; das sei aber, wie er an einem Beispiele darthun will, nicht der Fall, und dadurch verliere die obige Formel ihre wissenschaftliche Berechtigung. Verfasser, der diese Einwendung in seine „Fehlertheorie“[10]) (p. 312—317) aufnahm, hat sich später über den Fehlschlufs in der letzten Bertrand'schen Folgerung aufklären lassen und gab dann in einer Note[11]) einen Beweis dafür, dafs unter den quadratischen Formen der w thatsächlich diejenige, welche $[\lambda\lambda]$ darstellt, die sicherste Bestimmung für μ liefert.

Früher schon hatte Pizzetti[2]) [s. auch [6]), p. 283ff.] mit der Bertrand'schen Kritik der Gaufs'schen Formel sich befafst und den Satz nachgewiesen, dafs bei gegebenen λ_i und bei Annahme des Gesetzes $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ für die wahren Fehler die wahrscheinlichste Hypothese über das Präcisionsmafs der Beobachtungen, unabhängig von jeglicher Hypothese über die Werte der Elemente, zu der Formel (η) für den mittleren Fehler führe. Nach seiner Analyse ist nämlich die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese über den Wert von h bei gegebenen λ_i proportional

$$h^{n-\omega} e^{-h^2[\lambda\lambda]},$$

die wahrscheinlichste Bestimmung von h also diejenige, welche diesen Ausdruck zu einem Maximum macht, d. i.

$$h = \sqrt{\frac{n - \omega}{2[\lambda\lambda]}},$$

woraus sich wegen $\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}$ die Formel (η) ergiebt [vgl. damit die Folgerung aus (β) in Art. 66].

Die gleiche Thatsache läfst sich aber auch aus einem anderen Satze folgern, den Pizzetti[6]) (p. 267) nachgewiesen hat und der sich als eine Verallgemeinerung eines von Helmert[4]) stammenden Resultates darstellt, welches wir im vorigen Artikel unter (ε) angeführt haben. Pizzetti hat nämlich, wieder unter Voraussetzung

*) Eine andere Ableitung dieser Formel, die uns aber unzugänglich geblieben ist, hat Landré[1]) mitgeteilt.

des Fehlergesetzes $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$, gezeigt, dafs die Wahrscheinlichkeit, es liege die Summe der Quadrate der aus der Ausgleichung entspringenden λ_i zwischen den Grenzen u und $u + du$, gleichkommt

$$\frac{h^{n-\omega}}{\Gamma\left(\frac{n-\omega}{2}\right)} u^{\frac{n-\omega}{2}-1} e^{-h^2 u} du; \tag{ι}$$

demnach ist bei gegebenem $u = [\lambda\lambda]$ jene Bestimmung für h die wahrscheinlichste, für welche der von h abhängige Teil dieses Ausdruckes am gröfsten wird, und dies führt wieder auf die Formel (η).

Man kann aber die Wahrscheinlichkeit (ι) auch dazu benützen, um den Mittelwert von $u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{[\lambda\lambda]}$ zu bestimmen und danach die Sicherheit der Formel (η) zu beurteilen; dieser Mittelwert ist

$$\frac{h^{n-\omega}}{\Gamma\left(\frac{n-\omega}{2}\right)} \int_0^\infty u^{\frac{n-\omega-1}{2}} e^{-h^2 u} du = \frac{\Gamma\left(\frac{n-\omega+1}{2}\right)}{h\Gamma\left(\frac{n-\omega}{2}\right)};$$

mit seiner Hilfe ist es möglich, den Mittelwert von $\left(\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-\omega}} - \mu\right)^2$ zu berechnen, der zu den mittleren Grenzen

$$\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-\omega}} \left\{1 \mp \sqrt{2 - \frac{\Gamma\left(\frac{n-\omega+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\omega}{2}\right)} \sqrt{\frac{8}{n-\omega}}}\right\} \tag{$\varkappa$}$$

von μ führt. Die Helmert'sche Formel (ζ) des vorigen Artikels ist der dem Werte $\omega = 1$ entsprechende besondere Fall dieser allgemeinen Formel.

Die im vorigen Artikel angeführte Peters'sche Formel für den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung, ausgedrückt durch die absoluten Beträge der scheinbaren Fehler, ist auf den Fall vermittelnder Beobachtungen zuerst von Lüroth[1]) ausgedehnt worden; ist n die Anzahl der Beobachtungen, ω jene der Elemente, so drückt sich der wahrscheinliche Fehler durch

$$\frac{\varrho\sqrt{\pi}[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-\omega)}} \tag{ν}$$

aus; nach Abtrennung des Factors $\varrho\sqrt{\pi}$ bleibt der durchschnittliche Fehler

$$\frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-\omega)}} \tag{ξ}$$

übrig; eine strengere Formel für den letzteren — die vorstehende

gilt nur für den Fall $\omega = 1$ in voller Strenge — hat Helmert[3]) abgeleitet.

Die in diesem Artikel vorgeführten Genauigkeitsmafse passen auch für bedingte Beobachtungen, wenn ω die Anzahl der Bedingungsgleichungen bedeutet.

68. Über Fehlerreihen sind mannigfache Untersuchungen teils mit rein theoretischen, teils mit praktischen Zielen unternommen worden. Wir beginnen mit denjenigen, welche den Zweck hatten, aus der Erfahrung entnommene Fehlerreihen auf ihre Übereinstimmung mit dem exponentiellen Fehlergesetz zu prüfen. Von dieser Seite her hat das genannte Gesetz eine wertvolle Bestätigung erfahren, die sich den vielfachen apriorischen Begründungen als ein empirischer Beweis zugesellen darf.

Die Prüfung wurde zumeist so geführt, dafs man nach Feststellung eines Genauigkeitsmafses die Häufigkeit der Fehler in entsprechend gewählten Intervallen mit derjenigen verglich, welche vermöge des jenem Präcisionsmafs entsprechenden Fehlergesetzes zu erwarten wäre. Wiewohl die Präcisionsmafse auf die ideale Reihe der wahren Fehler sich beziehen, während nur scheinbare Fehler zur Disposition stehen, so kann hieraus bei zahlreicheren Beobachtungen — und nur bei solchen hat die Vergleichung eine Berechtigung — ein Nachteil nicht entspringen. Ein anderer Weg, um zu erkennen, ob die Structur einer Fehlerreihe dem Fehlergesetz entspreche, besteht darin, dafs man eine und dieselbe Gröfse (den mittleren oder durchschnittlichen Fehler) nach verschiedenen Formeln rechnet oder nachsieht, ob zwischen verschiedenen, unabhängig von einander bestimmten Genauigkeitsmafsen diejenigen Beziehungen mit entsprechender Annäherung bestehen, welche aus dem apriorischen Gesetze entspringen.

Die ersten gröfseren Untersuchungen dieser Art hat Bessel ausgeführt und veröffentlicht [in den Fundamenta astron. (1818) und in der unter [2]) genannten Abhandlung]. Es handelte sich dabei um astronomische Messungen, welche teils von Bradley, teils von Bessel selbst herrührten; die Übereinstimmung mit dem Gaufs'schen Gesetz war eine sehr befriedigende.

Ein sehr umfangreiches Material hat Peirce[1]) der Prüfung unterlegt. Dasselbe betraf Zeitmessungen mit Hilfe eines Hipp'schen elektrischen Chronoskops; gemessen wurde die Zeit von der Abgabe eines Zeichens bis zum Eintreffen der Antwort von der empfangenden Person. In jeder der 24 Serien von beiläufig je 500 Einzelbeobachtungen wurde die wirkliche Verteilung der Abweichungen vom arithmetischen Mittel mit der gesetzmäfsigen verglichen; es ergab sich zureichende Übereinstimmung. Pizzetti[6]) (p. 136) hält diese Verification für um so wertvoller, als es sich hier anscheinend nur um eine beschränkte Anzahl von Fehlerquellen handelt, die fast alle physiologischen Ursprungs sind.

Zum Zwecke der Prüfung des Gaufs'schen Fehlergesetzes hat ferner Guarducci[1]) [s. auch des Referenten „Fehlertheorie“[10]), p. 193—194] die Dreiecksschlufsfehler der Triangulirung des modenesischen Katasters bearbeitet; hier handelte es sich also nicht eigentlich um directe Beobachtungen einer Gröfse; man erkennt aber leicht, dafs, sofern der Fehler der einzelnen Winkelmessung das Gesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ befolgt, der Fehler in der Winkelsumme, der Schlufsfehler, dem Gesetze $\frac{h}{\sqrt{3\pi}} e^{-\frac{h^2}{3}\varepsilon^2}$ gehorcht. Auch hier lieferten die 2238 Fehlerwerte eine unverkennbare Bestätigung des theoretischen Gesetzes.

Faye[1]) und Laurent[2]) haben die Anschauung vertreten, dafs die empirische Begründung des Fehlergesetzes an der Hand eines genügend umfangreichen Beobachtungsmaterials jeder theoretischen Beweisführung vorzuziehen sei, weil dadurch die Notwendigkeit der Aufstellung einer Hypothese entfalle. Faye hat diesen Vorgang in seinen Vorlesungen befolgt, und Laurent hat für diesen Zweck 1444 Messungen eines auf andere Weise bereits scharf ermittelten Winkels ausgeführt und verwendet. Wir könnten einer solchen Einführung des Fehlergesetzes nicht das Wort reden.

Bezüglich der Durchführung einer empirischen Ableitung des Gesetzes der Fehlerhäufigkeit sehe man die bezüglichen Arbeiten von Helmert[6]) und Edgeworth[5]) ein; ersterer construirt die Curve $\Phi(\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$ als das primäre Diagramm und leitet daraus das Diagramm für $\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2}\Phi'(\varepsilon)$ [Voraussetzung: $\varphi(-\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)$] ab.

Eine vielfach erörterte Frage ist die nach dem vermutlichen gröfsten Fehler*) in einer Beobachtungsreihe von bekannter Genauigkeit. Man erkennt sogleich, dafs es keine absolute Antwort auf diese Frage geben könne, dafs vielmehr auch der Umfang der Beobachtungsreihe mitbestimmend sein werde; denn je zahlreicher die Beobachtungen, desto eher ist auch das Eintreffen gröfserer Fehler zu erwarten. Befolgen die Fehler das Gesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ oder $\frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\mu^2}}$, so kann jener Betrag M als das Maximum des Fehlers

---

*) Bertrand[3]) (p. 216—217, Compt. rend. CVI, p. 786ff.) hat sich auch mit der Bestimmung des wahrscheinlichen Wertes des kleinsten Fehlers beschäftigt und gefunden, dafs er in einer Reihe von n Beobachtungen des mittleren Fehlers μ gleichkomme $\frac{\mu\sqrt{2}}{n+1}$, d. h. in einer grofsen Anzahl derartiger Beobachtungsreihen wird der Minimalfehler etwa ebenso oft unter wie über diesem Betrage liegen.

in einer Reihe von n Beobachtungen dieser Art angesehen werden, welcher der Gleichung

$$n \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_M^\infty e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = n \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{M}{\mu\sqrt{2}}}^\infty e^{-t^2} dt = 1$$

genügt. Denn für einen M übersteigenden Betrag würde der Wert des Integrals kleiner werden, folglich die mutmafsliche Anzahl solcher Fehler, welche diesen Betrag übertreffen, unter 1 sinken. Die Natur dieser Gleichung bringt es mit sich, dafs $\frac{M}{\mu}$ mit n nur sehr langsam wächst; während bei $n = 20$ sich $\frac{M}{\mu} = 1{\cdot}95$, der maximale Fehler also kleiner als der doppelte mittlere ergiebt, wird bei $n = 1000000$ das Verhältnis $\frac{M}{\mu} = 4{\cdot}88$, der gröfste Fehler also noch immer unter dem fünffachen mittleren Fehler liegen. In zutreffender Weise hat daher Helmert[7]) für den maximalen Fehler M nicht einen festen Wert, sondern ziemlich weite Grenzen, 2μ und 5μ, angegeben, darauf hinweisend, dafs es auf die Menge der Beobachtungen ankommt. In anderer — und wie gleich bemerkt werden mag, theoretisch nicht haltbarer — Weise suchte Jordan[5]) die Frage nach dem maximalen Fehler zu lösen; er substituirte dem exponentiellen Fehlergesetz ein anderes, das durch eine gerade rationale Function des Fehlers dargestellt ist, und legte der stellvertretenden Curve die Forderung auf, dafs sie die Abscissenaxe in endlicher Entfernung berühre; bei einer Berührung erster Ordnung ergab sich ihm:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{15}{16M}\left[1 - 2\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^4\right],$$

und bei einer Berührung zweiter Ordnung:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{35}{32M}\left[1 - 3\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2 + 3\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^4 - \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^6\right];$$

dabei bedeutet M den Abstand der Berührungspunkte vom Ursprung, also die Fehlergrenze, und aus der notwendigen Bedingung $2\int_0^M \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$ ergiebt sich für sie im ersten Falle $2{\cdot}6458\,\mu$, im zweiten Falle geradeaus 3μ. Daraus deducirte Jordan 3μ als den Wert des Maximalfehlers.*) Es verdient bemerkt zu werden, dafs schon

*) Vgl. hierzu die kritischen Bemerkungen Helmert's[7]). — In einer späteren Arbeit[6]) hat Jordan eine eigentümliche Bestimmung des maximalen Fehlers vorgenommen. Er zählte in 1800 Spalten der Vega-

Fourier[1]) 3μ als den gröfsten, aber nicht in den Beobachtungen selbst, sondern in deren arithmetischem Mittel zu befürchtenden Fehler bezeichnete mit der Motivirung, dafs man 50.000 gegen 1 wetten dürfe, dafs dieser Fehlerbetrag nicht überschritten werde.

Es liegt nahe und hat auch eine gewisse Berechtigung, von solchen Beobachtungen, deren aus der Ausgleichung hervorgegangene Fehler über die erwartungsmäfsige Grenze hinausfallen, zu vermuten, dafs bei ihrer Ausführung andere, ungünstigere Umstände mitgewirkt haben als bei anderen. Dies mufste auf den Gedanken führen, eine Verschärfung der Endresultate dadurch anzustreben, dafs man nach erfolgter Ausgleichung solche widersprechende Beobachtungen (discordant observations) ausscheidet und an der so gereinigten Beobachtungsreihe die Ausgleichung von neuem vornimmt. In der That sind mehrfache Äufserungen über die Zulässigkeit eines solchen Verfahrens und verschiedene Versuche zu verzeichnen, dasselbe auf eine theoretische Grundlage zu stellen.

Man sieht ohne weiteres ein, dafs man die Genauigkeit des Resultates einer Reihe directer Beobachtungen erhöht, wenn man solche Beobachtungen ausscheidet, deren Abweichungen vom arithmetischen Mittel eine gewisse Grenze ω überschreiten; Bertrand[3]) (p. 211—215, Compt. rend. CVI, p. 701 ff.) hat hierüber eine Untersuchung angestellt und den Grad der Verschärfung des neuen Resultates bestimmt. Aber es entsteht die Frage, ob dies eine reelle Erhöhung der Genauigkeit bedeutet und nicht vielmehr blofs eine rechnungsmäfsige, mit anderen Worten, ob man eine Gewähr dafür hat, dafs man sich dadurch der Wahrheit nähere. Während Bertrand die Festsetzung der unteren Grenze ω für die Abweichung der auszuscheidenden Beobachtungen dem Ermessen des Rechners anheimstellt, suchte B. Peirce[1]) sie theoretisch festzustellen, indem er ein wahrscheinlichkeitsmäfsiges Kriterium aufstellte, durch das eine zweifelhafte Beobachtung als eine solche erkannt werden soll, bei welcher aufsergewöhnliche störende Ursachen mitgewirkt haben. Dieses Kriterium hat seitens amerikanischer Beobachter ernstliche Beachtung gefunden, wie man daraus entnehmen kann, dafs Gould (Gould's Astr. J. IV, Nr. 83) und Chauvenet[1]) Tabellen zu seiner Anwendung gerechnet haben; auch die Verteidigung, welche Winlock[1]) den kritischen Bemerkungen Airy's[1]) entgegengestellt hat, läfst dies erkennen*). Airy hat sich als Gegner

---

Bremiker'schen Logarithmentafel die Nullen an der 6. Stelle, bildete die Differenzen der beobachteten Anzahlen gegen die durchschnittliche Anzahl 5 — die Differenzen folgten sehr nahe dem Gaufs'schen Gesetz — und bestimmte aus denselben den maximalen Fehler zu $2\frac{3}{4}\mu$.

*) Nach Peirce's Kriterium hängt die Grenze ω von der Anzahl der Beobachtungen und der Zahl derjenigen ab, die man ausscheiden will. Ein anderes Kriterium hat Stone[1]) aufgestellt; bei diesem hängt ω von einer durch die Art der Beobachtungen und den Beobachter bedingten festen Zahl ab.

der nachträglichen Ausscheidung von Beobachtungen bekannt und mit Recht die Möglichkeit bestritten, von einer Beobachtung auf irgend welchem theoretischen Wege festzustellen, ob sie Vertrauen verdient oder nicht. Bessel[1]) (p. 67) hat seine Stellung zu der Frage in ähnlicher Weise bestimmt gekennzeichnet und es sich zur ausnahmslosen Regel gemacht, „die Anstellung einer Beobachtung selbst als die Anerkennung hinreichend günstiger äufserer Umstände anzusehen" und eine später sich herausstellende gröfsere Abweichung keineswegs als Grund für die Ausscheidung anzuerkennen, um so jede Willkür aus den Resultaten zu entfernen. Auch Faye hat sich gegen die Ausscheidung einzelner Beobachtungen, und zwar nach erfolgter Ausgleichung, ausgesprochen; nur im Augenblicke der Beobachtung, wenn sich das Bewufstsein ungünstiger Umstände einstellt, hält er sie für zulässig.

Des weiteren möge in diesem Artikel einiger Untersuchungen gedacht werden, welche über die Structur einer Beobachtungsreihe oder einer durch die Ausgleichung gelieferten Fehlerreihe angestellt worden sind. Wenn man eine Reihe directer Beobachtungen in der Ordnung, in welcher sie ausgeführt worden sind, durch Ordinaten zu äquidistanten Abscissen darstellt und die Endpunkte durch einen Linienzug verbindet, so wird dieser Maxima und Minima aufweisen, welche durch Sequenzen von einander geschieden sind. Bienaymé[5]) hat sich mit der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit beschäftigt, dafs die Anzahl der Maxima und Minima oder die ebensogrofse Anzahl der Sequenzen — eine sehr grofse Anzahl von Beobachtungen und die Unmöglichkeit von aufeinanderfolgenden Wiederholungen desselben Wertes vorausgesetzt — innerhalb bestimmter Grenzen liege; er fand, dafs bei n Beobachtungen die gedachte Anzahl mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t e^{-t^2}\,dt$ zwischen den Grenzen $\frac{2n-1}{3} \mp t\sqrt{\frac{16n-29}{45}}$ zu erwarten sei. Die Prüfung dieses theoretischen Resultates, für das Bertrand (Compt. rend. LXXXI, p. 458 u. 491) einen elementaren Beweis gab, an astronomischen Beobachtungen (Sternschnuppen von Chapelas, Unterschiede der heliocentrischen Länge des Saturn zwischen Paris und Greenwich nach Le Verrier) und Ziehungsergebnissen von Verlosungen ergab durchwegs gute Übereinstimmung. — Verwandt hiermit sind die Untersuchungen Seeliger's[1])[2]) über die Wahrscheinlichkeit, dafs in der Reihe der Fehler, welche aus einer nach der Zeitfolge geordneten ausgeglichenen Beobachtungsreihe entspringen, die Anzahl der Zeichenwechsel eine bestimmte oder zwischen gegebenen Grenzen enthalten sei; die Resultate sollen dazu dienen, um darüber zu urteilen, ob das Ergebnis einer Ausgleichung ein befriedigendes sei. — Einen ähnlichen Zweck verfolgen die Untersuchungen Lehmann-Filhés'[2]) über die wahrscheinlichste Vertei-

lung der Fehler nach Intervallen bei gegebenem Fehlergesetz; es handelt sich dabei um eine Verschärfung des üblichen Verfahrens, welches darin besteht, dafs man die einem Intervall entsprechende theoretische Wahrscheinlichkeit mit der Anzahl der Beobachtungen multiplicirt und die dem Product nächstliegende ganze Zahl mit der beobachteten Anzahl der in jenes Intervall wirklich gefallenen Fehler vergleicht.

Lehmann-Filhés[1]) hat die Aufmerksamkeit auf einen Umstand gelenkt, der, wiewohl kaum von praktischem Belange, doch theoretisches Interesse beanspruchen kann. Bei jeder Art von Messungen ist es dem Beobachter nur möglich, das Resultat einer Beobachtung blofs innerhalb gewisser, durch den kleinsten Teil des Mafsstabes bedingter Grenzen festzustellen; der in das Beobachtungsjournal eingetragene Wert ist ein durch Abrundung erzieltes Ergebnis, das eigentliche Resultat kann von ihm innerhalb gewisser Abrundungsgrenzen $(-\varepsilon, \varepsilon)$ abweichen; ist l_0 die abgerundete Beobachtung, l die wirkliche, so kann $l - l_0 = \eta$ alle Werte zwischen $-\varepsilon$ und ε annehmen; und ist $\psi(\eta)$ das zugehörige Fehlergesetz, so bedeutet

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta\, \psi(\eta)\, d\eta$$

den Durchschnittswert von η, und diesen fügt Lehmann-Filhés in Ermangelung der Kenntnis des wahren η zu l_0 hinzu, um daraus l abzuleiten. Er untersucht nun, welchen Einflufs es hat, wenn die Ausgleichung auf Grund der abgerundeten l_0 statt, wie es sein sollte, auf Grund der l geschieht; insbesondere befafst er sich mit der Frage, welchen Ausdruck die Formel für den mittleren Fehler einer Beobachtung unter diesen Verhältnissen annimmt, und findet

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[\lambda_0 \lambda_0]}{n-\omega} + \frac{[\delta\delta]}{n} - \frac{[(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - \lambda)]}{n-\omega}}$$

an Stelle der Formel (η) des Art. 67, welch letztere auf die Voraussetzung aufgebaut ist, dafs man mit den wirklichen, von regulären oder constanten Fehlern freien, Beobachtungen rechne. In diesem Ausdrucke bedeuten die λ_0 die scheinbaren, aus den abgerundeten Beobachtungen l_0 stammenden Fehler, λ die analogen Gröfsen, welche sich aus einer Ausgleichung mit den $l = l_0 + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta\psi(\eta)\, d\eta$ ergeben würden, die δ die Differenzen $l - l_0$; wie früher ist n die Anzahl der Beobachtungen und ω die Anzahl der Unbekannten. Wie man bemerkt, mangelt es an den nötigen Behelfen, um diese Formel praktisch auszuführen. — Pizzetti[4]), der sich mit der Frage der abgerundeten Beobachtungen unter Bezugnahme auf die eben erwähnte Arbeit gleichfalls beschäftigt hat, wies darauf hin, dafs es

sich hierbei, im Gegensatze zur Gaufs'schen Theorie, um Beobachtungen handle, bei welchen der sogenannte constante Fehleranteil nicht Null ist; er sucht diesen constanten Fehleranteil zu bestimmen und findet, dafs derselbe mit dem Abrundungsintervall sehr rasch abnimmt und dafs er selbst in dem Falle, wenn das Abrundungsintervall 2ε das doppelte des mittleren Fehlers einer Beobachtung betragen sollte, vermöge seiner geringen Gröfse zu vernachlässigen ist. Damit ist zugleich gesagt, dafs die ganze Frage nur ein theoretisches Interesse in Anspruch nehmen dürfe.

69. Die directe Beobachtung einer Gröfse kann der experimentellen Bestimmung eines Punktes in einer Geraden verglichen werden, dessen wahre Lage in der Geraden entweder gegeben oder doch irgendwie definirt ist. Die Abweichung beider Punkte stellt den Fehler jener Bestimmung dar, der vermöge dieser geometrischen Auffassung als linearer Fehler bezeichnet werden kann, bei welchem nur ein Gegensatz in der Richtung denkbar ist, der sich durch das Vorzeichen des Fehlers kennbar macht.

Wenn es sich hingegen um die messende Bestimmung eines Punktes in der Ebene oder im Raume handelt, dann wird man wohl auch den Fehler des Resultates durch eine Strecke, durch die Verbindungslinie des aus der Beobachtung abgeleiteten Punktes mit seiner wahren Lage, auszudrücken haben; jetzt aber kommt aufser der Gröfse des Fehlers seine Richtung als bestimmendes Element hinzu, und diese gehört einer einfach, beziehungsweise einer zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit an. Fehler dieser Art hat man im Gegensatze zu den vorgenannten als Fehler in der Ebene und im Raume bezeichnet; die ersten Spuren ihrer Theorie fallen in den Beginn dieses Jahrhunderts.

Nach einem Berichte Merriman's[1]) hat Adrain[1]) sich mit der Frage der Bestimmung gleichwahrscheinlicher Lagen eines Punktes beschäftigt, der durch Messung seines Abstandes von einem festen Punkte und der Richtung dieses Abstandes festgelegt wird. Durch gewisse einfache Annahmen über die Fehler in der Längen- und Richtungsbestimmung und durch Schlüsse, denen man bindende Kraft nicht zuerkennen kann, fand Adrain, dafs Kreise, welche die wahre Lage des gesuchten Punktes concentrisch umgeben, Lagen gleicher Wahrscheinlichkeit verbinden. Er führte die ganze Betrachtung jedoch nur zu dem Zwecke durch, um eine Ableitung des Gesetzes linearer Fehler darauf zu gründen.

Die erste tiefgehende Behandlung hat der Gegenstand durch Bravais[1]) erfahren. Es wird von der Annahme ausgegangen, dafs die Coordinaten X, Y eines Punktes der Ebene Functionen der Gröfsen $L_1, L_2, \cdots L_n$ seien, für welche die unmittelbare Beobachtung die Werte $l_1, l_2, \cdots l_n$ ergeben hat; die diesen Werten anhaftenden Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ als sehr klein vorausgesetzt, kann man die Fehler

x, y in den Bestimmungen X_0, Y_0, welche sich für X, Y auf Grund der Beobachtungsergebnisse l_i ergeben, in der Form

$$x = \Sigma a_i \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \qquad (\alpha)$$
$$y = \Sigma b_i \varepsilon_i$$

ausdrücken. Von dem Fehler ε_i nimmt **Bravais** an, dafs er dem Gesetze $\frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 \varepsilon_i^2}$ folge, und sucht nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs x, y gleichzeitig zwischen den Grenzen x und $x + dx$, y und $y + dy$ enthalten seien, indem er den Ausdruck

$$\frac{h_1 h_2 \cdots h_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-(h_1^2 \varepsilon_1^2 + h_2^2 \varepsilon_2^2 + \cdots + h_n^2 \varepsilon_n^2)} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \cdots d\varepsilon_n$$

mit Berücksichtigung der durch die Gleichungen (α) ausgedrückten Abhängigkeit auf dem gedachten Gebiete integrirt. Das Resultat ergiebt sich in der Form

$$\frac{K}{\pi} e^{-(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)} dx dy. \qquad (\beta)$$

Dadurch, dafs **Bravais** mit Berufung auf **Laplace** annimmt, das Gesetz, welches x ohne Rücksicht auf y befolgt, sei $\frac{h_x}{\sqrt{\pi}} e^{-h_x^2 x^2}$, wobei

$$\frac{1}{h_x^2} = \left[\frac{aa}{hh}\right],$$

— und ähnlich verhalte es sich mit y ohne Rücksichtnahme auf x —, gewinnt er die Mittel zur Bestimmung der Coefficienten der quadratischen Form im Exponenten von e*) und findet:

$$a_{11} = \left[\frac{bb}{hh}\right] K^2, \qquad a_{12} = -\left[\frac{ab}{hh}\right] K^2, \qquad a_{22} = \left[\frac{aa}{hh}\right] K^2,$$
$$\frac{1}{K^2} = \left[\frac{aa}{hh}\right]\left[\frac{bb}{hh}\right] - \left[\frac{ab}{hh}\right]^2.$$

Punkte gleicher Wahrscheinlichkeit erfüllen die Gleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \text{const.} \qquad (\gamma)$$

und liegen somit, da

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = K^4 \left\{ \left[\frac{aa}{hh}\right]\left[\frac{bb}{hh}\right] - \left[\frac{ab}{hh}\right]^2 \right\}$$
$$= K^4 \sum \left\{ \frac{(a_i b_{i'})}{h_i h_{i'}} \right\}^2 > 0 \qquad [(a_i b_{i'}) = a_i b_{i'} - a_{i'} b_i]$$

---

*) Er benützt dazu des weiteren die Invarianz des Ausdrucks (β) gegenüber einer orthogonalen Transformation.

ist, auf homothetischen Ellipsen — nachmals Fehlerellipsen*) genannt —, welche den Punkt X_0, Y_0 zum gemeinsamen Centrum haben. Durch eine ähnliche Analyse hat Bravais gezeigt, dafs bei einer Punktbestimmung im Raume die Orte gleichwahrscheinlicher Lagen des zu bestimmenden Punktes homothetische Ellipsoide seien.

Unabhängig von der Arbeit Bravais' ist zwölf Jahre später Andrae[1]) durch ein praktisches Problem, die Untersuchung der Genauigkeit einer geodätischen Punktbestimmung, zu dem Resultate geführt worden, dafs Punktlagen gleicher Wahrscheinlichkeit die wahrscheinlichste aus den Beobachtungen abgeleitete Lage in concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen umgeben; er hat diejenige unter diesen Ellipsen, innerhalb welcher der gesuchte Punkt mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{e} = 0{\cdot}6322\cdots$ zu erwarten ist, unter dem speciellen Namen Fehlerellipse zur Kennzeichnung der Genauigkeit in der Festlegung des betreffenden Punktes verwendet.**) Der zu bestimmende Punkt erschien dabei als Schnittpunkt zweier oder mehrerer Geraden, seine Coordinaten waren also aus zwei oder mehreren Gleichungen der Form

$$\varepsilon_i = -l_i + a_i x + b_i y \qquad (\delta)$$

zu bestimmen; von den Fehlern ε wurde die Annahme gemacht, dafs sie dem Gaufs'schen Gesetze folgen, und da a_i, b_i als feststehende, fehlerfreie Gröfsen galten, war damit die Richtung der Geraden als bestimmt, die Lage als fehlerhaft vorausgesetzt.

Eine ähnliche Auffassung und analoge Voraussetzungen liegen der ersten Darstellung zugrunde, welche Helmert[8]) in seinen „Studien über rationelle Vermessungen etc." von dem Gegenstande gab; aus einem anderen Gesichtspunkte hat er ihn nachmals in seiner „Ausgleichsrechnung"[1]) behandelt. In der Wahl der kennzeichnenden Ellipse wich Helmert von Andrae ab und entschied sich für diejenige, innerhalb welcher der Punkt mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{\sqrt{e}} = 0{\cdot}3935\cdots$ zu erwarten ist; diese Ellipse hat nämlich die vorzügliche Eigenschaft, dafs sie den mittleren Fehler in der Bestimmung des Punktes nach irgend einer Richtung anzugeben gestattet: es ist der Abstand der zu dieser Richtung normalen Tangente der Ellipse von ihrem Mittelpunkte. Aus diesem Grunde gab Helmert dieser Ellipse den Namen mittlere Fehlerellipse.***)

---

*) Durch Andrae[1]); vgl. noch weiter unten.

**) Bei der unter seiner Leitung stehenden dänischen Gradmessung hat Andrae dieses Verfahren praktisch ausgeführt, um die Genauigkeit der einzelnen Triangulirungspunkte auf solche Weise zu charakterisiren.

***) Auch Bravais hatte eine specielle unter den Ellipsen zur Kennzeichnung der Genauigkeit gewählt und zwar diejenige von der Fläche 1;

Die Theorie der Lagenbestimmung eines Punktes in der Ebene wie im Raume ist implicite auch in der Auffassung und Lösung des Problems der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen enthalten, welche von Bienaymé[1]) stammt und deren Grundgedanke in Art. 64 bereits angegeben worden ist. Aus dieser Grundlage hat Verfasser[3]) die Theorie der Fehlerellipse entwickelt. Sind die Coordinaten x, y eines Punktes aus n Gleichungen der Form (δ) zu bestimmen, so wird mittels zweier Multiplicatorensysteme α_i, β_i zunächst das Gleichungspaar

$$[\alpha\varepsilon] = -[\alpha l] + [\alpha a]x + [\alpha b]y$$
$$[\beta\varepsilon] = -[\beta l] + [\beta a]x + [\beta b]y$$

gebildet und aus diesem mit Zuziehung der Bedingungen

$$[\alpha a] = 1, \qquad [\alpha b] = 0$$
$$[\beta a] = 0, \qquad [\beta b] = 1$$

die Bestimmung

$$x = [\alpha l] + [\alpha\varepsilon], \qquad y = [\beta l] + [\beta\varepsilon]$$

für x und y gefunden; wählt man statt dessen

$$x' = [\alpha l], \qquad y' = [\beta l], \tag{ε}$$

so hat man in der Punktbestimmung die zusammenbestehenden Fehler

$$\xi = [\alpha\varepsilon], \qquad \eta = [\beta\varepsilon]$$

begangen. Bienaymé erhebt nun die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, daſs diese Fehler dem durch die Grenzen ξ und $\xi + d\xi$, η und $\eta + d\eta$ bezeichneten elementaren Wertgebiet angehören; er leitet sie ohne eine bestimmte Voraussetzung über das Gesetz der ε, jedoch unter der Annahme eines sehr groſsen n, ab und findet dafür den Ausdruck*)

$$\frac{d\xi\, d\eta}{2\pi K_2 \sqrt{R}}\, e^{-\frac{[\beta\beta]\xi^2 - 2[\alpha\beta]\xi\eta + [\alpha\alpha]\eta^2}{2K_2 R}}, \tag{ζ}$$

worin $R = [\alpha\alpha][\beta\beta] - [\alpha\beta]^2$ und $K_2 = \int \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ ist. Daraus folgt unmittelbar

$$[\beta\beta]\xi^2 - 2\,[\alpha\beta]\xi\eta + [\alpha\alpha]\eta^2 = 2K_2 R c^2 \tag{ϑ}$$

er nennt sie Fundamentalellipse. In analoger Weise spricht er im Raume von einem Fundamentalellipsoid. Diese Wahl hat folgendes für sich: Ist p die Wahrscheinlichkeit, daſs der Punkt im Innern der Fundamentalellipse liege, so ist p^u die Wahrscheinlichkeit, daſs er sich innerhalb einer ihr homothetischen Ellipse von der Fläche u befinde.

*) Dieser Ausdruck ist schon einer einschränkenden Voraussetzung angepaſst, daſs nämlich alle ε demselben Gesetz unterworfen seien und daſs weiter $\int \varepsilon\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 0$ sei.

als Gleichung des Ortes gleichwahrscheinlicher Punktlagen von der relativen Wahrscheinlichkeit e^{-c^2}. Auf Grund des Ausdruckes (ζ) findet sich weiter

$$1 - e^{-c^2}$$

als Wahrscheinlichkeit dafür, dafs die Fehler ξ, η gleichzeitig zwischen den Grenzen

$$-c\sqrt{2K_2[\alpha\alpha]} \leqq \xi \leqq c\sqrt{2K_2[\alpha\alpha]}$$
$$-c\sqrt{2K_2[\beta\beta]} \leqq \eta \leqq c\sqrt{2K_2[\beta\beta]}$$

eingeschlossen seien, und die Forderung, dafs diese Grenzen möglichst enge ausfallen mögen ($[\alpha\alpha]$ ein Min., $[\beta\beta]$ ein Min. in Verbindung mit den oben aufgestellten Bedingungen), führt Bienaymé auf die Methode der kleinsten Quadrate als das vorteilhafteste Verfahren zur Bestimmung von x', y'. Wie man erkennt, entspricht Andrae's Fehlerellipse der Annahme $c^2 = 1$ und Helmert's mittlere Fehlerellipse der Annahme $c^2 = \frac{1}{2}$.

In selbständiger Auffassung hat Schols[2])[3]) eine Theorie der Fehler in der Ebene und im Raume aufgebaut, die dadurch bemerkenswert ist, dafs sie eine Reihe von Resultaten bietet, die vollständig unabhängig sind von dem Fehlergesetz; bemerkenswert ist die Theorie ferner durch die Analogien mit mechanischen Thatsachen. Stellt man die Fehler durch Strecken verschiedener Richtung und Gröfse dar, welche den wahren Punkt — zugleich Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems — zum gemeinsamen Anfangspunkt haben, so stellt die Dichtigkeit der Endpunkte an einer Stelle x/y (beziehungsweise $x/y/z$) zugleich die relative Häufigkeit der Fehler vor, welche an dieser Stelle endigen; man kann die Wahl so treffen, dafs die Zahl $\Phi(x, y)$, welche die Dichtigkeit der Punkte anzeigt, zugleich die relative Wahrscheinlichkeit ausdrückt in dem Sinne, dafs $\Phi(x, y)\,dx\,dy$ die Wahrscheinlichkeit eines in dem Element $dx\,dy$ am Punkte x/y endigenden Fehlers bedeutet. Die Betrachtung der Fehler in der Ebene und im Raume wird durch Projection derselben auf die Coordinatenaxen auf die Untersuchung linearer Fehler zurückgeführt. Neben dem mittleren Quadrat K_2 des Fehlers in der Ebene (im Raume), dessen Ausdruck das über die ganze Ebene (oder bis an die Grenze der Fehler) ausgedehnte Integral

$$\iint (x^2 + y^2)\,\Phi(x, y)\,dx\,dy$$

ist, bestehen auch mittlere Quadrate der Fehlerprojectionen, $K_2^{(x)}$, $K_2^{(y)}$ (eventuell $K_2^{(z)}$); alle diese Gröfsen können als Trägheitsmomente einer mit der Dichte $\Phi(x, y)$ begabten Ebene (respective eines mit der Dichte $\Phi(x, y, z)$ begabten Raumes) gedeutet werden, und es

bestehen zwischen ihnen analoge Gleichungen wie zwischen den Trägheitsmomenten, so insbesondere:

$$K_2 = K_2^{(x)} + K_2^{(y)} \quad \text{in der Ebene,}$$
$$K_2 = K_2^{(x)} + K_2^{(y)} + K_2^{(z)} \quad \text{im Raume.}$$

Diese Analogie führt des weiteren zu der Thatsache, dafs unabhängig von dem Fehlergesetze Φ Hauptaxen der Wahrscheinlichkeit existiren, das sind zwei (respective drei) zu einander normale Richtungen, für welche die mittleren Quadrate der Fehlerprojectionen extreme Werte annehmen; dafs ferner das Gesetz, nach welchem sich das mittlere Fehlerquadrat mit der Richtung des Fehlers ändert, geregelt ist durch eine Ellipse (ein Ellipsoid), deren Axen die Hauptaxen der Wahrscheinlichkeit sind. Auf diese bezogen haben die Gebilde die Gleichungen:

$$K_2^{(x)} x^2 + K_2^{(y)} y^2 = 1,$$
$$K_2^{(x)} x^2 + K_2^{(y)} y^2 + K_2^{(z)} z^2 = 1;$$

und ihr Wesen besteht darin, dafs das reciproke Quadrat eines Halbmessers gleichkommt dem mittleren Quadrat der Fehlerprojectionen auf die betreffende Richtung; man könnte sie daher passend als Ellipse oder Ellipsoid der mittleren Fehler*) bezeichnen.

Betreffs des Gesetzes der ebenen und räumlichen Fehler hat Schols einen bemerkenswerten Satz nachgewiesen. Von der Voraussetzung ausgehend, dafs solche Fehler aus dem Zusammenwirken sehr zahlreicher gleichartiger Elementarfehler entspringen, schlofs er, dafs die Fehlerprojectionen auf irgend einer Axe dem Gesetze der linearen Fehler, also dem Exponentialgesetz, folgen, und zeigte, dafs der Totalfehler in der Ebene und im Raume dem nämlichen Gesetze folgt, als ob er durch das Zusammentreffen der Fehlerprojectionen in den Hauptaxen der Wahrscheinlichkeit, diese Projectionen als unabhängig von einander aufgefafst, entstehen würde.**) Hieraus ergab sich das Häufigkeitsgesetz für einen Fehler in der Ebene:

$$\frac{e^{-\left(\frac{x^2}{2K_2^{(x)}} + \frac{y^2}{2K_2^{(y)}}\right)}}{\sqrt{2\pi K_2^{(x)}}\,\sqrt{2\pi K_2^{(y)}}}, \qquad (\iota)$$

und für einen Fehler im Raume:

*) Die Ellipse der mittleren Fehler ist jedoch von der Helmert'schen mittleren Fehlerellipse und von der sogenannten Centralellipse im Sinne der Mechanik wohl zu unterscheiden.

**) Für Fehler in der Ebene findet sich der Satz schon bei Bravais[1]) (p. 279).

$$\frac{e^{-\left(\frac{x^2}{2K_2^{(x)}}+\frac{y^2}{2K_2^{(y)}}+\frac{z^2}{2K_2^{(z)}}\right)}}{\sqrt{2\pi K_2^{(x)}}\sqrt{2\pi K_2^{(y)}}\sqrt{2\pi K_2^{(z)}}}, \qquad (\varkappa)$$

wenn $K_2^{(r)}$, $K_2^{(y)}$, $K_2^{(z)}$ auf die Hauptaxen der Wahrscheinlichkeit sich beziehen.*)

Schols hat für diese Gesetze noch eine andere Ableitung gegeben, die sich an die Ableitung des Gesetzes der linearen Fehler aus der Hypothese des arithmetischen Mittels (s. Art. 54) anschliefst. Schon im Jahre 1709 hatte nämlich Cotes[1]) den Grundsatz aufgestellt, die wahrscheinlichste Lage eines Punktes, für welchen mehrere gleichgenaue Bestimmungen vorliegen, sei der Schwerpunkt des Systems der beobachteten mit gleichen Massen begabten Punkte. Von diesem Grundsatze macht Schols bei der zweiten Begründung Gebrauch, der er später noch eine dritte in der unter [4]) genannten Arbeit folgen liefs, welche ähnliche Wege verfolgt wie die in Art. 56 angeführten Untersuchungen Bessel's[2]).

In jüngster Zeit hat D'Ocagne[1]) sich mit der Ableitung des Fehlergesetzes für die Lage eines Punktes in der Ebene befafst und ist zu dem folgenden Resultate gekommen: Wirken bei der Bestimmung n von einander unabhängige Ursachen zusammen und ist

$$p_i=\frac{g_i}{\pi}e^{-(\alpha_i x^2+2\beta_i xy+\gamma_i y^2)}dx\,dy \quad (i=1,2,\cdots n;\ g_i{}^2=\alpha_i\gamma_i-\beta_i{}^2=\delta_i)$$

die Wahrscheinlichkeit, dafs der durch die i-te Ursache hervorgebrachte Fehler durch $(0, 0)$ und (x, y) begrenzt sei, so befolgt der aus allen Ursachen zusammengesetzte Fehler das Gesetz

$$p=\frac{g}{\pi}e^{-(\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2)}dx\,dy,$$

wobei

$$\alpha=\frac{A}{\varDelta},\ \beta=\frac{B}{\varDelta},\ \gamma=\frac{C}{\varDelta};\ A=\sum\frac{\alpha_i}{\delta_i},\ B=\sum\frac{\beta_i}{\delta_i},\ C=\sum\frac{\gamma_i}{\delta_i};$$

$\varDelta=AC-B^2$, $g^2=\alpha\gamma-\beta^2$ ist. Es handelt sich hier also um die Zusammensetzung mehrerer Fehler in der Ebene.

Man kann die Genauigkeit einer Punktbestimmung in der Ebene

---

*) In der Schiefstechnik hatte man bis in die jüngste Zeit irrtümlich angenommen, dafs die Abweichung des Treffpunktes vom Centrum als das Resultat des Zusammentreffens zweier von einander unabhängigen Abweichungen nach zwei beliebigen zu einander senkrechten Richtungen angesehen werden dürfe. Die Unzulässigkeit dieser Annahme, von Schols dargethan, ist dann auch von militärischer Seite, so von General Putz und Major Siacci, anerkannt worden. Vgl. Bertrand, Comptes rend. CVI, p. 387ff.

oder im Raume durch analoge Gröfsen kennzeichnen, wie sie bei directen Beobachtungen üblich sind, also durch den mittleren oder den durchschnittlichen oder den wahrscheinlichen Fehler, deren Definitionen sinngemäfs erweitert werden müssen; einen genauen Mafsstab für die Beurteilung der Präcision gewährt aber nur eine bestimmte Fehlerellipse, beziehungsweise ein bestimmtes Fehlerellipsoid. Für den mittleren Fehler μ ergiebt sich nach dem obigen der Ausdruck

$$\mu = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2}, \qquad (\lambda)$$

in welchem μ_x^2, μ_y^2 die mittleren Fehlerquadrate längs der Hauptaxen der Wahrscheinlichkeit bedeuten; hat man für den Punkt die „mittlere Fehlerellipse“ construirt, so ist μ die halbe Diagonale ihres Axenrechteckes. Aus der Bedeutung der mittleren Fehlerellipse und bekannten geometrischen Eigenschaften der Ellipse überhaupt erkennt man leicht, dafs für μ_x^2, μ_y^2 die mittleren Fehlerquadrate längs zweier beliebiger zu einander senkrechter Axen genommen werden können. — Über den durchschnittlichen Fehler, für welchen

$$\iint \Phi(x, y) \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

der analytische Ausdruck ist, hat schon Bravais[1]) eine Untersuchung ausgeführt und die bemerkenswerte Thatsache nachgewiesen, dafs er durch den Umfang einer bestimmten unter den Fehlerellipsen (mit Benützung neuerer Begriffe ausgedrückt ist es diejenige, deren Fläche dem 32. Teile des Axenrechtecks der mittleren Fehlerellipse gleichkommt) dargestellt sei; bei der räumlichen Punktbestimmung tritt an die Stelle des Ellipsenumfangs die Oberflächenzahl eines bestimmten Fehlerellipsoids; in beiden Fällen erfordert also die Bestimmung des durchschnittlichen Fehlers die Auswertung elliptischer Integrale. — Der wahrscheinliche Fehler steht nicht, wie bei linearen Fehlern, mit dem mittleren Fehler in einem constanten Verhältnis, sondern hängt überdies von dem Axenverhältnis der Fehlerellipsen (resp. Ellipsoide) ab [vgl. des Verfassers Abhandlung[2]) Nr. 11, und seine „Fehlertheorie“ [10]), p. 387]; er variirt zwischen $0{\cdot}67449\,\mu$ und $0{\cdot}83256\,\mu$ in der Ebene und zwischen $0{\cdot}67449\,\mu$ und $0{\cdot}88807\,\mu$ im Raume (in letzterem Falle ist $\mu = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2}$).

Siebenter Abschnitt.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Statistik.

70. Aus dem Geschehen, in welchem sich das gesamte physische und psychische Leben einer grofsen menschlichen Gemeinschaft äufsert, lassen sich vielfach Vorgänge auslösen, welche bei näherer Betrachtung Merkmale aufweisen, durch die sich diejenigen Ereignisse kennzeichnen, welche man als zufällig erklärt und zum Gegenstande der Wahrscheinlichkeitstheorie gemacht hat: es ist ein Complex permanenter Bedingungen oder Umstände bemerkbar, die auf den Verlauf der Vorgänge Einflufs nehmen; ihm stehen fluctuirende Umstände gegenüber, welche, in ihren Wirkungen unübersehbar, Regellosigkeit in dem Verlauf der einzelnen Fälle zur Folge haben; die Erscheinung als Ganzes, als Massenerscheinung, aufgefafst bietet in ihren quantitativen Verhältnissen ein Bild dar, das in seinen Hauptumrissen zu verschiedenen Zeiten und in verschiedenen Gemeinschaften dasselbe bleibt. Diese Analogie hat vielfach dazu verleitet, ohne weitere Prüfung vollständige Übereinstimmung anzunehmen, den Verlauf einer Massenerscheinung mit dem Resultate wiederholter Ziehungen aus einer Urne mit beständig gleichbleibendem Inhalt zu vergleichen und alle Consequenzen zu ziehen, welche sich hieraus ergeben. Dies bedeutet soviel als, dafs man den Complex permanenter Umstände als constant in seinen Wirkungen, ferner völlige Unabhängigkeit der in zeitlicher Folge in die Erscheinung tretenden Fälle voraussetzte; die Massenerscheinung war dann quantitativ durch eine gewisse Wahrscheinlichkeit gekennzeichnet, für welche die statistische Erhebung einen empirischen Wert zu bestimmen gestattete.

Fassen wir, um ein Beispiel zu geben, das Sterben in einer grofsen, geschlossenen, zu Beginn eines Jahres gezählten menschlichen Gemeinschaft im Laufe desselben Jahres ins Auge! Dem Vorgange liegen unzweifelhaft erkennbare permanente Umstände zugrunde, als: die menschliche Constitution, die allgemeinen wirtschaftlichen und klimatischen Verhältnisse, Ernährung, Beschäftigung u. a.; daneben aber giebt es Einflüsse, welchen Gesundheit und Leben der Einzelnen in sehr verschiedener Weise ausgesetzt sind und welche eine vorgängige Aussage bezüglich des Verhaltens des einzelnen Individuums unmöglich oder doch unsicher machen; der Quotient aus der beobachteten Zahl der Sterbefälle und der Zahl, welche die Gröfse der Gemeinschaft zu Beginn des Jahres ausdrückt, nimmt aber, wenn man ihn in mehreren aufeinanderfolgenden Jahren bestimmt, wenig von einander abweichende Werte an. Man hat in diesem Quotienten, der Sterblichkeitsziffer, einen Ausdruck für die allgemeine Sterblichkeit erblickt und ihn als eine empirische

Bestimmung der allgemeinen Sterbenswahrscheinlichkeit während eines (Kalender-)Jahres gedeutet. Hier aber sind nicht einmal die formalen Voraussetzungen erfüllt, damit der Bruch eine Wahrscheinlichkeit vorstellen könne: die Verstorbenen bilden nicht einen Teil der am Anfange des Jahres Gezählten; denn es befinden sich unter ihnen auch solche, die erst im Laufe des Jahres geboren worden und während des Jahres auch gestorben sind. Auch die Unabhängigkeit des Erscheinungsablaufs in zwei aufeinanderfolgenden Jahren ist nicht vorhanden; der Verlauf im zweiten Jahre ist vielmehr durch die Veränderungen, welche das erste Jahr vollbracht hat, mitbestimmt.

Ähnliche Bemerkungen sind über den Quotienten zu machen, welchen man erhält, wenn man an die Stelle der Anzahl der Sterbefälle die Anzahl der Geburten setzt, welche sich in der erwähnten Gemeinschaft während des Jahres zugetragen haben, über die sogenannte Geburtsziffer.*) Auch diese Ziffer, welche in der Statistik als Mafs der allgemeinen Fortpflanzungsintensität verwendet wurde und noch heute geführt wird, läfst die Deutung als allgemeine Wahrscheinlichkeit des Gebärens im Laufe eines (Kalender-)Jahres nicht zu, und zwar schon aus rein formalen Gründen; denn die Geburten können nur aus einem Teile der zu Beginn des Jahres gezählten Gemeinschaft, nur aus weiblichen Individuen zwischen gewissen Altersgrenzen hervorgehen, und diese Grenzen sind noch dazu nicht scharf bestimmbar. Die Unabhängigkeit der Massenerscheinung in zwei aufeinanderfolgenden Jahren ist nicht vorhanden; denn der Verlauf der Geburten im ersten Jahre beeinflufst die Gebärmöglichkeit im zweiten.

Diese beiden Beispiele charakterisiren das Verfahren der älteren Statistik. Es wurden Gröfsen zu einander in Beziehung gesetzt, die vielfach eines natürlichen Zusammenhanges entbehrten, und über den Zustand und die Veränderungen einer Bevölkerung wurden, wie noch später (Art. 76) erwähnt werden soll, Voraussetzungen gemacht, die sich durch nichts begründen liefsen und durch die spätere Forschung auch als unzulässig erwiesen worden sind. Man kann sagen, die ältere Statistik war mehr eine der Phantasie sich hingebende Lust am Combiniren statistischer Zahlen als eine durch wissenschaftliche Kritik geleitete Forschung mit klar umschriebenen Zielen. Trotz

*) Laplace[18]) (p. 391—394) behandelt die Geburtsziffer als die empirische Bestimmung einer festen abstracten Wahrscheinlichkeit und vergleicht das Auftreten der Geburtsfälle während eines Jahres den Ziehungen weifser Kugeln aus einer Urne mit weifsen und schwarzen Kugeln in constant bleibendem Mengenverhältnis. Er gründet auf jene Ziffer einen Vorschlag zur Ermittlung der Bevölkerung eines grofsen Staates ohne directe Zählung, welchen Vorschlag er bis zu einem gewissen Punkte auch praktisch durchgeführt hat. Die bezüglichen Untersuchungen stammen aus viel früherer Zeit und sind zum ersten Male in dem unter [9]) angeführten Mémoire veröffentlicht worden.

der mangelhaften Methode hat sie eine Reihe allgemeiner Züge im Bevölkerungswechsel*) erkannt und festgestellt; als zusammenfassende Darstellung dieser älteren Resultate in der deutschen Litteratur kann das Werk von Süfsmilch[1]) betrachtet werden, während am Beginn der neueren Richtung das mit dem ersteren noch manche Ähnlichkeit aufweisende Buch Moser's[1]) steht.**)

71. Unter den Vorgängen, welche die Structur und den Umfang einer geschlossenen menschlichen Gemeinschaft abändern, ist es das Sterben, welchem seit langem die Aufmerksamkeit sich zugewendet hat, zunächst vornehmlich aus praktischen Motiven. Das Problem der Sterblichkeitsmessung hat in Ansehung seines Zieles frühzeitig eine bestimmte Form angenommen, die auf Halley[1]) zurückführt: man erblickt dieses Ziel in der Gewinnung einer Absterbeordnung***), durch welche die successive Abminderung einer Grundmasse von Gebornen auf den einzelnen, einjährigen Altersstufen zur Darstellung gebracht wird. Die directe Lösung dieser Aufgabe, bestehend in der unmittelbaren Beobachtung einer wirklichen Grundmasse von Gebornen, etwa derjenigen, welche aus einer grofsen Bevölkerung während eines Kalenderjahres hervorgeht und die man in der Statistik gewöhnlich als Generation bezeichnet, und in der Zählung der Individuen, welche das 1., 2., ··· Lebensjahr vollendet haben, erweist sich aus verschiedenen Gründen als unausführbar; sie allein würde das liefern, was man sich unter der Absterbeordnung einer Generation vorstellt. Die Bestrebungen mufsten daher auf die Auffindung indirecter Methoden gerichtet sein, wenn dabei auch die innere Bedeutung der Absterbeordnung eine Modification erleiden mufste. Mafsgebend war das Material, dessen man sich für den gedachten Zweck bediente: entweder waren es die statistischen Aufzeichnungen über eine mehr oder weniger ausgedehnte Bevölkerung, oder die Erfahrungen über eine geschlossene†) Gesellschaft ausgewählter Personen, wie die Versicherungsinstitute solche darzubieten vermögen.

---

*) Das Wort in der erweiterten Bedeutung genommen, welche ihm Lexis[1]) gegeben hat, wonach sich das Gebiet des Bevölkerungswechsels über alle statistisch bedeutsamen Veränderungen menschlicher Gemeinschaften erstreckt; während Knapp[2]), von welchem dieser Terminus herrührt, nur die Veränderungen durch Geburt und Tod vor Augen hatte.

**) Eine geschichtliche Darstellung des Entwicklungsganges der Bevölkerungslehre, mit vornehmlicher Rücksicht auf Sterblichkeit und die mit ihr zusammenhängenden Fragen, hat Knapp[3]) gegeben.

***) Mayr[1]) unterscheidet zwischen einer Sterbe- oder Mortalitätstafel, welche die in den successiven einjährigen Altersintervallen Gestorbenen verzeichnet, und einer Lebe- oder Vitalitätstafel, welche die Überlebenden auf den successiven einjährigen Altersstufen angiebt. Die letztere Form ist die gebräuchliche und führt die Namen Absterbeordnung, Decrementen- oder Sterblichkeitstafel.

†) Die etwa erfolgenden Ein- und Austritte werden mit verzeichnet.

Während bei der directen Methode die Zahlen der die einzelnen Altersstufen Überlebenden das Primäre und die aus diesen Zahlen ableitbaren empirischen Werte der Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit das Secundäre sind, findet bei der indirecten Methode das umgekehrte statt: hier besteht das Grundproblem der Sterblichkeitsmessung in der Bestimmung der Lebens- oder Sterblichkeitswahrscheinlichkeit für die einzelnen Altersstufen, respective Altersintervalle; aus diesen Wahrscheinlichkeitsbrüchen wird dann mit Hilfe der Lehren der Wahrscheinlichkeitstheorie die Absterbeordnung abgeleitet, die nicht mehr die Abminderung einer wirklich beobachteten, sondern die einer ideellen Grundmasse von Gebornen darstellt. Bei der Gewinnung der erwähnten Wahrscheinlichkeiten kommen Personen aus verschiedenen Geburtsjahren zur Anwendung; die erzielte Absterbeordnung kann daher nicht ohne weiteres als der Ausdruck des Absterbens einer Generation angesehen werden.

Die Begriffe der Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit sind hier eingeführt worden, ohne dafs die Frage nach ihrer Existenzberechtigung zunächst gestellt wurde; diese Frage kommt später noch zur Erörterung. Unter der Lebenswahrscheinlichkeit p_x einer x-jährigen Person wird die Wahrscheinlichkeit verstanden, dafs sie das Alter von $(x+1)$ Jahren erreiche; und unter der Sterbenswahrscheinlichkeit q_x die Wahrscheinlichkeit, dafs sie innerhalb des bezeichneten Altersintervalls sterbe; hiernach ist $p_x + q_x = 1$. Man schliefst dann, dafs das Product $\prod_0^{x-1} p_i$ die Wahrscheinlichkeit P_x bedeute, dafs ein Individuum aus der gedachten Geburtsmasse das Alter x vollende, und dafs ferner $A_0 P_x = A_x$ die wahrscheinlichste Anzahl derjenigen sei, welche aus A_0 Geburten stammend das Alter x vollenden. Die Reihe der Zahlen $A_0, A_1, \cdots A_x, \cdots$, deren erste (oder eine) beliebig angenommen werden konnte, bildet im Zusammenhalte mit den Altersstufen den wesentlichen Inhalt der Absterbeordnung.

Über die Anwendung der indirecten Methode auf die Aufzeichnungen der Bevölkerungsstatistik herrschten bis in eine nicht weit zurückliegende Zeit unklare, verworrene Vorstellungen, weil es an einer Einsicht in die Natur der verschiedenen Complexe von Lebenden und Verstorbenen und in ihre gegenseitigen Beziehungen mangelte, die aus jenen Aufzeichnungen sich construiren lassen. Diese Unklarheit beginnt mit Halley[1]), dem ersten, der aus bevölkerungsstatistischem Material, aus den Altersnachweisen über die Verstorbenen in einem geschlossenen (Stadt-)Gebiet, Schlüsse zog; bei ihm fliefsen die Altersgruppirung der Verstorbenen, der Altersaufbau einer Bevölkerung und die Absterbeordnung in eins zusammen. Viele der späteren Arbeiten gründen sich auf die Vorstellung der stationären Bevölkerung, welche auch Halley vorgeschwebt haben dürfte,

einer Bevölkerung, in welcher die Geburten gleichförmig über die Zeit verteilt sind und eine feste Absterbeordnung herrscht. Ebenso wenig brauchbar wie diese Vorstellung ist dasjenige, was Euler[2]) an ihre Stelle setzen wollte, die Hypothese nämlich, daſs die jährlichen Geburten in geometrischer Progression fortschreiten, deren Quotient sich empirisch bestimmen lasse. Durch Moser[1]) wurde die Unhaltbarkeit dieser Anschauungen und der auf sie gegründeten Methoden zur Gewinnung von Sterbetafeln aus bevölkerungsstatistischen Aufzeichnungen dargethan; er wandte denn auch das Interesse den Erfahrungen der Versicherungsanstalten zu, für deren Verwendung er geeignete Wege vorbereitet hatte.

Eine Wendung auf dem Gebiete der Sterblichkeitsmessung bedeuten die Arbeiten Knapp's[1])[2]). Diesem verdankt man eine wissenschaftliche Analyse bevölkerungsstatistischer Aufzeichnungen und eine Theorie der verschiedenen Gesamtheiten von Lebenden und Verstorbenen, in welcher zugleich eine Theorie des Bevölkerungswechsels (in dem oben erwähnten engeren Sinne) zu erblicken ist. Unter einer Gesamtheit von Lebenden oder Verstorbenen wird ein aus der statistisch beobachteten Bevölkerung ausgelöster Complex von Lebenden oder Verstorbenen verstanden, welche in gewissen Merkmalen, die sich auf Geburtszeit, erreichtes Alter, Zeit des Lebens oder Sterbens beziehen, übereinstimmen. Es waren die Beziehungen aufzudecken, welche zwischen den verschiedenen Gesamtheiten bestehen, und insbesondere waren ihre Beziehungen zu dem Problem der Sterblichkeitsmessung zu erforschen. Für die Lösung dieser Aufgaben und die Gewinnung eines klaren Einblicks in die Vorgänge war die analytische Darstellung der Gesamtheiten von der gröſsten Bedeutung. In der erstgenannten Schrift[1]) bediente sich Knapp hierzu, indem er die Mengen der Geburten und der Todesfälle als stetige Functionen der Zeit, respective des Alters auffaſste, zweier Functionen in Verbindung mit einer graphischen Darstellung; die eine Function, $F(t)$, bedeutet die Menge der von einem Zeitnullpunkte bis zur Zeit t erfolgten Geburten; die andere, $f(x)$, drückt die auf einen Gebornen entfallende Anzahl der das Alter x Überlebenden aus; mit diesen Hilfsmitteln konnten die verschiedenen Gesamtheiten formelmäſsig dargestellt werden.

Kurz nach dem Erscheinen dieser Arbeit trat Zeuner[1]) mit einer Schrift hervor, welche im engen Anschlusse an Knapp mit ihm gleiche Ziele verfolgt, in der Wahl der geometrischen und analytischen Hilfsmittel aber andere, glücklichere Wege einschlägt. Auch Zeuner hält an der Auffassung der Stetigkeit der Vorgänge fest; er bedient sich aber zu ihrer Darstellung einer einzigen Function und zur geometrischen Veranschaulichung einer krummen Fläche. Wenn man die Menge derjenigen, welche, vom Zeitnullpunkt bis zur Zeit t geboren, das Alter x vollenden, mit $F(t, x)$ bezeichnet, so ist

$$F(t+dt, x) - F(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dt$$

die Anzahl solcher, welche aus dem Zeitintervall $(t, t+dt)$ stammend das Alter x erreichen. Die Function $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = f(t,x)$ ist es, welche Zeuner verwendet und die in Knapp's Terminologie „Dichte der Alterserfüllung" zu nennen wäre. Die Fläche, deren Punkte die Coordinaten t, x, $f(t,x)$ haben, dient ihm zur geometrischen Veranschaulichung. In der That gestattet dieser Vorgang eine sehr übersichtliche Darstellung der verschiedenen Gesamtheiten und vermittelt einen klaren Einblick in die Vorgänge des Bevölkerungswechsels. Die Auffassung unterscheidet sich von der Knapp'schen noch in dem Punkte, dafs sie die Vorstellung einer herrschenden, d. i. von der Geburtszeit unabhängigen, Absterbeordnung aufgiebt.

Zeuner's Abhandlungen zur mathematischen Statistik wurden für Knapp Veranlassung, den Gegenstand von neuem aufzunehmen und dabei die möglichste Anpassung an die Wirklichkeit anzustreben. So entstand die erste Abhandlung in dem unter [2]) genannten Buche, in welcher der Bevölkerungswechsel als das aufgefafst wird, was er wirklich ist, als ein unstetiger Vorgang; dieser Auffassung sind denn auch die eigens entwickelten mathematischen Hilfsmittel und die neue geometrische Darstellung angepafst, von welch letzterer Knapp schon in einer früheren Arbeit[3]) Gebrauch gemacht hatte. In dieser Darstellung kommt jedes Individuum der beobachteten Masse (Generation) getrennt zum Ausdruck durch eine Alterslinie, deren Anfangspunkt der Geburt, deren Endpunkt dem Sterben und deren Länge der durchlebten Zeit entspricht; die Geburtspunkte der parallel und äquidistant gelegten Alterslinien sind auf einer Curve, der Geburtencurve, angeordnet, welche durch ihren Verlauf die Verteilung der Geburten auf die Zeit erkennen läfst. Wir vermögen in dieser zweiten Knapp'schen Darstellung, so interessant und exact sie ist, eine Vereinfachung nicht zu erblicken; da es sich nur um die Deduction theoretischer Sätze handelt, so ist die einfachste Darstellung die beste, wenn sie auch kein vollkommen, aber doch in den wesentlichen Punkten zutreffendes, Bild giebt; dies aber kann von dem Zeuner'schen Verfahren gesagt werden.

Eine neue und in mehreren Punkten eigenartige Behandlung, welche den Blick auch auf andere Zustandsänderungen von Bevölkerungsmassen richtet, hat der Gegenstand durch Lexis[1]) erfahren. Auch dieser verfolgt die Vorgänge in ihrer Discontinuität, bedient sich zur formelmäfsigen Darstellung der Gesamtheiten einer eigenen Symbolik, die sich an eine graphische Verbildlichung anlehnt, welche mit der letzterwähnten Knapp'schen im wesentlichen übereinstimmt und einer Modification derselben durch Becker[1]) sehr nahesteht. Wiederum erhält jedes Individuum eine Alterslinie (Lebensordinate);

die Geburtspunkte aber sind nunmehr auf einer geraden Zeitaxe (Geburtsaxe) nach ihrer Zeitfolge verteilt, und ihre Dichtigkeit an verschiedenen Stellen bezeichnet die Dichtigkeit der Geburten.

Ohne die Leistungen der mathematischen Theorie des Bevölkerungswechsels, insbesondere in Hinsicht auf das Problem der Sterblichkeitsmessung, zu überschätzen, darf man wohl sagen, dafs erst durch sie überkommene falsche Anschauungen beseitigt und correcte Methoden geschaffen worden sind. [Vgl. hierzu die Bemerkungen Mayr's[1]), bei dem man auch, p. 269—271, die reiche Litteratur des Gegenstandes nachsehen kann.]

Was die speciellen Methoden der Sterblichkeitsmessung und die Kritik der auf diesem Gebiete erzielten Resultate anlangt, so mögen hier die Schriften von Moser[1]), Fischer[2]), Wittstein[1])*), Becker[1]), Knapp[2]) (der in der zweiten Abteilung eine Kritik der Sterblichkeitsmessung auf bevölkerungsstatistischer Grundlage giebt), Zeuner[1]) und Roghé[1]) (Kritik der Sterblichkeitsmessungen in geschlossenen ausgewählten Gesellschaften, insbesondere in Versicherungsinstituten) angeführt werden, aus welchen auch die weitere Litteratur entnommen werden kann.

72. Das Studium der Frage, ob eine statistische Relativzahl als empirischer Wert einer festen objectiven Wahrscheinlichkeit (oder einer Function von einer solchen) angesehen werden könne, womit die Frage zusammenhängt, ob der betreffenden Massenerscheinung ein Complex permanenter Entstehungsbedingungen zugrundeliege, der in seiner Gesamtwirkung constant bleibt, ist erst in neuerer Zeit aufgenommen worden. Früher hat man die bejahende Antwort ohne weitere Prüfung vorweggenommen und die Massenerscheinungen demgemäfs nach dem Schema der Glücksspiele behandelt. Von dem Ausfall der Antwort hängt aber vieles ab, vor allem, ob aus den auf die Vergangenheit sich stützenden Erfahrungen auf den künftigen Verlauf geschlossen werden dürfe; anderen Forschungsgebieten, welche im Gegensatze zur Statistik, die nur die äufseren Umrisse der Erscheinung feststellt, in deren inneres Wesen einzudringen suchen, können aus der Art der Antwort neue Probleme erwachsen.

Die Begründung eines wissenschaftlichen Verfahrens, um stati-

---

*) Der Wittstein'schen Schrift „Mathematische Statistik etc." mufs hier mit einigen Worten besonders gedacht werden, weil durch sie der Anstofs gegeben ward zu einer intensiveren Anwendung der Mathematik, insbesondere der Wahrscheinlichkeitsrechnung, auf die statistische Forschung. Wittstein's Idee, von der beobachtenden Statistik einen theoretisch-forschenden Zweig abzusondern, der sich den auf exacter Grundlage arbeitenden Naturwissenschaften anzuschliefsen hätte, ist zur Verwirklichung gekommen; die neue Disciplin hat auch den von ihm vorgeschlagenen Namen „Mathematische Statistik" angenommen. Wittstein knüpft an Laplace an und geht über dessen Auffassung der Sterblichkeit nicht hinaus.

stische Zahlenreihen nach der bezeichneten Richtung zu prüfen, ist Lexis zu verdanken; die Wahrscheinlichkeitstheorie kommt dabei zu der Rolle eines statistischen Forschungsmittels. Die Grundzüge des Verfahrens, welches Lexis zuerst in der Abhandlung[2]) dargelegt und bald darauf in seiner „Theorie der Massenerscheinungen der menschlichen Gesellschaft“[3]) weiter entwickelt hat, bestehen in dem folgenden (vgl. hierzu Art. 36).

Hat man aus einer Urne mit constantem Mischungsverhältnis*) weifser und schwarzer Kugeln z Reihen von je s Ziehungen ausgeführt und der Folge nach $m_1, m_2, \cdots m_z$ weifse Kugeln hervorgeholt, so werden die Quotienten

$$\frac{m_1}{s}, \frac{m_2}{s}, \ldots \frac{m_z}{s} \tag{α}$$

sich um die mathematische Wahrscheinlichkeit p, welche die Urne dem Erscheinen einer weifsen Kugel verleiht, derart gruppiren, dafs ihre Abweichungen von derselben dem Bernoulli'schen Theorem gemäfs verteilt erscheinen. Diese Verteilung ist durch die Function

$$\Phi(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\theta} e^{-t^2} dt \tag{β}$$

bestimmt, welche die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dafs der Unterschied $\frac{m_i}{s} - p$ zwischen den Grenzen $-\theta$ und θ enthalten sei; die Modalität der Verteilung richtet sich nach dem Parameter

$$h = \sqrt{\frac{s}{2p(1-p)}}, \tag{γ}$$

der von dem Umfang der einzelnen Versuchsreihe und von der mathematischen Wahrscheinlichkeit p abhängt; je gröfser h, umso dichter drängen sich die Werte der Reihe (α) um p zusammen. Sind die Ziehungen aus einer Urne mit unbekanntem Mischungsverhältnis, das aber constant geblieben ist, hervorgegangen, dann wird die Reihe (α) sehr angenähert dasselbe Verhalten gegenüber der wahrscheinlichsten Bestimmung von p aus dem gesamten Versuchsmaterial, d. i. gegenüber dem Werte

$$w = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_z}{zs}, \tag{δ}$$

welcher zugleich das arithmetische Mittel der Werte α vorstellt, aufweisen. Die Bestimmung von h kann jetzt nach der Formel

*) Man denke sich entweder die Gesamtzahl der Kugeln unbegrenzt oder aber die gezogene Kugel jedesmal zurückgelegt, bevor die nächste Ziehung gemacht wird.

$$h = \sqrt{\frac{s}{2w(1-w)}} \qquad (\gamma^*)$$

erfolgen.

Die Sache gestattet aber noch eine andere Auffassung. Man kann die Werte (α) als gleich genaue directe Beobachtungen der (als unbekannt vorausgesetzten) Gröfse p, von der Präcision h, auffassen; diese letztere läfst dann eine zweite Bestimmung aus den Abweichungen

$$\lambda_i = -w + \frac{m_i}{s}, \qquad (i = 1, 2, \cdots z)$$

der Einzelresultate (α) von dem wahrscheinlichsten Werte w nach den Regeln der Methode der kleinsten Quadrate zu, und zwar ist

$$h = \sqrt{\frac{z-1}{2[\lambda\lambda]}}. \qquad (\varepsilon)$$

In dem besprochenen Falle ist eine umso bessere Übereinstimmung der beiden Bestimmungen (γ^*) und (ε) zu gewärtigen, je gröfser z ist.

In Anlehnung an die Fehlertheorie nennt Lexis h die Präcision der Wertreihe (α) und bezeichnet[3]) (p. 27) (γ^*) als ihre „combinatorische", (ε) als ihre „physikalische" Bestimmung.*)

Zeigt eine statistische Zahlenreihe das hier beschriebene Verhalten, d. h. sind die Abweichungen der Einzelwerte vom wahrscheinlichsten Werte dem Gesetze (β) gemäfs verteilt oder verstreut, und stimmt ferner die physikalische Bestimmung der Präcision mit der combinatorischen Bestimmung gut genug überein, so bezeichnet Lexis[3]) die Zahlenreihe als eine typische mit normaler Dispersion. Die betreffende Massenerscheinung kann dann ihrem äufsern Verlaufe nach mit einem reinen Glücksspiele verglichen werden, und so wie bei einem solchen die einzelnen Fälle jedes Zusammenhangs entbehren, kann auch eine solche Massenerscheinung als eine unverbundene aufgefafst werden.

Findet die Verteilung der Abweichungen der Einzelwerte vom wahrscheinlichsten Werte wohl einem Gesetze von der Form (β) entsprechend statt, ist jedoch die nach der physikalischen Methode bestimmte Präcision (ε), die allein für die Streuung mafsgebend ist, kleiner als die andere Bestimmung (γ^*), so wird die Zahlenreihe wohl noch als eine typische, aber als eine solche mit übernormaler Dispersion erklärt; die Einzelwerte sind jetzt um den wahrscheinlichsten Wert weniger dicht zusammengedrängt als im vorigen Falle. Lexis erklärt dieses Verhalten dadurch, dafs er annimmt, einer solchen Massenerscheinung liege nicht eine feste, sondern eine schwankende Wahrscheinlichkeit zugrunde, jedoch so, dafs deren Ab-

---

*) In der Abhandlung[2]) (p. 218) nennt er die erste Bestimmung die „statistische".

weichungen von einem Normalwerte von einer Beobachtungsreihe zur anderen den Charakter des Zufälligen an sich tragen. Er vergleicht den Ablauf der Erscheinung mit Ziehungsserien, deren jede aus einer anderen beliebig gewählten Urne stammt; diese Urnen sind mit weiſsen und schwarzen Kugeln in Mischungsverhältnissen gefüllt, welche um einen Normalwert zufällig schwanken. Infolgedessen verbinden sich Abweichungen von zweifacher Art und unabhängig von einander zu einer Gesamtabweichung, wodurch eine Verminderung der Präcision und eine verstärkte Streuung der Einzelresultate herbeigeführt wird.

Würde sich hingegen die nach der Formel (ε) berechnete Präcision gröſser herausstellen als ihr combinatorischer Wert (γ^*), die Verteilung der Abweichungen zwar nach dem Gesetze (β), aber mit geringerer Dispersion, also mit stärkerem Hindrängen nach dem wahrscheinlichsten Werte, geordnet sein, so hätte man es nach der von Lexis eingeführten Terminologie mit einer typischen Reihe mit unternormaler Dispersion zu thun. Dieses Verhalten soll darauf hinweisen, daſs zwischen den Einzelfällen eine gewisse Abhängigkeit stattfindet, welche auf das Zustandekommen eines festen Wertes direct hinwirkt; deshalb will Lexis eine Massenerscheinung, welche zu einer Reihe dieser Art führt, als eine verbundene aufgefaſst wissen.

Eine Reihe statistischer Relativzahlen, die eine von dem Gesetz (β) entschieden abweichende Verteilung — nach v. Bortkewitsch[3]) eine unregelmäſsige Dispersion — aufweist, wird von Lexis als eine symptomatische Reihe bezeichnet. Sie ist das Symptom für einen veränderlichen menschlich-gesellschaftlichen Zustand, und sofern sie die Tendenz der Veränderung mehr oder weniger deutlich erkennen läſst, wird sie zu einer evolutorischen Reihe. Andere Abarten der symptomatischen Reihe sind die oscillatorische (unregelmäſsig, aber nicht nach dem Gesetz der typischen schwankende) und die periodische Reihe, welche ein nach bestimmten Zeitabschnitten geregeltes Schwanken erkennen läſst.

Wenn es sich um die Untersuchung einer Reihe statistischer Zahlen handelt, die aus einer Reihe aufeinanderfolgender Zeitperioden hervorgegangen sind, dann darf die Verteilung der Einzelwerte nach ihrer Gröſse nicht allein ins Auge gefaſst werden; vielmehr muſs auch ihr Verhalten in der Zeitfolge berücksichtigt werden. Eine Reihe, die als typisch gelten soll, darf auch bei der letzteren Anordnung keine ausgesprochene Tendenz verraten. Auf diesen Umstand hat Lexis[3]) nicht deutlich hingewiesen.

Die eben entwickelte Theorie geht von einer Voraussetzung aus, die niemals streng erfüllt sein wird: die Zahlen der zu untersuchenden Reihen sollen aus Beobachtungsserien gleichen Umfangs hervorgegangen sein, sie sollen mit anderen Worten gleiches Gewicht haben. Indessen darf das Verfahren seiner Natur und seinem Ziele

nach auch dann angewendet werden, wenn die (grofs vorausgesetzten) Umfänge der Beobachtungsreihen wenigstens in den Einheiten höherer Ordnung übereinstimmen.

73. Lexis hat seine Untersuchungsmethode auf verschiedene Massenerscheinungen und ein beträchtliches statistisches Material angewendet; die Resultate haben Ansehen und Bedeutung erlangt.

Die ersten, am weitesten geführten Untersuchungen[2][3]) betrafen das Geschlechtsverhältnis der Gebornen, eine der am längsten und mit Vorliebe beobachteten Erscheinungen statistischer Natur.*) Die Probleme, welche Laplace[13]) (art. 28, 29, 33) und Poisson[1]) in Bezug auf diese Erscheinung sich stellten, waren ganz anderer Natur und setzten schon voraus, dafs ihr eine feststehende objective Wahrscheinlichkeit zugrundeliege. Lexis aber vermochte aus weitläufigen, verschiedenen Gebieten und Zeitepochen entstammenden Beobachtungen den Nachweis zu führen, dafs es sich hier um eine typische Wahrscheinlichkeit (die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt) mit normaler Dispersion handle; es ist dies aber auch die einzige Massenerscheinung, bei welcher diese Natur unzweifelhaft festgestellt werden konnte. Mayr[1]) (p. 187) zieht aus diesem gesetzmäfsigen Verlauf den Schlufs, es mache ganz den Eindruck, als erstrebe die Natur im Gesamtverlauf der Geburtsfälle die Erreichung eines a priori festgesetzten Geschlechtsverhältnisses der Gebornen. Die mannigfachen Hypothesen über die Geschlechtsdetermination, über die Moser[1]) (p. 210—231) noch ausführlich berichtet, sind dadurch hinfällig oder gegenstandslos geworden. Lexis[2]) (p. 242) erblickt die einfachste Erklärung für die constante Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt in der Annahme, dafs schon das Verhältnis der männlichen und weiblichen Keime, wenigstens im Durchschnitt für grofse Gebiete, constant sei.

Dafs aber aus der nachgewiesenen Analogie mit einem reinen Zufallsspiel nicht weitgehende Consequenzen gezogen werden dürfen, zeigt schon die Untersuchung des Geschlechtsverhältnisses bei Zwillingsgeburten. Dürfte eine Zwillingsgeburt als aus zwei voneinander unabhängigen Conceptionen hervorgegangen angesehen werden, so liefse sich die Verteilung der Zwillingsgeburten auf die drei möglichen Geschlechtscombinationen aus der Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt allein a priori vorausbestimmen. Die Erfahrung bestätigt aber diese nach der Wahrscheinlichkeitstheorie berechnete Verteilung nicht, wie bereits Moser[1]) (p. 218) bemerkt hat. Lexis[3])

*) Eine der ersten theoretischen Untersuchungen über diesen Gegenstand stammt von Arbuthnot[2]), der aus 82-jährigen Londoner Beobachtungen nachzuweisen versuchte, dafs der ständige Überschufs an Knabengeburten es ausschliefst, dafs Knaben- und Mädchengeburten gleich wahrscheinlich seien.

(p. 75) hat hieraus den ohne Zweifel richtigen Schlufs gezogen, dafs die vorausgesetzte Unabhängigkeit zweier Befruchtungen, die zu einer Zwillingsgeburt führen, nicht bestehe; er fand die Hypothese, dafs eine Wahrscheinlichkeit für gleiches Geschlecht der Zwillinge existire, durch die Beobachtungen gut bestätigt.

Eine weitere Untersuchung bezog sich auf die Absterbeordnung einer Generation; hier hat Lexis[3]) (p. 41—64) eine neue Thatsache aufgedeckt und zum wenigsten die Tendenz für eine typische Erscheinung mit normaler Dispersion nachgewiesen. Wenn man die Alterslinien der Individuen einer Generation auf einer Geraden von einem Nullpunkte aus nach einer Richtung abträgt, so werden die Endpunkte — Sterbepunkte — ungleichförmig über die Gerade verteilt sein. In dieser Verteilung machen sich zwei Dichtigkeitscentren deutlich bemerkbar; das eine, bei dem Alter 0 und längst bekannt, rührt von der grofsen Sterblichkeit in den ersten Lebenstagen und Lebensmonaten her; das andere stellt sich in der Nähe des 70. Lebensjahres ein und hat Lexis zu seiner Theorie des Normalalters Anlafs gegeben. Das wesentlichste Merkmal dieses Alters besteht darin, dafs Abweichungen von demselben nach auf- und abwärts (letztere bis zu einer gewissen Grenze) sich wie zufällige Fehler verhalten, mit anderen Worten, dafs die Sterbefälle in der Umgebung dieses Alters typische Verteilung aufweisen. Lexis erblickt daher in dem Normalalter dasjenige Alter, auf welches die Menschen der betreffenden Generation gewissermafsen eingerichtet sind, nennt die Sterbefälle, die innerhalb der typischen Altersstrecke erfolgen, die „normalen“, die vor ihnen bis gegen das 13. Lebensjahr — wo die geringste Dichte der Sterbefälle stattzufinden pflegt — eintretenden die „vorzeitigen“, und die aus dem übrigen Abschnitt stammenden die „jugendlichen“. Die Untersuchungen, welche in Ermangelung von Aufzeichnungen über Generationen an verschiedenen Sterblichkeitstafeln ausgeführt worden sind, haben das geschilderte Bild deutlich erkennen lassen; fast ausnahmslos ergab sich das Normalalter des weiblichen Geschlechtes etwas höher als das des männlichen. Bei den Männern bewegt sich das Normalalter zwischen 67 (Belgien) und 74 Jahren (Norwegen), bei den Frauen zwischen 69 (Bayern) und 75 Jahren (Schweden und Norwegen). Lexis bestimmte auch jedesmal den Anteil der typischen Sterbefälle, die Normalgruppe; er erblickt in diesen Gröfsen Daten, welche den Charakter der Sterblichkeitsverhältnisse kennzeichnen. Es mag noch die Art der Bestimmung der Präcision erwähnt werden. Ist N das Normalalter, dessen Feststellung die Zahlen der Verstorbenen gestatten; entfallen auf das Altersintervall $(N, N+x)$ a Sterbefälle, auf das Intervall $(N, N+\omega)$, wobei $N+\omega$ das höchste Alter bedeutet, b Sterbefälle, so ist $\frac{a}{b}$ die empirische Wahrscheinlichkeit, dafs die Ab-

weichung der Lebensdauer eines Verstorbenen vom Normalalter zwischen $-x$ und x falle. Rechnet man aus der Gleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\theta e^{-t^2} dt$$

θ, so findet sich schliefslich aus der Gleichung $\theta = hx$ die Präcision $h = \frac{\theta}{x}$.

In der Sterbenswahrscheinlichkeit der Erstjährigen (Quotient, dessen Nenner die Zahl der Lebendgebornen aus einem Kalenderjahr und dessen Zähler die aus diesen Gebornen hervorgegangenen Gestorbenen im Alter von 0 bis 1 Jahr ist) hat Lexis[3]) (p. 78—82) eine typische Gröfse mit übernormaler Dispersion nachgewiesen, und in den Verhältniszahlen der Selbstmorde durch Ertränken zu allen Selbstmorden (ibid., p. 83—87) eine symptomatische Reihe erkannt. Die Möglichkeit, eine Massenerscheinung mit unternormaler Dispersion nachzuweisen, stellt Lexis in Abrede und spricht seine Überzeugung dahin aus, dafs die meisten menschlichen Massenerscheinungen zu symptomatischen Reihen führen werden, weil die Evolution in auf- oder absteigender Tendenz die Regel bilde im Leben der Menschheit. In diesem Sinne hat es keine Berechtigung, von der Sterbenswahrscheinlichkeit einer Altersclasse wie von einer festen Gröfse zu sprechen, der man durch entsprechende Vermehrung der Beobachtungen beliebig nahe kommen könnte. Überhaupt sind durch die Ergebnisse der Untersuchungen von Lexis manche der älteren Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Massenerscheinungen in Frage gestellt.

Ob aus dieser tieferen Einsicht, deren wissenschaftlicher Wert aufser Zweifel steht, nicht vielleicht nachteilige Schlüsse zu ziehen seien in Bezug auf das Versicherungswesen, welches auf menschliche Sterblichkeit gegründet ist: diese Frage mufs durch den Hinweis auf andere Gebiete praktischer Bethätigung mit einer Erfahrungsgrundlage beantwortet werden. Nirgends vermag die aus der Vergangenheit geholte Erfahrung eine absolut verläfsliche Richtschnur für die Zukunft zu geben; überall bedarf es einer ständigen Controle und zweckmäfsig gewählter Sicherungsmittel gegen unvorhersehbare Abweichungen: in der Ausübung dieser Functionen liegt ja die zielbewufste Praxis. In unserem Falle wäre es nicht einmal die zeitliche Änderung der normalen Sterblichkeitsverhältnisse, die zu Bedenken Anlafs gäbe, weil sie gewifs innerhalb sehr enger Grenzen vor sich geht; gröfsere Bedeutung könnte dem Umstande beigelegt werden, dafs die Versicherungsinstitute zumeist genötigt sind, ihren Rechnungen Daten zugrundezulegen, die aus einem ganz anderen Material abgeleitet sind als dasjenige, welches sie versichern; aber

vielfältige Erfahrung zeigt, daſs auch hieraus bei vorsichtigem Zuwerkegehen keine nachteiligen Consequenzen erwachsen. Man vergleiche hierzu die Bemerkungen v. Kries'[1]) (p. 239).

74. Schon an die erste tabellarische Darstellung einer Absterbeordnung durch Halley[1]) knüpfte sich ein Versuch, die Sterblichkeit in eine mathematische Formel zu fassen, oder, wie derlei Bestrebungen nachmals wiederholt bezeichnet worden sind, das mathematische Gesetz der Sterblichkeit zu erforschen. De Moivre[3]) hat an der Halley'schen Tafel die Wahrnehmung gemacht, daſs die Zahlen der die einzelnen Altersjahre Überlebenden innerhalb beträchtlicher Zeiträume annähernd in arithmetischer Progression fallen, und er stellte in der angezogenen Schrift, welche von der Berechnung der Leibrenten handelt und deren Inhalt später in die zweite Auflage der „Doctrine of chances"[2]) aufgenommen wurde, geradezu den Satz auf, man könne die Zahlen der Überlebenden vom 12. bis zum 86. Jahre (Lebensende) durch eine einzige arithmetische Reihe mit constanter Differenz darstellen.

Bei geometrischer Interpretation, d. i. bei Verzeichnung einer sogenannten Sterblichkeitscurve — eine Darstellungsform der Sterblichkeitsverhältnisse, von welcher D'Alembert[4]) zum ersten Male Gebrauch machte — hieſse das, die Überlebenden fallen nach den Ordinaten einer geraden Linie ab. Einen etwas zutreffenderen Einblick in den Verlauf dieser Curve hat schon D'Alembert[5]) selbst gewonnen; aus dem Studium der Tabellen, welche Buffon[1]) im Anhange seiner „Arithmétique morale" gab, leitete er die Folgerung ab, die Sterblichkeitscurve sei gegen die Abscissen-(Alters-)Axe weder beständig concav noch beständig convex.

In späterer Zeit sind nun vielfache Versuche unternommen worden, die Gestalt der Curve und ihre Gleichung festzustellen; vielfach geschah dies in dem Glauben, daſs das menschliche Sterben ähnlich wie viele physikalische Vorgänge nach einem allgemeinen Gesetze vor sich gehe, für welches nur der mathematische Ausdruck zu finden sei; manche Autoren schrieben denn auch der Formel, welche sie durch Versuche und vergleichende Betrachtung verschiedener Absterbeordnungen gefunden hatten, die Bedeutung eines Naturgesetzes zu, wiewohl es dazu an einem wesentlichen Erfordernis, an einer Begründung aus der Natur der Sache, fehlte.

Die erste formelmäſsige Darstellung eines Beobachtungsmaterials hat Lambert im 3. Bande seiner „Beiträge zum Gebrauch der Mathematik" (p. 483) gegeben; es handelte sich ihm um die Gewinnung einer Absterbeordnung für die Londoner Bevölkerung aus den Sterbelisten (Halley's Methode); da diese nicht nach einzelnen Altersjahren, sondern nur nach Altersgruppen geordnet waren, so suchte er das Fehlende durch eine Interpolationsformel zu ergänzen; dieselbe lautet:

$$y = 10000\left(\frac{96-x}{96}\right)^2 - 6176\left(e^{-\frac{x}{13\cdot682}} - e^{-\frac{x}{2\cdot43114}}\right); \qquad (\alpha)$$

y ist die Zahl der Überlebenden vom Alter x, stammend aus 10000 Gebornen. Wie wenig diese Formel ihren Urheber selbst befriedigt hat, geht daraus hervor, dafs er von ihr nicht Gebrauch machte.

Eine Sterblichkeitsformel, die vermöge ihrer wiederholten Anwendung zu praktischen Zwecken ein gewisses Ansehen erlangt hat, ist diejenige von Gompertz[1]). Von der bei dem vergleichenden Studium zahlreicher Sterblichkeitstafeln gemachten Beobachtung ausgehend, dafs innerhalb nicht zu grofser Intervalle die Zahlen der Lebenden in Altern, welche eine arithmetische Progression bilden, nach einer geometrischen Progression fortschreiten, kam Gompertz zu der Formel

$$L_x = dg^{q^x}, \qquad (\beta)$$

die er dann an einer Reihe der bekannten und angesehenen Sterblichkeitstafeln geprüft hat; L_x bedeutet die Anzahl der das Alter x Überlebenden, d, g, q sind aus der Erfahrung zu bestimmende Constanten. Gompertz beabsichtigte nicht, den ganzen Verlauf der Sterblichkeit durch diese eine Formel darzustellen*); so fand er für das Intervall (15, 45) der Northampton-Tafel:

$$L_x = 8441.7404^{1\cdot0261^x}$$

und für das Intervall (15, 55) der Deparcieux-Tafel**):

$$\log L_x = 3\cdot1557 - \text{num}\log(\bar{1}\cdot25095 + 0\cdot00704x).$$

Die Gompertz'sche Formel ist später durch Makeham (Journ. of the Inst. of Actuar. 1860) verallgemeinert worden, um zur Darstellung

---

*) Diesen Umstand hat Moser[1]) (p. 279) bei der Kritik der jetzt folgenden Formel übersehen.

**) Einen mifsverständlichen Gebrauch hat Bertrand[3]) (p. 318) von der Gompertz'schen Formel gemacht, die er in der Gestalt

$$L_x = Ge^{He^{Kx}}$$

schreibt; nicht auf Grund einer ausgewählten, sondern durch möglichste Anpassung an die besten bekannten Tafeln will er die Constanten bestimmen. Er giebt

$$G = 941\cdot160$$
$$H = -0\cdot0065461$$
$$K = 0\cdot071485$$

an, ohne den Weg mitzuteilen, auf welchem diese Werte berechnet worden sind.

des ganzen Sterblichkeitsverlaufs geeignet zu sein; in der so entstandenen Gompertz-Makeham'schen Formel ist zu dem Exponenten q^x noch ein in x linearer Summand mit unbestimmten Coefficienten getreten.

Ein Jahr nach Gompertz ist, ebenfalls in den Philos. Trans., Young[2]) mit einer Sterblichkeitsformel hervorgetreten; ihre Ableitung läſst die unklare Auffassung des Gegenstandes, wie sie damals herrschte, deutlich erkennen. Die Zahlen der Verstorbenen aus verschiedenen Beobachtungen und Tafeln (Londoner Beobachtungen aus dem Jahre 1815; Tafeln von Deparcieux, Finlaison, Carlisle, De Morgan, von Price für Northampton) werden graphisch aufgetragen; für die verschiedenen Alter werden Mittel gebildet, und diesen wird eine Curve angepaſst, für welche Young die Gleichung findet:

$$y = 368 + 10x - 11(156 + 20x - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2 \cdot 85 + 2 \cdot 05 x^2 + 2\left(\frac{x}{10}\right)^6}$$
$$- 5 \cdot 5\left(\frac{x}{50}\right)^{10} + \frac{5 \cdot 5^2}{4000}\left(\frac{x}{50}\right)^{20} - 5500\left(\frac{x}{100}\right)^{40}; \qquad (\gamma)$$

y bedeutet die Anzahl der Verstorbenen unter 100000 Personen in jenem Jahr, in welchem das Alter x vollendet wird. Durch die Formel sollte der Verlauf der Sterblichkeit in England gekennzeichnet sein.

Für die Süſsmilch-Baumann'sche Sterblichkeitstafel*) [siehe Süſsmilch[1]) 2. B., p. 319] hat Littrow[2]) (p. 52) eine näherungsweise Darstellung durch eine Potenzreihe gegeben, welche die Anzahl y der das Alter von x Jahren Überlebenden wie folgt ausdrückt:

$$y = 598 \cdot 1673 - 8 \cdot 417455x + 0 \cdot 230895x^2 - 0 \cdot 005247x^3$$
$$+ 0 \cdot 000032x^4; \qquad (\delta)$$

sie soll erst vom 10. Lebensjahre an zur Anwendung kommen.

Moser[1]), durch die vor ihm gefundenen Sterblichkeitsformeln nicht befriedigt, hat selbst auf die Auffindung einer solchen groſse Mühe verwendet. Für die Bedeutung, welche er dem gefundenen Resultate beimaſs, sind die Worte bezeichnend, mit denen er es einführt (p. 281): „Nach vielfältigen Versuchen . . . bin ich endlich glücklich genug gewesen, dasjenige Gesetz zu entdecken, wonach die Sterblichkeit regulirt ist. Es lautet so: Die Anzahl der Toten bis zu einem gewissen Lebensalter ist proportional der vierten Wurzel

*) Die Tafel stand zu der Zeit, wo Littrow das citirte Büchlein schrieb, in Deutschland und Österreich in hohem Ansehen und wurde vielfach verwendet.

aus diesem Lebensalter." Moser glaubte hierin ein ähnliches Gesetz gefunden zu haben wie etwa dasjenige, nach welchem die Wege beim freien Fall geregelt sind. Die Zahl der Gebornen als Einheit genommen, ist nach ihm die Zahl derjenigen, welche das Alter x vollenden,

$$y = 1 - ax^{\frac{1}{4}}. \qquad (\varepsilon)$$

Die Vergleichung dieser Formel mit verschiedenen Absterbeordnungen befriedigte ihn jedoch nicht in allen Altersperioden gleich gut, und so fügt er der Formel, wenn sie über das 30. Jahr aufwärts verwendet werden soll, noch zwei, und wenn auch die hohen Alter über 80 Jahre einbezogen werden sollen, zwei weitere Glieder hinzu; die so erweiterten Formeln lauten:

$$y = 1 - ax^{\frac{1}{4}} - bx^{\frac{9}{4}} - cx^{\frac{17}{4}}, \qquad (\varepsilon')$$

$$y = 1 - ax^{\frac{1}{4}} + bx^{\frac{9}{4}} - cx^{\frac{17}{4}} - dx^{\frac{25}{4}} + ex^{\frac{33}{4}}; \qquad (\varepsilon'')$$

in den Exponenten, über deren Auffindung nichts näheres gesagt wird, sollte das Gesetzmäfsige zum Ausdruck kommen.

Aus den gemeinsamen Merkmalen zahlreicher Sterblichkeitstafeln glaubte Edmonds[1]) eine Analogie zwischen dem Absterben und der Abhängigkeit der Spannkraft von Dämpfen gröfster Dichte von der Temperatur zu erkennen; dies führte ihn zu der Formel:

$$\log \text{vulg. } P = -\frac{k\alpha a}{n}\left\{1 - \left(1 + \frac{t}{a}\right)^{-n}\right\}; \qquad (\zeta)$$

P bedeutet die von einer Einheit der a-jährigen verbleibenden Überlebenden des Alters $a + t$; die Zählung des Alters erfolgt aber dabei in besonderer Weise, nämlich von zwei verschiedenen ideellen Nullpunkten aus; der eine liegt $2^1/_4$ Jahre vor der Geburt und gilt für die Alter bis zu 9 Jahren (nach gewöhnlichem Sprachgebrauch), der andere liegt 102 Jahre nach der Geburt und gilt für die Alter von 12 Jahren aufwärts; für die Zwischenzeit von 9 bis 12 besteht die Formel nicht, dort wird das Absterben als gleichförmig angenommen. Des weiteren ist

$$\frac{1}{k} = l \cdot 10 = 2{\cdot}302585 \cdots \quad \text{und } n = \frac{1}{k} - 1 = 1{\cdot}302585 \cdots;$$

α ist eine von den Beobachtungen abhängige Constante. Vergleiche mit englischen Sterblichkeitstafeln zeigten gute Übereinstimmung.

Scheffler[1]) wollte zu einer für Versicherungszwecke brauchbaren Tafel dadurch gelangen, dafs er aus einer Reihe (im ganzen 25) Sterbetafeln verschiedenster Herkunft auf graphischem Wege eine „mittlere Sterblichkeitstafel" construirte; für die Curve, welche ihr

entsprach, substituirte er in den Altersabschnitten (0, 6), (6, 80) und (80, 99) Parabeln der Gleichungsform $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ und fand dafür die Darstellungen:

$$(0,6):\ y = 100000 - 11402{\cdot}9x + 842{\cdot}4x^2,$$
$$(6,80):\ y = 64440 - 395{\cdot}86x - 4{\cdot}331x^2, \qquad (\eta)$$
$$(80,99):\ y = 204364 - 4305{\cdot}8x + 22{\cdot}68x^2.$$

Es ist nicht abzusehen, was durch solch ein unkritisches Verfahren erzielt werden soll.

Eine der jüngsten Arbeiten von der hier besprochenen Art ist die von Wittstein[3]) unternommene Aufstellung eines mathematischen Gesetzes der Sterblichkeit; über das Ziel, nach welchem derartige Untersuchungen hinstreben, spricht sich Wittstein mit den Worten aus, dafs es in einer fernen Zukunft möglich sein werde, „aus der Beobachtung weniger Altersclassen mit Sicherheit eine ganze Sterblichkeitstafel aufzubauen“. Die Beobachtungen würden dann eben nur dazu dienen, die Constanten des in seiner analytischen Form feststehenden Gesetzes zu berechnen. Seine Endformel lautet:

$$w = a^{-(M-x)^n} + \frac{1}{m}\, a^{-(mx)^n}; \qquad (\vartheta)$$

w ist die Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person, binnen Jahresfrist zu sterben; M bedeutet das höchste Alter, in welchem die Sterblichkeitstafel noch Lebende anführt; a, m, n sind aus der Beobachtung zu bestimmende Constanten. Das zweite Glied der rechten Seite bringt hauptsächlich die Kindersterblichkeit zum Ausdruck, während es in den höheren Altersstufen nur einen sehr geringen Einflufs ausübt. Wittstein hat seine Formel auf dasjenige Beobachtungsmaterial, welches Brune[1]) zur Herstellung seiner Sterblichkeitstafel für Männer heranzog, und weiter auf die Sterblichkeitsbeobachtungen H^M (Healthy male lives = gesund aufgenommene Männer) der 20 englischen Gesellschaften angewendet und in beiden Fällen befriedigende Anpassung erzielt; das zweite Beispiel bietet in der Art der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Constantenbestimmung besonderes Interesse.

In einer dänisch geschriebenen Abhandlung[3]) teilt Gram aus dem Nachlasse des Statistikers Oppermann zwei Formeln mit, deren eine den Verlauf der Sterblichkeit im Kindesalter (bis etwa zu 15—20 Jahren) und die andere von da aufwärts darstellen soll; die Formeln lauten:

$$\mu(x) = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x},$$
$$\mu(x) = (\alpha + \beta x)\, e^{-\varkappa x} + \gamma d^{\lambda x}. \qquad (\iota)$$

Darin bedeutet $\mu(x)$ die Sterbensintensität bei dem Alter x (bezüglich dieses Begriffs vergl. Art. 76).

75. Wenn man es unternimmt, den zeitlichen Ablauf einer Massenerscheinung — um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, denken wir an das Absterben einer Grundmasse Geborner oder Gleichaltriger mit zunehmendem Alter — durch eine Reihe discreter, aus der Beobachtung abgeleiteter Zahlen darzustellen, so wird diese Darstellung nicht befriedigen, weil sie mit gewissen Vorstellungen nicht im Einklange steht. Man stellt sich nämlich vor, dafs für die betreffende Erscheinung ein normaler Verlauf bestehe, den zu erkennen man bestrebt ist und der nicht allein Unstetigkeiten, sondern innerhalb kürzerer Zeiträume auch Unregelmäfsigkeiten ausschliefst; die mehr oder weniger unregelmäfsige Anordnung der Einzelwerte schreibt man daher störenden Einflüssen zu. welche die beobachteten Einzelzustände von dem normalen Verlaufe ablenkten, und stellt sich weiter vor, dafs diese Einflüsse den Charakter des Zufälligen besitzen und um so geringer sich geltend machen, je umfangreicher die Beobachtungsreihen sind, aus welchen die Einzelwerte abgeleitet wurden.

Aus diesen Erwägungen sind die auf die Ausgleichung von Massenerscheinungen gerichteten Bemühungen hervorgegangen; insbesondere bei der Construction von Sterblichkeitstafeln sind solche Ausgleichungsversuche vielfach praktisch geübt worden. Es mufs zunächst festgestellt werden, dafs sich hier die Formulirung eines bestimmten Problems als unthunlich erweist. Zu einer Abänderung des einzelnen Wertes, also des einzelnen Sterblichkeitsquotienten, welche eine Annäherung an den Normalwert erwarten liefse, fehlt es an der nötigen Grundlage; nur wenn für jeden einzelnen Wert mehrere von einander unabhängige Bestimmungen vorlägen und wenn es zulässig wäre, dieselben als gleich oder ungleich genaue Beobachtungen eines und desselben Normalwertes anzusehen, dürfte von dem, eventuell mit Berücksichtigung der Gewichte gebildeten, arithmetischen Mittel erwartet werden, dafs es dem unbekannten Normalwerte näher liege als die einzelne Bestimmung; dieses Mittel wäre dann mit Recht als ein „ausgeglichener" Wert beizubehalten. Aber auch für eine Berichtigung des Complexes aller Einzelwerte, welche eine Annäherung an den normalen Verlauf erwarten liefse, ist a priori kein Anhalt vorhanden; wäre die allgemeine Natur des Sterblichkeitsverlaufs bekannt, sodafs es sich nur um die Feststellung einer Modalität desselben handelte, mit anderen Worten: stände die Sache so, dafs für eine Function von bekannter analytischer Zusammensetzung die Parameter zu bestimmen wären, dann allerdings läge eine Aufgabe vor, die sich mit den Mitteln der Ausgleichungsrechnung nach einem gewissen Princip lösen liefse. Da jedoch keine der erwähnten Bedingungen erfüllt ist, so kann von den verschiedenen Ausgleichungsmethoden gesagt werden, dafs sie nur den formalen Zweck erfüllen,

an die Stelle der unregelmäfsigen Reihe der beobachteten Werte eine ihrem Verlaufe annähernd folgende regelmäfsigere Reihe zu setzen. Für die praktischen Zwecke des Versicherungswesens genügt dies, wie die Erfahrung gelehrt hat; subtile theoretische Untersuchungen sollten aber immer an dem unausgeglichenen, von Willkür freien Beobachtungsmaterial vorgenommen werden. Für weitgehende theoretische Vergleiche der verschiedenen Verfahren, welche vorgeschlagen worden sind, fehlt es, wie aus dem vorstehenden hervorgeht, an einem festen Boden.

Man kann zwei Kategorien von Ausgleichungsmethoden unterscheiden.

Bei der ersten Kategorie wird von der Anschauung ausgegangen, dafs die Störung, welche der einzelne Wert erleidet, sich auch noch bei den Werten einer gewissen Umgebung bemerkbar mache; und wenn diese Störung nicht bei all diesen Werten gleiche Richtung hat, so ist aus einer geeigneten gruppenweisen Zusammenfassung ein Ausgleich der Störungen zu erhoffen; dadurch, dafs man auf die Ermittlung des definitiven Wertes an einer Stelle auch die benachbarten Beobachtungswerte einwirken läfst, soll auch der Zusammenhang der Werte zum Ausdruck gelangen.

Auf diesem Gedanken beruhte schon der Vorgang, den Brune[1]) bei der Construction seiner sehr verbreiteten Tafeln befolgt hat, wenn auch hier von einer Ausgleichung bestimmter Werte (wie Sterbenswahrscheinlichkeiten oder dergl.) nicht gesprochen werden kann; aber die Zusammenfassung der Lebenden und Verstorbenen nach fünfjährigen Altersgruppen verfolgte die eben angedeuteten Ziele.

Zu besonderem Ansehen ist im Gebiete der Sterblichkeitsmessung die von Woolhouse[1]) angegebene Methode gekommen. Sie verwendet zur Bestimmung des definitiven Wertes der Sterbenswahrscheinlichkeit für ein Alter x aufser ihrem beobachteten Wert w_x noch die beobachteten Werte der sieben vorangehenden und der sieben nachfolgenden Altersjahre, im ganzen also 15 empirische Werte. Denkt man sich die Alter x als Abscissen, die zugehörigen w_x als Ordinaten aufgetragen, so werden durch die fünf Punkttripel, welche die Endpunkte von

$$\begin{array}{ccc} w_{x-7} & w_{x-2} & w_{x+3} \\ w_{x-6} & w_{x-1} & w_{x+4} \\ w_{x-5} & w_{x} & w_{x+5} \\ w_{x-4} & w_{x+1} & w_{x+6} \\ w_{x-3} & w_{x+2} & w_{x+7} \end{array}$$

bilden, Parabeln von der Gleichungsform $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ gelegt; jede dieser Parabeln schneidet auf der mittleren, zu x gehörigen Ordinatenlinie eine Strecke ab, und das arithmetische Mittel w_x' dieser

fünf Strecken wird als der definitive Wert der Sterbenswahrscheinlichkeit im Alter x erklärt; die Ausführung der Rechnungen giebt

$$w_x' = \tfrac{1}{5}\{w_x + 0{\cdot}96(w_{x-1} + w_{x+1}) + 0{\cdot}84(w_{x-2} + w_{x+2}) + 0{\cdot}28(w_{x-3} + w_{x+3}) + 0{\cdot}02(w_{x-4} + w_{x+4}) - 0{\cdot}08(w_{x-6} + w_{x+6}) - 0{\cdot}12(w_{x-7} + w_{x+7})\}.$$

Ein wesentlich einfacheres Verfahren hat Wittstein[1]) empfohlen; es besteht in bloſser Mittelbildung. Um den definitiven Wert w_x' zu bilden, nimmt er das arithmetische Mittel aus den fünf successiven Werten, in deren Mitte w_x steht; er setzt also

$$w_x' = \frac{w_{x-2} + w_{x-1} + w_x + w_{x+1} + w_{x+2}}{5};$$

sollte der Verlauf der w_x' noch nicht befriedigen, so wird auf sie dasselbe Verfahren angewendet, wodurch

$$w_x'' = \frac{w_{x-4}+2w_{x-3}+3w_{x-2}+4w_{x-1}+5w_x+4w_{x+1}+3w_{x+2}+2w_{x+3}+w_{x+4}}{25}$$

$$= 0{\cdot}2w_x + 0{\cdot}16(w_{x-1}+w_{x+1}) + 0{\cdot}12(w_{x-2}+w_{x+2}) + 0{\cdot}8(w_{x-3}+w_{x+3}) + 0{\cdot}04(w_{x-4}+w_{x+4})$$

erhalten wird, sodaſs sich nunmehr an der Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit eines Alters neun Einzelwerte beteiligen.

In jüngster Zeit haben Anton[1]) und Eneström[5]) Ausgleichungsmethoden angegeben, welche auf der Verwendung der Parabel beruhen. Ersterer legt, um w_x' zu bestimmen, eine Parabel der Gleichungsform $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, welche sich den Endpunkten von w_{x-2}, w_{x-1}, w_x, w_{x+1}, w_{x+2} möglichst eng anpaſst — sie wird mittelst der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt; der Abschnitt, den diese Parabel auf der zu x gehörigen Ordinatenlinie bildet, wird als w_x' genommen. Eneström legt gleichfalls und in derselben Weise Parabeln, welche sich je fünf aufeinanderfolgenden Punkten möglichst genau anschlieſsen; jede Ordinatenlinie wird von fünf solchen Parabeln getroffen, und der mittelste Punkt gilt als Endpunkt von w_x'. Zur Berechnung von w_x' hat Eneström die Formel abgeleitet:

$$w_x' = w_x - \tfrac{3}{35}\,\Delta^4 w_{x-2};$$

darin bedeutet $\Delta^4 w_{x-2}$ die vierte, also letzte, Differenz der fünfgliedrigen Reihe:

$$w_{x-2},\ w_{x-1},\ w_x,\ w_{x+1},\ w_{x+2}.$$

Die zweite Kategorie der Methoden zur Ausgleichung von Massenerscheinungen besteht in ihrer Anpassung an eine empirische Formel; für die Bestimmung der Constanten dieser Formel unter Zuziehung

aller Beobachtungswerte nach Maſsgabe ihrer Genauigkeit bietet die Methode der kleinsten Quadrate ein völlig durchgebildetes Verfahren. Der Proceſs ist hier aber nicht als eine Ausgleichung zufälliger Fehler der beobachteten Werte, sondern als eine Ausgleichung ihrer Abweichungen von dem hypothetischen Verlauf anzusehen, der durch die empirische Formel ausgedrückt ist. Daher verdient das gewonnene Resultat auch nicht den Namen einer wahrscheinlichsten oder der genauesten Darstellung der Erscheinung auf Grund der vorhandenen Beobachtungen, sondern die gefundene Formel ist unter allen desselben Baues diejenige, welche sich den Beobachtungen in ihrer Totalität am engsten anschlieſst, im Sinne der Auffassung Henke's[1]), über die im Art. 64 berichtet worden ist. Ist die Formel aus dem vorgängigen vergleichenden Studium der betreffenden Erscheinung hervorgegangen und so gewählt worden, daſs sie deren allgemeine Züge wiederzugeben vermag, so wird ein besserer Anschluſs zu erzielen sein als etwa bei einem Versuche, die Erscheinung in eine Potenzreihe zu fassen. In diesem Sinne darf der Gompertz'schen und der Gompertz-Makeham'schen, aber auch der Wittstein'schen Sterblichkeitsformel (s. vorig. Art.) eine Überlegenheit über die andern für denselben Zweck vorgeschlagenen Formeln zuerkannt werden. Bezüglich der Durchführung solcher Ausgleichungen ist zunächst auf zwei Arbeiten von Lazarus hinzuweisen, deren eine[1]) den Gegenstand zuerst aus allgemeinen Gesichtspunkten und dann mit besonderer Rücksichtnahme auf die Construction von Sterblichkeitstafeln behandelt, während die andere[2]) im Anschlusse an eine Kritik des von Zillmer[2]) für die Ausgleichung der Tafel der 23 deutschen Gesellschaften gewählten Verfahrens die Makeham'sche Formel auf das nämliche Material anwendet. Eine bis ins Detail ausgearbeitete Methode der Ausgleichung einer Sterblichkeitstafel nach der letztgenannten Formel hat J. Karup[1]) gegeben und sie auf die Sterblichkeitsbeobachtungen der Gothaer Bank angewendet. Auch auf die im vorigen Artikel besprochene Schrift Wittstein's[3]): „Das mathematische Gesetz der Sterblichkeit" muſs hier nochmals hingewiesen werden.

Eine vergleichende Darstellung der verschiedenen Ausgleichungsmethoden, welche für die Construction von Sterblichkeitstafeln in Vorschlag gebracht worden sind, mit einer Vergleichung der Resultate, welche einige dieser Methoden bei Anwendung auf ein und dasselbe statistische Material ergeben, hat Blaschke[1]) veröffentlicht. Sorley (Journ. of Actuar. XXII) hat mehrere englische Ausgleichungsverfahren einer vergleichenden Kritik unterzogen.

76. Die vergleichende Statistik bedient sich bei Untersuchungen, wo es sich darum handelt, den zeitlichen Entwicklungsgang einer Bevölkerung in knappen Zügen darzustellen oder verschiedene Bevölkerungen in Bezug auf gewisse Merkmale mit einander zu ver-

gleichen, einer Reihe von Zahlengröfsen, über deren Natur, obwohl manche von ihnen ihre Einführung in eine weit zurückliegende Zeit datiren, erst in neuerer Zeit Untersuchungen angestellt worden sind. Solche Gröfsen sind die wahrscheinliche Lebensdauer, die mittlere Lebensdauer, das mittlere Alter der Verstorbenen, die Geburts- und die Sterblichkeitsziffer. Während manche davon schon bei der Einführung wenigstens eine bestimmte formale Definition erhielten, herrscht bei anderen selbst in dieser Beziehung noch heute Unklarheit. Bezüglich der correcten Bestimmbarkeit einzelner der Gröfsen und ihres gegenseitigen Zusammenhangs sind durch die neuere Forschung ältere Anschauungen vielfach corrigirt worden; die wissenschaftliche Bedeutung mancher der Zahlen ist dadurch in Frage gestellt.

Der Begriff der wahrscheinlichen Lebensdauer findet sich bereits in der Halley'schen Schrift[1]) über Sterblichkeit. Wählt man mit D'Alembert[4]) als Grundfunction zur Darstellung des Sterblichkeitsverlaufs die Absterbeordnung $\psi(x)$, so ist die wahrscheinliche Lebensdauer W_0 schlechtweg durch die Gleichung

$$\psi(W_0) = \tfrac{1}{2}\,\psi(0) \qquad (\alpha)$$

und die wahrscheinliche Lebensdauer W_x der x-jährigen durch

$$\psi(x + W_x) = \tfrac{1}{2}\,\psi(x) \qquad (\beta)$$

bestimmt; bildet man mit $\psi(x)$ als Ordinate die Sterblichkeitscurve, so ist W_0 die zur halben Ursprungsordinate gehörige Abscisse. Bedient man sich der schon von Laplace[13]) (p. 408) eingeführten Function $\varphi(x)$, welche derart gedacht ist, dafs das Product $\varphi(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, in dem Altersintervall $(x, x + dx)$ zu sterben — in der neueren Litteratur wird diese Function als die Sterbensintensität oder Sterblichkeitskraft der x-jährigen bezeichnet; man könnte sie nach Analogie des $\varphi(x)$ der Fehlertheorie die relative Häufigkeit der Sterbefälle bei dem Alter x nennen —, dann treten an die Stelle der Gleichungen (α), (β) die folgenden:

$$\int_0^{W_0} \varphi(x)\,dx = \int_{W_0}^{\omega} \varphi(x)\,dx = \tfrac{1}{2} \qquad (\alpha^*)$$

$$\int_x^{x+W_x} \varphi(x)\,dx = \int_{x+W_x}^{\omega} \varphi(x)\,dx, \qquad (\beta^*)$$

wenn ω, wie im folgenden durchweg, das höchste Alter bedeutet; nunmehr ist W_0 die Abscisse derjenigen Ordinate, welche die Fläche der durch $\varphi(x)$ bestimmten Curve halbirt.

Der Begriff der mittleren Lebensdauer führt auf Kerseboom zurück.

In D'Alembert's analytischer Darstellung ist die mittlere Lebensdauer M_0 schlechtweg durch den Quotienten

$$\frac{\int_0^\omega \psi(x)\,dx}{\psi(0)} \tag{γ}$$

und diejenige der x-jährigen M_x durch

$$\frac{\int_x^\omega \psi(x)\,dx}{\psi(x)} \tag{δ}$$

ausgedrückt, während bei der Wahl der Sterbensintensität als Grundfunction

$$M_0 = \int_0^\omega x\varphi(x)\,dx \tag{γ^*}$$

und

$$M_x = \frac{\int_x^\omega x\varphi(x)\,dx}{\int_x^\omega \varphi(x)\,dx} \tag{δ^*}$$

wäre; M_0 bedeutet also die Schwerpunktsabscisse der Fläche, welche durch die Curve $y = \varphi(x)$ in ihrer ganzen Erstreckung begrenzt ist.*)

Laplace[13]) (p. 408—412) hat über die mittlere Lebensdauer eine Untersuchung angestellt, welche deren praktische Bestimmung mit dem theoretischen Wert in Beziehung setzt. Angenommen, man hätte eine sehr grofse Zahl n Geborner (eine Geburtengeneration) bis zu ihrem successiven Absterben beobachtet und dann den Durchschnitt der erreichten Alter gebildet, so wäre damit eine empirische Bestimmung von M_0 gewonnen, um so verläfslicher, je gröfser n; für $n = \infty$ (eine rein mathematische Fiction) ergäbe sich nach der Vorstellung von Laplace M_0 selbst. Es wird nun die Frage nach der

---

*) D'Alembert[4]) hält die beiden Gröfsen W_0 und M_0 für gleich geeignet, als „espérance de vivre" einer Person angesehen zu werden; er leitet einen Mangel der Wahrscheinlichkeitsrechnung daraus ab, dafs sie „für dasselbe Problem" zwei verschiedene Resultate gebe. — Bei De Moivre[8]), welcher die Abnahme der Überlebenden nach einer arithmetischen Progression sich vorstellt, fallen beide Begriffe in einen zusammen. Sie sind auch später vielfach mit einander vermengt worden. — Die Darstellung (γ^*) der mittleren Lebensdauer entspricht dem Begriff der mathematischen Erwartung; man hat daher M_0 auch die Lebenserwartung der Neugebornen genannt.

Wahrscheinlichkeit gestellt, mit welcher die empirische Bestimmung der mittleren Lebensdauer nicht mehr als innerhalb vorgezeichneter Grenzen von dem theoretischen Werte abweicht. Das Ergebnis der Analyse, die sich vollständig an jene der Fehlertheorie anpafst, geht dahin, dafs der empirische Wert mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\theta e^{-h^2 t^2} dt$$

zwischen den Grenzen

$$M_0 \mp \frac{\theta\omega}{\sqrt{n}}$$

zu erwarten sei, und dafs der halbe durchschnittliche Fehler des empirischen Wertes gleichkomme

$$\sqrt{\frac{K_2 - M_0^2}{2n\pi}};$$

dabei ist $h = \frac{\omega}{\sqrt{2(K_2 - M_0^2)}}$ und bedeutet K_2 den Wert des Integrals $\int_0^\omega x^2\varphi(x)dx$ oder das mittlere quadrirte Alter. Laplace bemerkt, für die Ausrechnung der beiden letzten Ausdrücke genüge es, statt M_0 das arithmetische Mittel der beobachteten Sterbensalter und statt K_2 das Mittel ihrer Quadrate zu nehmen.

Wenn an Stelle einer Liste der von den einzelnen Individuen einer Generation erreichten Alter eine Sterblichkeitstafel dieser Generation in Form der Zahlenreihe $A_0, A_1, \cdots A_x, \cdots A_\omega$ der Überlebenden gegeben wäre, so liefse sich für die mittlere Lebensdauer ein Näherungswert nach einem Verfahren bestimmen, das Laplace[13]) (p. 411) ebenfalls angegeben hat; unter der Voraussetzung nämlich, dafs die Sterbefälle während eines Altersjahres sich gleichförmig über dasselbe verteilen, ergiebt sich für die mittlere Lebensdauer der x-jährigen die Bestimmung

$$\frac{A_{x+1} + A_{x+2} + \cdots + A_\omega}{A_x} + \tfrac{1}{2}$$

oder

$$\frac{A_x + A_{x+1} + \cdots + A_\omega}{A_x} - \tfrac{1}{2} = \frac{S_x}{A_x} - \tfrac{1}{2} \qquad (\varepsilon)$$

und dementsprechend für die mittlere Lebensdauer der Gebornen der Wert

$$\frac{S_0}{A_0} - \tfrac{1}{2}; \qquad (\varepsilon^*)$$

S_x $(x = 0, 1, 2, \cdots \omega)$ bezeichnet man als die „summirten Zahlen der Lebenden".

Aber weder ist es bisher möglich gewesen, noch wird es in Zukunft gelingen — von allen anderen Umständen abgesehen schon wegen der erforderlichen sehr langen Beobachtungsdauer —, eine sehr zahlreiche Generation bis zu ihrem Aussterben in Evidenz zu erhalten, derart, daſs man für jedes Individuum das Sterbealter verzeichnet oder daſs man durch Zählung der Überlebenden auf jeder Altersstufe eine Absterbeordnung der Generation herstellt. In dieser strengen Fassung kann also die mittlere Lebensdauer als eine unzugängliche Gröſse bezeichnet werden; und doch wäre sie nur in dieser Fassung geeignet, ein generelles Maſs für die Lebenskraft verschiedener Generationen abzugeben. Die in den Tafeln, gleichgiltig ob Volkstafeln oder Tafeln ausgewählter Gesellschaften, angeführten, nach den Formeln (ε), (ε^*) gerechneten Werte verdienen den Namen „mittlere Lebensdauer" nicht.

Aus der Erkenntnis der Schwierigkeiten einer richtigen directen Bestimmung der mittleren Lebensdauer entsprangen Bestrebungen, dieser Gröſse auf einem anderen, kürzeren Wege beizukommen. Einen solchen glaubte man in der Bestimmung des durchschnittlichen Alters der Verstorbenen während eines Beobachtungsjahres gefunden zu haben. Dazu hatte der folgende Schluſs geführt: Bei Verfolgung einer Geburtengeneration bis zu ihrem Aussterben kommen die Verstorbenen der verschiedenen Altersstufen in einer langen Reihe von Jahren nacheinander zur Beobachtung; verzeichnet man hingegen während eines Kalenderjahres alle Verstorbenen einer Bevölkerung nach den erreichten Altern, so hat man alle Altersstufen auf einmal nebeneinander. Darin, daſs nun jede Altersgruppe von Verstorbenen aus einer anderen Zeit stammt, — so die Gruppe der (0, 1)-jährigen aus dem Beobachtungsjahr und dem vorangehenden Kalenderjahr, die Gruppe der (1, 2)-jährigen aus den zwei letztvorangehenden Kalenderjahren, u. s. w., die letzte Gruppe aus einer etwa um hundert Jahre zurückliegenden Zeit, — erblickte man bei den früher herrschenden Vorstellungen über den Bevölkerungswechsel kein Hindernis, das Durchschnittsalter der Verstorbenen als die mittlere Lebensdauer anzusehen. Die Übereinstimmung beider Gröſsen fände wirklich statt, wenn die Annahme einer stationären Bevölkerung, an der die ältere Statistik lange festhielt, zutreffend wäre. Man verband mit dieser Bezeichnung zunächst nur die Vorstellung einer Bevölkerung, welche sich vermöge beständigen Gleichgewichtes zwischen Geburten und Sterbefällen auf gleicher numerischer Höhe erhält, ohne sich der Bedingungen klar zu werden, welche ein solcher Zustand voraussetzen würde. Die moderne Theorie der Bevölkerungsstatistik hat gezeigt, daſs dazu constante Geburtendichtigkeit und eine herrschende Absterbeordnung notwendig und aus-

reichend wären;*) die statistischen Erfahrungen lehren aber, dafs die Wirklichkeit von solchen Verhältnissen erheblich abweicht.

Was die Geburts- und die Sterblichkeitsziffer anlangt, deren bereits im Art. 70 Erwähnung geschah, so mangelt es bei diesen selbst an einer präcisen Definition. Man versteht darunter Quotienten aus der Zahl der Geburts-, beziehungsweise der Sterbefälle eines Kalenderjahres durch die Bevölkerungsziffer; ob diese für den Beginn oder für das Ende des Beobachtungsjahres oder für einen anderen Zeitpunkt zu gelten habe, darüber wird keine Bestimmung getroffen, und die Übung war und ist hierin schwankend; bei einer stationären Bevölkerung wäre eine solche Bestimmung allerdings überflüssig.**) Auch in diesen beiden Ziffern, deren Feststellung nur einjähriger Erhebungen bedarf, glaubte man ein einfaches Mittel zur Bestimmung der mittleren Lebensdauer gefunden zu haben: diese sollte durch den reciproken Wert der Geburts- wie auch durch jenen der Sterblichkeitsziffer dargestellt sein. In der That würden diese Relationen für eine stationäre Bevölkerung, aber nur für eine solche, bestehen; bei den wirklich herrschenden Verhältnissen kommt aber der Geburts- und Sterblichkeitsziffer eine einfache theoretische Bedeutung nicht zu.

Seit der Begründung der Theorie des Bevölkerungswechsels waren die in diesem Artikel besprochenen statistischen Zahlen Gegenstand vielseitiger Untersuchungen. Knapp[1]) befafste sich mit denselben schon gelegentlich seiner ersten bevölkerungstheoretischen Arbeit und schlug eine modificirte Berechnungsweise der Sterblichkeitsziffer vor, die dieser Ziffer zu einer klareren Bedeutung verhelfen sollte. Zeuner[1]) wandte seine überaus durchsichtige stereographische Darstellung an, um den mathematischen Sinn der erwähnten Zahlen klarzulegen und analytische Ausdrücke für sie zu gewinnen, mit deren Hilfe er einige statistische Fragen erledigte. In jüngster Zeit hat v. Bortkewitsch[1]) die Beziehungen der mittleren Lebensdauer zum Durchschnittsalter der Verstorbenen, zur Geburts- und Sterblichkeitsziffer, und das Verhältnis all dieser Zahlen zum Problem der Sterblichkeitsmessung in einer Monographie eingehend behandelt, die auch historische und litterarische Daten zu dem Gegenstande beibringt.

*) Dazu kommt noch die aufser der Natur der Sache gelegene Voraussetzung, dafs die Bevölkerung geschlossen sei, d. h. keine Veränderungen durch Ein- und Auswanderung erfahre.

**) Laplace[18]) (p. 491) vergleicht beispielsweise den jährlichen Durchschnitt der Geburten und Sterbefälle aus dem Triennium vom 22./IX 1799 bis 22./IX 1802 mit der Bevölkerungsziffer des letztgenannten Tages.

Litteratur-Verzeichnis.

Abbe, C., 1) Historical note on the method of least squares. Amer. Journ. (3) I, 1871.

Abbott, J. K., 1) On the probability of testimony and arguments. Phil. Mag. (4) XXVIII, 1864.

Adrain, R., 1) Research concerning the probabilities of the errors which happen in making observations. The Analyste I, 1808.

Airy, G. B., 1) Remarks on Peirce's Criterion. Gould Astr. J. IV, 1856.

— 2) On the algebrical and numerical theory of errors of observations. Cambridge, 1861.

D'Alembert, J., 1) Croix ou Pile. Encycl. 1754.

— 2) Gageure. Ibid.

— 3) Reflexions sur le calcul des probabilités. Opusc. Mathém. II, 1761.

— 4) Sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole. Ibid.

— 5) Sur le calcul des probabilités. Ibid. IV.

— 6) Doutes et questions sur le calcul des probabilités. Mélange de litér., d'hist. et de philos. V. Amsterdam, 1770.

Andrae, v., 1) Fehlerbestimmung bei der Auflösung der Pothenot'schen Aufgabe mit dem Meſstische. Astr. N. XLVII, 1858.

— 2) Schreiben des Herrn Geheimen-Etatsraths von Andrae an den Herausgeber. Ibid. LXXIV, 1869.

— 3) Udvidelse af en af Laplace i Mécanique céleste angivet Methode for Bestemmelsen af en unbekjendt Störrelse ved givne umiddelbare Jagttagelser. Kopenhagen, 1860.

— 4) Über die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers durch die gegebenen Differenzen von *m* gleich genauen Beobachtungen einer Unbekannten. Astr. N. LXXIX, 1872.

Anton, L., 1) Über ein neues Ausgleichungsverfahren bei der Aufstellung von Sterbetafeln. Z. f. Math. u. Ph. XXXVIII, 1893.

Arbuthnot, J., 1) On the Laws of Chance. London, 1692.

— 2) An Argument for Divine Providence, taken from the constant Regularity observ'd in the Births of both Sexes. Lond. Phil. Trans. 1710

Argelander, F. W., 1) Über die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf einen besondern Fall. Astr. N. XXI, 1844.

D'Arrest, H., 1) Beitrag zur Methode der kleinsten Quadrate. Astr. N. XLI, 1855.

— 2) Schreiben des Herrn Professors D'Arrest an den Herausgeber. Astr. N. XLVII, 1858.

Barbier, E., 1) Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert. Liouv. J. (2) V, 1860.

— 2) Deux moyens d'avoir π au jeu de pile ou face. Compt. rend. XCIV, 1882.

Bauernfeind, C. M., 1) Über ein Verfahren, die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineare Gleichungen überhaupt durch successive Annäherungen zu lösen. K. bayr. Comm. d. eur. Gradm. 1874.

— 2) Elemente der Vermessungskunde. Stuttgart, 1876.

Bayes, Th., 1) An Essay toward solving a Problem in the Doctrine of Chances. Lond. Phil. Trans. LIII, 1764.

— 2) A Demonstration of the Second Rule in the Essay towards the Solution of a Problem in the Doctrine of Chances. Ibid. LIV, 1765.

Becker, K., 1) Zur Theorie der Sterbetafeln für ganze Bevölkerungen. Stat. Nachr. f. Oldenb. IX, 1867.

— 2) Zur Berechnung von Sterbetafeln an die Bevölkerungsstatistik zu stellende Anforderungen. Berlin, 1874.

Beguelin, N., 1) Sur les suites ou séquences dans la loterie de Gènes. Hist. Ac. Berl. 1765.

— 2) Sur l'usage du principe de la raison suffisante dans le calcul des probabilités. Ibid. 1767.

Berg, F. J. van den, 1) Over de kants dat, bij willekeurige verdeeling van een gegeven rechte lijn, de segmenten tusschen gegeven grenzen liggen. Niew Arch. XVII, 1891.

Bernoulli, Daniel, 1) Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis. Comm. Ac. Petrop. V, 1738; deutsch von A. Pringsheim, Leipzig, 1896.

— 2) Recueil des pièces qui ont remporté le prix de l'Academie Royale des Sciences. III, 1734.

— 3) Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et les avantages de l'inoculation pour la prévenir. Hist. Ac. Par. 1760.

— 4) De usu algorithmi infinitesimalis in arte conjectandi specimen. Novi Comm. Petrop. XII, 1768.

— 5) De duratione media matrimoniorum, pro quaecunque conjugum aetate, aliisque questionibus affinibus. Ibid.

— 6) Disquisitiones Analyticae de novo problemate conjecturali. Ibid. XIV, 1770.

— 7) Mensura Sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata. Ibid.

— 8) Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanda. Acta Ac. Petrop. 1778.

Bernoulli, Jacob, 1) Ars conjectandi. Basileae, 1713. (L'art de conjecturer. Traduit du latin de J. B., avec observations, éclaircissemens et additions par L. G. F. Vastel, Caen, 1801.)

Bernoulli, Johann, 1) De Alea, sive Arte Conjectandi, Problemata quaedam. Werke IV, 1742.

— 2) Sur les suites ou séquences dans la loterie de Gènes. Hist. Ac. Berl. 1771.

Bernoulli, Nicolaus I., 1) Specimen Artis conjectandi, ad quaestiones Juris applicatae. Basileae, 1709. (Auch Acta Erud. Suppl. 1711.)

Bertrand, J., 1) Sur ce qu'on nomme le poids et la précision d'une observation. Compt. rend. CV, 1887.
— 2) Sur les épreuves répétées. Ibid.
— 3) Calcul des probabilités. Paris, 1889.
Bessel, F. W., 1) — und Baeyer, J., Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit Preussischen und Russischen Dreiecksketten. Berlin, 1838.
— 2) Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler. Astr. N. XV, 1838.
— 3) Ein Hilfsmittel zur Erleichterung der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate. Ibid. XVII, 1840.
— 4) Neue Formeln von Jacobi für einen Fall der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate. Ibid.
Bicquilley, C. F. de, 1) Du Calcul des Probabilités. Paris, 1783 (2. Aufl. 1805).
Bienaymé, J., 1) Sur la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres carrés. Liouv. J. (1) XVII, 1852.
— 2) Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés. Compt. rend. XXXVII, 1853.
— 3) Remarques sur les différences qui distinguent l'interpolation de M. Cauchy de la méthode des moindres carrés, et qui assurent la supériorité de cette méthode. Compt. rend. XXXVII, 1853; Liouv. J. (1) XVIII, 1853.
— 4) Considérations à l'appui . . . . Liouv. J. (2) XII, 1867.
— 5) Application d'un théorème nouveau du calcul des probabilités. Bull. Soc. d. M. d. Fr. II, 1874; Compt. rend. LXXXI, 1875.
Bierens de Haan, D., 1) Jets over dobbelen. Versl. en Meded. XII, 1878. (Französ. Übers. Arch. Néerl. XIV, 1879.)
Bing, F., 1) Om aposteriorisk Sandsynlighed. Zenth. Tidsskr. (4) III, 1879.
Biver, P. E., 1) Théorie analytique des moindres carrés. Liouv. J. (1) XVIII, 1853.
Black, 1) Analyse arithmétique et médicale des maladies et de la mortalité de l'espèce humaine. Paris, 1789.
Blaschke, E., 1) Die Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen mit besonderer Berücksichtigung der Ausgleichung von Absterbe- und Invalidenordnungen. Wien, 1893.
Boltzmann, L., 1) Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten. Wien. Ber. LVIII, 1868.
— 2) Lösung eines mechanischen Problems. Ibid.
Boole, G., 1) Treatise on the Calculus of finites Differences. Cambridge, 1860. (Deutsch von H. Schnuse, Braunschweig, 1867.)
Borchardt, B., 1) Einführung in d. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin, 1889.
Borchardt, C. W., 1) Über Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate. Crelle J. LVIII, 1861.
Bortkewitsch, L. von, 1) Die mittlere Lebensdauer. Die Methoden ihrer Bestimmung und ihr Verhältnis zur Sterblichkeitsmessung. Staatswiss. Stud. IV. Jena, 1893.
— 2) Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik. Jahrb. f. Nat.-Oek. u. Stat. LXIII, LXV, 1893—1895.
— 3) Das Gesetz der kleinen Zahlen. Leipzig, 1898.

Bravais, A., 1) Analyse mathématique sur la probabilité des erreurs de situation d'un point. Mém. Ac. Franç. IX, 1846.
Brünnow, F., 1) Lehrbuch der sphärischen Astronomie. Berlin, 1.—4. Aufl., 1851—1881.
Brune, 1) Neue Sterblichkeitstafeln für Wittwencassen. Crelle J. XVI, 1837.
Brunn, H., 1) Über ein Paradoxon der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Münch. Ber. (philos. Cl.) 1892.
Bruns, H., 1) Über eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung. Leipz. Ber. XIII, 1886.
— 2) Über die Ausgleichung statistischer Zählungen in der Psychophysik. Wundt, Phil. Stud. IX, 1893.
Buffon, G., 1) Essai d'Arithmétique Morale. Suppl. Hist. Natur. IV, 1777.
Burton, Ch. V., 1) On a physical basis for the theory of errors. Phil. Mag. (5) XXVIII, 1889.
Cantor, G., 1) Historische Notizen über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Halle, 1874.
Cantor, M., 1) Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. II, Cap. 84 u. 96. Leipzig, 1894—96.
Cardano, H., 1) De ludo aleae. 1663.
Catalan, E., 1) Solution d'un problème de probabilité, relatif au Jeu de rencontre. Liouv. J. (1) II, 1837.
— 2) Deux problèmes de probabilités. Ibid. (1) VI, 1841.
— 3) Sur le problème des partis. Nouv. Corr. Math. IV, 1878.
Cauchy, A., 1) Mémoire sur diverses formules relatives à la théorie des intégrales définies etc. J. Éc. polyt. 28, 1841.
— 2) Mémoire sur l'interpolation. Liouv. J. (1) II, 1837.
— 3) Mémoire sur les coefficientes limitateurs ou restricteurs. Compt. rend. XXXVII, 1853.
— 4) Sur les résultats moyens d'observations de même nature, et sur les résultats les plus probables. Ibid.
— 5) Sur la probabilité des erreurs qui affectent des résultats moyens d'observations de même nature. Ibid.
— 6) Sur la plus grande erreur à craindre dans un résultat moyen, et sur le système de facteurs qui rend cette plus grande erreur un minimum. Ibid.
— 7) Mémoire sur les résultats moyens d'un très-grand nombre d'observations. Ibid.
Cavallin, C. B. S., 1) Om ett theorem af Crofton. Zenth. Tidsskr. (5) II, 1884.
Chauvenet, W., 1) Spherical and practical astronomy. II. Philadelphia, 1868.
— 2) Treatise of the method of least squares. Newyork a. Philad., 1880. (Schwed. Übers. v. Klint, Stockholm, 1884.)
Condorcet, M. J., 1) Réflexions sur la règle générale qui préscrit de prendre pour valeur d'un évènement incertain la probabilité de cet évènement, multipliée par la valeur de l'évènement en lui-même. Hist. Ac. Par. 1781.
— 2) Sur la probabilité des factes extraordinaires. Ibid. 1783.
— 3) Application des principes de l'article précédent à quelques questions de critique. Ibid. 1784.
— 4) Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix. Paris, 1785.
Coste, 1) Question de probabilité applicable aux décisions rendues par les jurés. Liouv. J. (1) VII, 1842.

Cotes, R., 1) Aestimatio errorum in mixta mathesi, per variationes partium trianguli plani et sphaerici. Cantabrigiae, 1722.
Cournot, A. A., 1) Exposition de la théorie des chances et des probabilités. Paris, 1843. (Deutsch von H. Schnuse, Braunschweig, 1849.)
— 2) Mémoire sur les applications du calcul des chances à la statistique judiciaire. Liouv. J. (1) III, 1838.
Crofton, M. W., 1) On the Theory of Local Probability, applied to Straight Lines drawn at random in a plane, the methods used being also extended to the proof of certain new Theorems in the Integral Calculus. Lond. Trans. CLVIII, 1868.
— 2) On the proof of the law of errors of observations. Ibid. CLIX, 1869.
— 3) Geometrical theorems relating to mean values. Proc. Lond. Math. Soc. VIII, 1877.
— 4) Probability. Encycl. Brit., 9. edit., XIX, 1885.
Czuber, E., 1) Vergleichung zweier Annahmen über die moralische Bedeutung von Geldsummen. Grun. Arch. LXII, 1878.
— 2) Genauigkeit der geodätischen Punktbestimmung durch zwei und mehrere Gerade. Techn. Bl. 1878.
— 3) Zur Theorie der Fehlerellipse. Wien. Ber. LXXXII (2), 1880.
— 4) Das Petersburger Problem. Grun. Arch. LXVII, 1881.
— 5) Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte. Leipzig, 1884.
— 6) Zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten. Wien. Ber. XC (2), 1884.
— 7) Zum Satze vom arithmetischen Mittel. Astron. N. CXIV, 1886.
— 8) Zum Gesetz der grofsen Zahlen. Prag, 1889.
— 9) Zur Theorie der Beobachtungsfehler. Monatsh. f. M. u. Ph. I, 1890.
— 10) Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig, 1891.
— 11) Zur Kritik einer Gaufs'schen Formel. Monatsh. f. M. u. Ph. II, 1891.
Dedekind, R., 1) Bemerkungen zu einer Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Crelle J. L, 1855.
Degen, C. F., 1) Tabularum ad faciliorem probabilitatis computationem utilem Enneas. Kiobenhawn, 1824.
Deparcieux, A., 1) Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine. Paris, 1746.
Didion, J., 1) Expériences sur la justesse comparée du tir des balles sphériques, plates et longues. J. Éc. polyt. XVI, 1839.
— 2) Mémoire sur la probabilité du tir des projectiles. Compt. rend. XLV, 1857.
Dienger, J., 1) Über die Ausgleichung der Beobachtungsfehler. Grun. Arch. XVIII—XIX, 1852.
— 2) Über die Bestimmung des Gewichts der nach der Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten, wenn Bedingungsgleichungen vorhanden sind. Ibid. XIX, 1852.
— 3) Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadrate. Braunschweig, 1857.
— 4) Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und damit zusammenhängende bestimmte Integrale. Prag. Abh. (6) V, 1872.
— 5) Die Laplace'sche Methode der Ausgleichung von Beobachtungsfehlern bei zahlreichen Beobachtungen. Wien. Denkschr. 1875.

Dienger, J., 6) Der mittlere Gewinn oder Verlust bei der Lebensversicherung für die ganze Versicherungsdauer. Rundsch. d. Vers.-W. XXVII, 1877.
Donkin, W., 1) Sur la théorie de la combinaison des observations. Liouv. J. (1) XV, 1850.
— 2) On an analogy relating to the theory of Probability and the theory of Least Squares. Quart. J. of M. I, 1857.
Dormoy, E., 1) Théorie mathématique des assurances sur la vie. Paris, 1878.
Edgeworth, F. V., 1) The law of errors. Phil. M. (5) XVI, 1883.
— 2) On the reduction of observations. Ibid. (5) XVII, 1884.
— 3) A priori probabilities. Ibid. (5) XVIII, 1884.
— 4) On discordant observations. Ibid. (5) XXIII, 1887.
— 5) The empirical proof of the law of errors. Ibid. (5) XXIV, 1887.
— 6) On a new method of reducing observations relating to several quantities. Ibid. (5) XXV, 1888.
— 7) Correlated averages. Ibid. (5) XXXIV, 1892.
— 8) The law of errors and correlated averages. Ibid.
Edmonds, T. R., 1) On the law of human mortality expressed by a new formula. Phil. M. (4) XXXI, 1866.
Eggenberger, J., 1) Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems, der Gammafunction und des Laplace'schen Integrals. Berner Mitth. L, 1894.
Ellis, R. L., 1) On the method of least squares. Cambr. Trans. VIII, 1844.
— 2) Remarks on an alleged proof of the method of least squares. Phil. M. (3) XXXVII, 1850.
Encke, J. F., 1) Über die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate. Ac. Berl. 1831.
— 2) Über die Methode der kleinsten Quadrate. Berl. Astr. Jahrb. 1834, 1835, 1836.
— 3) Über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Beobachtungen. Ibid. 1853.
Eneström, G., 1) Härledning af en formel inom den matematiska statistiken. Stockh. Öfv. XLVIII, 1891.
— 2) Om måttet för dödligheten inom beständ åldersklass. Ibid.
— 3) Ett par formler för beräkning af mortaliteten inom pensionskassor eller andra slutna sällskap. Ibid.
— 4) Om de befolkningsstatistiska formlerna för beräkning af dödligheten under första lefnadsåret. Ibid.
— 5) Om observations seriers utjämming medelst formeln $u'_x = u_x - \frac{3}{35} \Delta^4 u_{x-2}$. Ibid. L, 1893.
Euler, L., 1) Calcul de la Probabilité dans le Jeu de Rencontre. Hist. Ac. Berl. 1753 (p. a. 1751).
— 2) Institutiones calculi differentialis. Petrop., 1755.
— 3) Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. Hist. Ac. Berl. 1767 (p. a. 1760).
— 4) Sur les Rentes Viagères. Ibid.
— 5) Sur l'avantage du Banquier au jeu de Pharaon. Ibid. 1766 (p. a. 1764).
— 6) Sur la probabilité des séquences dans la Loterie Génoise. Ibid. 1767 (p. a. 1765).
— 7) Solution d'une question très difficile dans le Calcul des Probabilités. Ibid. 1771 (p. a. 1769).

Euler, L., 8) Solutio quarundam quaestionum difficiliorum in calculo probabilium. Opusc. analyt. II, 1785.
— 9) Solutio quaestionis ad calculum probabilitatis pertinentis: Quantum duo conjuges persolvere debeant, ut suis haeredibus post utriusque mortem certa argenti summa persolvatur. Ibid.
Faà de Bruno, F., 1) Traité élémentaire du calcul des erreurs. Paris, 1869.
Faye, H. E., 1) Note accompagnant la présentation d'une notice autographiée sur la méthode des moindres carrés. Compt. rend. LXXX, 1875.
— 2) Sur certains points de la théorie des erreurs accidentelles. Compt. rend. CVI, 1888.
Fechner, G. Th., 1) Über die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers eines Beobachtungsmittels durch die Summe der einfachen Abweichungen. Pogg. A. (Jubelbd.) 1874.
— 2) Über den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung. Leipz. Ber. XI, 1874.
Fermat, P., 1) Varia opera mathematica. Tolosae, 1679.
Ferrero, A., 1) Espositione del metodo dei minimi quadrati. Firenze, 1876.
Fick, A., 1) Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeiten. Würzburg, 1883.
Fischer, Ph., 1) Lehrbuch der höheren Geodäsie. I. Abschn.: Die Theorie der Beobachtungsfehler und ihre Ausgleichung durch die Methode der kleinsten Quadrate. Giessen, 1846.
— 2) Grundzüge des auf menschliche Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens. Oppenheim a. Rh., 1860.
Foerster, W., 1) Wahrheit und Wahrscheinlichkeit. Berlin, 1875.
Forest, E. L. de, 1) On an unsymmetrical probability curve. Analyst IX—X, 1882—83.
Forsyth, A. R., 1) On an approximate expression for $x!$. Brit. Ass. Rep. 1883.
Fourier, J. B. J., 1) Sur les sciences d'observation. Bull. sc. math. II, 1824.
Freeden, W., 1) Die Praxis der Methode der kleinsten Quadrate. I (unvollendet). Braunschweig, 1863.
Fries, J. F., 1) Versuch einer Kritik der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Braunschweig, 1842.
Frisiani, P., 1) Sulla più vantaggiosa combinazione delle osservazioni. Rend. Lomb. II, 1865.
Galilei, G., 1) Considerazione sopra il giuoco dei dadi. Werke III, Firenze, 1718.
Galloway, Th., 1) A Treatise on Probability. Edinburgh, 1839.
— 2) On the Application of the Method of Least Squares to the Determination of the most probable Errors of Observations in a Portion of the Ordnance Survey of England. Mem. R. Astr. S. XV, 1846.
Gauss, C. F., 1) Theoria motus corporum coelestium. Hamburg, 1809.
— 2) Disquisitio de elementis ellipticis Palladis. Comm. Goett. I, 1810.
— 3) Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. Ztschr. f. Astr. I, 1816.
— 4) Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine Aufgabe der praktischen Geometrie. Astr. N. I, 1823.
— 5) Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Comm. Goett. I, 1821—1826.
— 6) Méthode des moindres carrés, traduit par J. Bertrand. Paris, 1855.

Gauss, C. F., 7) Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate. In deutscher Sprache herausgegeben von A. Börsch u. P. Simon. Berlin, 1887.

— 8) Chronometrische Längenbestimmungen. Astr. N. V, 1827.

Gavarret, 1) Principes généraux de statistique médicale. Paris, 1840.

Geer, P. van, 1) Over het gebruick van determinanter by te methode der kleinste kwadrater. Nieuw Arch. I, 1875. (Ins Franz. übertr. und fortges. im Arch. Néerl. XII, 1877 u. XVIII, 1883.)

Gerling, Ch. L., 1) Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie oder die Methode der kleinsten Quadrate. Hamburg, 1843.

— 2) Nachträge zur Ausgleichungsrechnung. Grun. Arch. VI, 1845; XXV, 1856; XXXVIII, 1862.

Glaisher, J. W. L., 1) Remarks on certain portions of Laplace's proof of the method of least squares. Phil. Mag. XLIII, 1872.

— 2) On the law of facility of errors of observations and on the method of least squares. Mem. R. Astr. S. XXXIX, 1872.

— 3) On the rejection of discordant observations. Monthl. Not. XXXIII, 1873.

— 4) On the solution of the equations in the method of least squares. Monthl. Not. XXXIV, 1874.

— 5) On the method of least squares. Ibid. XL, XLI, 1880.

Goldschmidt, L., 1) Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Versuch einer Kritik. Hamburg u. Leipzig, 1897.

Gompertz, B., 1) On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of Life Contingencies. Lond. Trans. (part II) 1825.

Gosiewski, W., 1) Über das Gesetz der Wahrscheinlichkeit des Systems von Fehlern, die als von einander abhängige Ereignisse betrachtet werden (polnisch). Prace mat.-fiz. III, 1892.

— 2) Über die Methode der kleinsten Quadrate (polnisch). Ibid. V, 1894.

Gouraud, Ch., 1) Histoire du Calcul des Probabilités depuis ses origines jusqu'à nos jours. Paris, 1848.

Gram, J. P., 1) Om Raekkendviklinger, bestemte ved Hjaelp af de mindste Kvadraters Methode. Kjobenhavn, 1879.

— 2) Über die Entwicklung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate. Crelle J. XCIV, 1883.

— 3) Om Udjevning ad Dödelighedsiagttagelser og Oppermanns Dödelighedsformel. Zeuth. Tidsskr. (5) II, 1884.

Graunt, J., 1) Natural and political observations ... made upon the bills of mortality. London, 1662.

Grunert, J. A., 1) Berechnung der wahrscheinlichsten Resultate aus gegebenen Beobachtungen. Klügel Math. Wb. V, 1831.

Guarducci, F., 1) Gli errori di chiusura dei triangoli della triangolazione catastale modenese posti a confronto colla legge di Gauss. Riv. di Topogr. e Cat. 1889.

Guibert, A., 1) Solution d'une question relative à la Probabilité des Jugements rendus à une majorité quelconque. Liouv. J. (1) III, 1838.

Guyon, E., 1) Note relative à l'expression de l'erreur probable d'un système d'observations. Compt. rend. CVI, 1888.

Hagen, G., 1) Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin, 1837 (1867, 1882).

Halley, 1) An estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives. Lond. Philos. Trans. XVII, 1693.

Hansen, P. A., 1) Commentatio de gradus praecisionis computatione. (Festschrift der Sternwarte Seeberg zu Olbers' 50-jährigem Doctorjubiläum.) Gotha, 1830.

— 2) Darlegung einer neuen Methode, bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate die Gewichte der unbekannten Gröfsen zu berechnen. Astr. N. VIII, 1831.

— 3) Über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf geodätische Vermessungen im allgemeinen und über die Maupertuis'sche Gradmessung. Ibid. IX, 1831.

— 4) Auflösung einer allgemeinen Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ibid. XVI, 1839.

— 5) Allgemeine Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. Leipz. Abh. I, 1852.

— 6) Über die Methode der kleinsten Quadrate im allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. Ibid. VIII, 1867.

— 7) Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. Ibid. IX, 1868.

Hartner, F., 1) Handbuch der niederen Geodäsie. Wien, 1850 (6. Aufl. 1885).

Hattendorff, K., 1) Über die Ermittlung des Sterblichkeitsgesetzes aus gegebenen Beobachtungen. Gött. Nachr. 1871.

Hauber, C. F., 1) Über die Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. Baumgartner's Ztschr. VII, 1830.

— 2) Theorie der mittleren Werthe. Ibid. VIII, 1830.

Hausdorff, F., 1) Das Risico bei Zufallspielen. Leipz. Ber. 1897.

Hays, du, 1) Du jeu de loto. Liouv. J. (1) VII, 1842.

Helm, G., 1) Eine Anwendung der Theorie des Tauschwertes auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ztschr. f. M. u. Ph. XXXVIII, 1893.

Helmert, F. R., 1) Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie und die Theorie der Mefsinstrumente. Leipzig, 1872.

— 2) Über die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit im Zusammenhange stehende Fragen. Ztschr. f. M. u. Ph. XXI, 1876.

— 3) Über die Formeln für den Durchschnittsfehler. Astr. N. LXXXV, 1875.

— 4) Die Genauigkeit der Formel von Peters zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit. Ibid. LXXXVIII, 1876.

— 5) Zur Bestimmung des Gewichts von Beobachtungen, deren mittleres Fehlerquadrat sich aus mehreren Theilen zusammensetzt. Ibid. LXXXIX, 1877.

— 6) Die Bestimmung des Fehlergesetzes aus Beobachtungen auf graphischem Wege. Ztschr. f. Verm.-W. VI, 1877.

— 7) Über den Maximalfehler einer Beobachtung. Ibid. VI, 1877.

— 8) Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höheren Geodäsie. Ztschr. f. M. u. Ph. XIII, 1868.

Henke, R., 1) Über die Methode d. kleinsten Quadrate. Lpzg., 1868 (2. Aufl. 1894).
Herschell, W., 1) Quetelet's on probabilities. Edinb. Rev. 1850.
Hofmann, F., 1) Notiz über zwei Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ztschr. f. M. u. Ph. XXXIII, 1888.
Hoppe, R., 1) Eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe. Grun. Arch. LXI, 1877.
— 2) Wahrscheinlicher Grad der Homogeneität einer Mischung. Ibid. LXVII, 1882.
Hossard, P., 1) Note sur la méthode des moindres carrés. Nouv. Ann. M. X, 1851.
Hülsse, J., 1) Über die Berechnung von Beobachtungen durch die Methode der kleinsten Quadratsumme. Leipzig, 1841.
Huygens, Ch., 1) De Ratiociniis in Ludo Aleae (als Anhang zu Francisci à Schooten Exercitationum Mathematicarum Libri quinque). Lugdunum Bat., 1657. Auch als Artis conjectandi pars prima (cum annotationibus Jacobi Bernoulli). Basileae, 1713. Ins Französische übertragen unter dem Titel: L'Art de conjecturer, par L. G. F. Vastel. Caen, 1801.
Ivory, J., 1) On the method of least squares. Phil. Mag. LXV—LXVI, 1825—1826.
Jacobi, K. G. J., 1) Über eine neue Auflösungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden lineären Gleichungen. Astr. N. XXII, 1845.
Jahn, G. A., 1) Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf das wissenschaftliche und praktische Leben. Leipzig, 1839.
Janse, J. P., 1) Over de constructie en afronding van sterfte-tafels. (Diss.) Amsterdam, 1885.
Jevons, W. St., 1) The Principles of Science. London, 1887.
Johnson, W. W., 1) On Peters' formula for probable error. Newyork M. S. Bull. II, 1892.
Jordan, W., 1) Über die Bestimmung der Genauigkeit mehrfach wiederholter Beobachtungen einer Unbekannten. Astron. N. LXXIV, 1869.
— 2) Über die Bestimmung des mittleren Fehlers durch Wiederholung der Beobachtungen. Astron. N. LXXIX, 1872.
— 3) Taschenbuch der praktischen Geometrie. Stuttgart, 1873.
— 4) Handbuch der Vermessungskunde. Stuttgart, 1877 (1888, 1895).
— 5) Über den Maximalfehler einer Beobachtung. Ztschr. f. Verm.-W. VI, 1877.
— 6) Bestimmung eines Maximalfehlers. Ibid. XIX, 1890.
— 7) Über die Bedeutung und die Anwendbarkeit der Methode der kleinsten Quadrate in der Feld- und Landmessung. Ibid. XXI, 1892.
Jullien, M., 1) Sur la probabilité des erreurs dans la somme ou dans la moyenne de plusieurs observations. Ann. d. Mat. pura ed appl. I, 1858.
Kämpfe, B., 1) Tafel des Integrals $\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt$. Wundt, Phil Stud. IX, 1893.
Kanner, M., 1) Allgemeine Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fragen der Statistik. Ann. d. ges. Versich.-W. I, 1870.
— 2) Analytische Theorie der Ausgleichung von Sterblichkeitstafeln. J. d. Coll. f. Lebensvers.-W. Berlin, 1871.

Karup, J., 1) Die Ausgleichung der Sterblichkeitserfahrungen der Gothaer Bank nach der Gompertz-Makeham'schen Sterblichkeitsformel. Rundsch. d. Versich. XXXIV, 1884.

Karup, W., 1) Theoretisches Handbuch d. Lebensversicherung. Leipzig, 1871.

Kleiber, J. A., 1) Theorie der Ausgleichung d. Beobachtungsreihen (russisch). Kasan Ges. VI, VIII, 1889, 1890.

Klingatsch, A., 1) Die graphische Ausgleichung bei der trigonometrischen Punktbestimmung durch Einschneiden. Wien, 1894.

Kloock, H., 1) Die Unhaltbarkeit der sogenannten Methode der kleinsten Quadrate und die Neugestaltung der endgültigen Bahnbestimmungen der Sterne. Bonn, 1893.

Knapp, G. F., 1) Ermittlung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungsstatistik. Leipzig, 1868.

— 2) Theorie des Bevölkerungswechsels. Braunschweig, 1874.

— 3) Sterblichkeit in Sachsen. Leipzig, 1869.

Koll, O., 1) Die Theorie der Beobachtungsfehler u. die Methode der kleinsten Quadrate mit ihrer Anwendung auf die Geodäsie und die Wassermessungen. Berlin, 1893.

Koppe, C., 1) Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate in der praktischen Geometrie. Nordhausen, 1885.

Kramp, Ch., 1) Théorie des réfractions astronomiques et terrestres. Strassburg u. Leipzig, 1798.

Kries, J. v., 1) Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine logische Untersuchung. Freiburg, 1886.

Krüger, L., 1) Über einen Satz d. Theoria Combinationis. Gött. Nachr. 1897.

Küttner, W., 1) Zur mathematischen Statistik. Ztschr. f. M. u. Ph. XXV, 1880.

— 2) Zur mathematischen Statistik. Ibid. XXVI, 1881.

— 3) Einführung unvollständiger Beobachtungen in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ibid. XXIX, 1884.

— 4) Über die Ermittelung der Sterblichkeit, Invalidität u. s. w. bei Gesammtheiten mit ein- und austretenden Personen. Ibid. XXXVIII, 1893.

Kummell, C. H., 1) On the composition of errors from single causes of error. Astr. N. CIII, 1882.

Kunzek, A., 1) Studien aus der höheren Physik. Wien, 1856.

Lacroix, S. F., 1) Traité élémentaire du Calcul des probabilités. Paris, 1806. (Deutsch von E. S. Unger, Erfurt, 1818.)

Lagrange, J., 1) L'intégration d'une équation différentielle à différence finie qui contient la théorie des suites recurrentes. Misc. Taur. I, 1759.

— 2) Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations; dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités; et où l'on résoud différens problèmes relatifs à cette matière. Ibid. V, 1770—1773.

— 3) Recherches sur les suites recurrentes dont les termes varient de plusieurs manières différentes, ou sur l'intégration des équations linéaires au différences finies et partielles; et sur l'usage de ces équations dans la théorie des hasards. Nouv. Mém. Ac. Berl. 1777.

— 4) Mémoire sur une question concernant les annuités. Mém. Ac. Berl. 1798.

Lalanne, L., 1) Un million de faits. Paris, 1843.
— 2) De l'emploi de la géométrie pour résoudre certaines questions de moyennes et de probabilités. Liouv. J. (3) V, 1879.
Lambert, J. H., 1) Examen d'une espèce de superstition ramenée au calcul des probabilités. Nouv. Mém. Berl. 1798.
— 2) Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche. (Beyträge zum Gebrauch der Mathematik.) Berlin, 1765.
Lamé, G., 1) Note sur les chances du brelan au jeu de la bouillotte. Compt. rend. XXVIII, 1849.
Lampe, E., 1) Über eine Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Grun. Arch. LXX, 1884.
Landré, C. L., 1) De middelbare fout bij waarnemingen ter bepaling van meer dan een onbekende. Nieuw Arch. X, 1883.
— 2) Wiskundige hoofdstukken voor levensverzekering. Utrecht, 1893. (Deutsche Übersetzung, Jena, 1895.)
Laplace, P. S. de, 1) Mémoire sur les suites récurro-récurrentes et sur leurs usages dans la théorie des hasards. Mém. div. Sav. VI, 1774.
— 2) Mémoire sur la probabilité des causes par les évènemens. Ibid.
— 3) Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies, et sur leur usage dans la théorie des hasards. Ibid. 1776.
— 4) Mémoire sur l'inclinaison moyenne des orbites des comètes etc. Ibid.
— 5) Mémoire sur les probabilités. Hist. Ac. Par. 1781.
— 6) Mémoire sur les suites. Ibid. 1782.
— 7) Sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres. Ibid. 1785.
— 8) Suite du Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres. Ibid. 1786.
— 9[a]) Sur les naissances, les mariages et les morts à Paris. Ibid.
— 9[b]) Sur les dégrés mésurés des méridiens et sur les longueurs observées du pendule. Ibid. 1789.
— 10) Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres, et sur leur application aux probabilités. Mém. de l'Inst. 1810.
— 11) Mémoire sur les intégrales définies, et leur application aux probabilités, et spécialement à la recherche du milieu qu'il faut choisir entre les résultats des observations. Ibid. 1811.
— 12) Leçons de Mathématiques données à l'école normale en 1795. Journ. de l'Éc. polyt. c. VII—VIII, 1812.
— 13) Théorie analytique des probabilités. Paris 1812 (1814, 1820). Nation. édit. t. VII, 1886.
— 14) Essai philosophique des probabilités. Als Introduction zu 13) von der 2. Auflage an. Deutsch von Tönnies, Heidelberg, 1819 und von N. Schwaiger, Leipzig, 1886.
— 15) Sur les comètes. Conn. de T. 1816.
— 16) Sur l'application du calcul des probabilités à la philosophie naturelle. Ibid. 1818. [Auch als I. Supplém. zur 3. Aufl. von 13).]
— 17) Sur le calcul des probabilités appliqué à la philosophie naturelle. Ibid. [wie bei 16)].
— 18) Application du calcul des probabilités aux opérations géodésiques. Ibid. 1820. [Auch als II. Supplém. zur 3. Aufl. von 13).]

Laplace, P. S. de, 19) Application du calcul des probabilités aux opérations géodésiques de la méridienne de France. Ibid. 1822. [Auch als III. Supplém. zur 3. Aufl. von 13)].

Laquière, E., 1) Démonstrations élémentaires de lois fondamentales des écarts dans les méthodes expérimentales. Bull. Soc. M. de Fr. IX, 1881.

Laurent, H., 1) Traité du calcul des probabilités. Paris, 1873.

— 2) Sur la méthode des moindres carrés. Liouv. J. (3) I, 1875.

Lazarus, W., 1) Die Bestimmung und Ausgleichung der aus Beobachtungen abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten. Hamb. math. G. 1878.

— 2) Zur deutschen Lebensversicherungs-Sterblichkeitstafel. Assec.-Jahrb. 1885.

Legendre, A. M., 1) Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. Paris, 1805—1806.

— 2) Méthode des moindres quarrés, pour trouver le milieu le plus probable entre les résultats de différentes observations. Mém. de l'Inst. 1814.

Lehmann-Filhés, R., 1) Über Ausgleichung abgerundeter Beobachtungen. Astr. N. CXX, 1889.

— 2) Über wahrscheinlichste Fehlervertheilungen. Astr. N. CXXVII, 1891.

Leibniz, G. W., 1) Dissertatio de Arte Combinatoria. 1666. (Gerhardt's Ausg. d. Werke, 2. Abth., 5. Bd.)

Lexis, W., 1) Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik. Strassburg, 1875.

— 2) Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Jahrb. f. Nationalök. u. Statist. 27, 1876.

— 3) Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft. Freiburg, 1877.

Liagre, J. B. J., 1) Calcul des probabilités et théorie des erreurs avec des applications aux sciences d'observation en général et à la géodésie en particulier. Bruxelles et Paris, 1852 (IIème éd. par C. Peny, 1879).

Liebermeister, C., 1) Über Wahrscheinlichkeitsrechnung in Anwendung auf therapeutische Statistik. Klin. Vortr. 1877.

Lipschitz, R., 1) Sur la combinaison des observations. Compt. rend. CXI, 1890.

Littrow, J. J., 1) Die Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf das wissenschaftliche und praktische Leben. Wien, 1833.

— 2) Über Lebensversicherungen und andere Versorgungsanstalten. Wien, 1832.

Lobatschewsky, N. J., 1) Probabilité des résultats moyens tirés d'observations répétées. Liouv. J. XXIV, 1842.

Lotze, R. H., 1) Logik. Leipzig, 1843.

Lubbock, J. W. and Drinkwater, 1) Treatise on Probability.

Lüroth, J., 1) Bemerkung über die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers. Astr. N. LXXIII, 1869.

— 2) Vergleichung von zwei Werten des wahrscheinlichen Fehlers. Ibid. LXXXVII, 1875.

— 3) Ein Problem der Fehlertheorie. Ztschr. f. Verm.-W. IX, 1880.

Maclaurin, C., 1) Treatise of Fluxions. Edinburgh, 1742.

Mairan, J. J., 1) Sur le Jeu de Pair ou Non. Hist. Ac. Par. 1728.

Malfatti, G. F., 1) Esame Critico di un Problema di probabilitá del Sig. Daniele Bernoulli, e soluzione d'un altro Problema analogo al Bernulliano. Mem. di Mat. e Fis. della Soc. Ital. I, 1782.

Mansion, P., 1) Sur le problème des partis. Mém. de Belg. XXI, 1870.
— 2) Note sur la méthode des moindres carrés. Belg. Bull. (3) IX, 1884.
— 3) Sur la loi des grands nombres de Poisson. Messeng. of Math. XXII, 1892.
Markoff, A., 1) Das Gesetz der grofsen Zahlen und die Methode der kleinsten Quadrate (russisch). Phys.-math. Ges. Kasan VIII, 1898.
Matzka, W., 1) Beweis des obersten Grundsatzes der Methode der kleinsten Quadrate. Grun. Arch. XI, 1848.
Mayr, G. v., 1) Bevölkerungsstatistik. (Handbuch d. öffentl. Rechts. VI. Abth.) Freiburg i. B., 1897.
Mees, R. A., 1) Über die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers einer endlichen Zahl von Beobachtungen. Ztschr. f. M. u. Ph. XX, 1875.
Mehmke, R., 1) Über das Seidel'sche Verfahren, um lineare Gleichungen bei einer sehr grofsen Anzahl der Unbekannten durch successive Annäherung aufzulösen. Mosk. Math. Samml. XVI, 1892.
— 2) und Nekrassoff, P. A., Auflösung eines linearen Systems von Gleichungen durch successive Annäherung. Ibid.
Meinong, A., 1) Anzeige v. Kries' „Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung". Gött. gel. A. 1890.
Merkel, J., 1) Theoretische und experimentelle Begründung der Fehlermethoden. Wundt, Phil. Stud. VII, 1892.
Merrifield, C. W., 1) Considerations respecting the translation of series of observations into continuous formulae. Proc. Lond. Soc. Math. XII, 1881.
Merriman, M., 1) On the history of the method of least squares. Analyst IV, 1877.
— 2) A list of writings relating to the method of least squares, with historical and critical notes. Connect. Trans. IV, 1877.
Meyer, A. et Folie, F., 1) Cours de calcul des probabilités fait à l'université de Liège de 1849 à 1857. Bruxelles, 1874. (Deutsch bearb. von E. Czuber, Leipzig, 1879.)
Meyer, J. H., 1) Allgemeine Anleitung zur Berechnung der Leibrenten u. Anwartschaften. Kopenhagen, 1822—1823.
Michell, J., 1) An Inquiry into the probable Parallax and Magnitude of the fixed Stars, from the Quantity of Light which they afford us, and the particular Circumstances of their Situation. Lond. Trans. LVII, 1767.
Mill, J. St., 1) System der deductiven und inductiven Logik. Deutsche Übersetzung von Schiel, Braunschweig, 1862—63.
Moivre, A. de, 1) De Mensura Sortis, seu, de Probabilitate Eventuum in Ludi a Casu Fortuito Pendentibus. Lond. Trans. XXVII, 1711.
— 2) The Doctrine of Chances; or, a Method of Calculating the Probabilities of Events in Play. London, 1718 (1738, 1756).
— 3) Treatise of Annuities upon Lives. London, 1724.
— 4) Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis. London, 1730.
Monro, C. J., 1) Note on the inversion of Bernoulli's theorem in probabilities. Proc. of Lond. Math. Soc. V, 1874.
Montmort, P. de, 1) Essai d'Analyse sur les Jeux de Hasards. Paris, 1708 (1714).
Morgan, A. de, 1) Essay on probabilities. London, 1838.
— 2) Theory of probabilities. Encycl. Metrop. II, 1845.

Morgan, A. de, 3) On the theory of the errors of observations. Cambr. Trans. X, 1864.

Moser, L., 1) Die Gesetze der Lebensdauer. Berlin, 1839.

Natani, L., 1) Methode der kleinsten Quadrate. Berlin, 1875.

Navier-Wittstein, Th., 1) Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. II. Bd. Hannover, 1849.

Nekrassoff, P. A., 1) Die Bestimmung der Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate bei einer sehr grofsen Anzahl der Unbekannten. Mosk. Math. Samml. XII, 1884.

Nicole, F., 1) Examen et résolution de quelques questions sur les jeux. Hist. Ac. Par. 1730.

Nitsche, A., 1) Die Dimensionen der Wahrscheinlichkeit und die Evidenz der Ungewissheit. Vierteljs. für wissensch. Philos. XVI, 1892.

Ocagne, M. d', 1) Sur la composition des lois d'erreurs de situation d'un point. Compt. rend. CXVIII, 1894.

Öttinger, L., 1) Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Grun. Arch. I, 1841.

— 2) Die Wahrscheinlichkeitslehre. Berlin, 1852. [Auch in Crelle J. XXVI, XXX, XXXIV u. XXXVI u. d. Titel: Untersuchungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung.]

Pascal, B., 1) Oeuvres de — par Bossut, vol. I—IV. La Haye et Paris, 1779.

— 2) Traité du triangle arithmétique (1654). Jbid., vol. V.

Pearson, K., 1) Contribution to the mathematical theory of evolution. Lond. Trans. CLXXXVI, 1895.

Peirce, B., 1) Criterion for the rejection of doubtful observations. Gould Astr. J. II, 1852.

Peirce, C. S., 1) On the theory of errors of observations. Rep. of the U. S. Coast and Geod. Survey 1870.

Perozzo, L., 1) Neue Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Statistik. Aus dem Ital. übersetzt von O. Elb. Dresden, 1883.

Pesch, A. J. van, 1) Sterfte-tafels voor Nederland afgeleid uit de waarnemingen over het tijdvak 1870—1880. Haarlem, 1885.

Peters, C. A. F., 1) Über die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers einer Beobachtung aus den Abweichungen der Beobachtungen von ihrem arithmetischen Mittel. Astr. N. XLIV, 1856.

Piper, C., 1) Ein mathematischer Beweis der Unsterblichkeit des Menschen. Lemgo, 1888.

Pizzetti, P., 1) Alcune ricerche sulla probabilitá a priori degli errori d'observazione. Battagl. J. XXVII, 1889.

— 2) Sopra il calcolo dell' errore medio di un sistema di osservazioni. Rom. Rend. V, 1889.

— 3) Sopra una generalizzazione del principio della media aritmetica. Ibid.

— 4) Sur la théorie des observations arrondies. Astr. N. CXXIV, 1890.

— 5) La legge di probabilitá degli errori d'osservazione. Rom. Rend. 1892.

— 6) I fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali. Atti d'Univ. Genova 1892.

Plana, G., 1) Mémoire sur divers problèmes de probabilité. Mém. Ac. Tur. 1811—1812.

Poincaré, H., 1) Calcul des probabilités. Paris, 1896.

Poisson, S. D., 1) Mémoire sur la proportion des naissances des deux sexes. Mém. de l'Inst. IX, 1830.
— 2) Sur la probabilité des résultats moyens des observations. Connais. des Tems. 1827, 1832. [In der deutschen Übersetzung von 8) als Anhang.]
— 3) Recherches sur la probabilité des jugemens, principalement en matière criminelle. Compt. rend. I, 1835.
— 4) Note sur la loi des grands nombres. Ibid. II, 1836.
— 5) Note sur le calcul des probabilités. Ibid.
— 6) Formules relatives aux probabilités qui dépendent de très-grands nombres. Ibid.
— 7) Solution d'un problème de probabilité. Liouv. J. (1) II, 1737.
— 8) Recherches sur la probabilité des jugemens en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités. Paris, 1837. Deutsch von H. Schnuse, Braunschweig, 1841.
Prevost, P. et Lhuilier, S. A., 1) Sur les probabilités. Mém. Ac. Berl. 1799.
— 2) Sur l'art d'estimer la probabilité des causes par les effets. Ibid.
— 3) Remarques sur l'utilité et l'étendue du principe par lequel on estime la probabilité des causes. Ibid.
— 4) Mémoire sur l'application du calcul des probabilités à la valeur du témoignage. Ibid. 1800.
Pucci, E., 1) Fondamenti di Geodesia. Milano, 1882—1885.
— 2) Sul modo di ricavare la vera espressione delle leggi della natura dalle curve empiriche. Mem. Ac. Linc. 1890.
Puller, 1) Eine graphische Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen für zwei Unbekannte. Ztschr. f. Verm.-W. XXIV, 1895.
Quetelet, A. et Smits, E., 1) Recherches sur la reproduction et la mortalité de l'homme aux différens âges et sur la population de la Belgique. Bruxelles, 1832.
— 2) Lettres sur la théorie des probabilités appliquée aux sciences morales et politiques. Bruxelles, 1846.
Rebstein, J., 1) Über die Berechnung der Präcision einer Beobachtung. Frauenfeld, 1873.
Reuschle, C. G., 1) Über die Deduction der Methode der kleinsten Quadrate aus Begriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Crelle J. XXVI, 1843. Zusätze hierzu ibid. XXVII, 1844.
Ritter, E., 1) Manuel théorique et pratique de l'application de la méthode des moindres carrés aux calcul des observations. Paris, 1853.
Rizzetti, J., 1) Ludorum Scientia, sive Artis conjectandi elementa ad alias applicata. Acta Erud. Suppl. IX, 1729.
Roger, 1) Solution d'un problème de probabilités. Liouv. J. (1) XVII, 1852.
Roghé, E., 1) Geschichte und Kritik der Sterblichkeitsmessung bei Versicherungsanstalten. Suppl. XVIII der Jahrb. f. Nationalök. u. Stat., Jena, 1891.
Santini, G., 1) Compendiata esposizione del modo più vantaggioso di risolvere una serie di equazione lineari, risultanti da operazioni tutte ugualmente probabili. Ist. Ven. XIV, 1870.
Sawitsch, A., 1) Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Berechnung der Beobachtungen und geodätischen Messungen oder die Methode der kleinsten Quadrate. Aus dem Russischen von Lais. Mitau, 1863.

Scheffler, H., 1) Sterblichkeit u. Versicherungswesen. Braunschweig, 1868.

Schiaparelli, J. V., 1) Sul modo di ricavare la vera espressione delle leggi della natura dalle curve empiriche. Effem. astr. Milano 1867.

— 2) Sul principio della media aritmetica nel calcolo dei risultati delle osservazioni. Rend. Ist. Lomb. (2) I, 1868.

— 3) Sur le principe de la moyenne arithmétique. Astr. N. LXXXVII, 1895.

Schols, Ch. M., 1) De interpolatie-formule von Tchebychef volgens de methode der kleinste vierkanten. Versl. en Mededeel. IX, 1875.

— 2) Over de theorie der fouten in de ruimte en in het platte vlak. Verh. v. Amst. XV, 1875.

— 3) Théorie des erreurs dans le plan et dans l'espace. Ann. Delft II, 1886.

— 4) La loi de l'erreur résultante. Ann. Delft III, 1887.

Seeliger, H., 1) Über die Vertheilung der Vorzeichen der nach einer Ausgleichung übrig bleibenden Fehler. Astr. N. XCVI, 1879.

— 2) Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen über die Vertheilung zufälliger Fehler. Ibid. XCVII, 1880.

— 3) Bemerkung über das arithmetische Mittel. Astr. N. CXXXII, 1893.

Seidel, L., 1) Über ein Verfahren, die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineare Gleichungen überhaupt, durch successive Annäherung aufzulösen. Münch. Abh. XI, 1874.

Seydler, 1) Sur le problème du Saint-Pétersbourg. Compt. rend. CX, 1890.

Seyfert, 1) Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsfunction mit Hilfe des Wallis'schen Ausdruckes für die Zahl π. Ztschr. f. Verm.-W. XXIII, 1894.

— 2) Das arithmetische Mittel. Ibid. XXIV, 1895.

Sigwart, Ch., 1) Logik. II. Band. Freiburg i. B., 1893.

Simpson, Th., 1) Treatise on the Nature and Laws of Chance. London, 1740.

— 2) Miscellaneous Tracts on some curious and very interesting Subjects in Mechanics, Physical-Astronomy and Speculative Mathematics. London, 1757.

Sleschinsky, J. W., 1) Zur Theorie der Methode der kleinsten Quadrate (russisch). Odessa Ges. XIV, 1892.

Spitzer, S., 1) Lösung einiger Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Grun. Arch. LXIV, 1879.

Stieda, L., 1) Über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der anthropologischen Statistik (2. Aufl. eines 1882 im Arch. f. Anthrop. erschienenen Aufsatzes). Braunschweig, 1892.

Stirling, J., 1) Methodus differentialis sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitorum. London, 1730.

Stone, E. J., 1) On the rejection of discordant observations. Monthly Not. R. Astr. Soc. XXVIII, XXXIV, XXXV, 1868, 1874, 1875.

— 2) On the most probable result which can be derived from a number of direct determinations of assumed equal values. Ibid. XXXIII, 1873.

— 3) On the most probable result which can be derived from a number of direct determinations with assigned weights. Ibid. XXXVI, 1876.

Stumpf, K., 1) Über den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Ber. bayr. Ak. (phil. Cl.) 1892.

Stumpf, K., 2) Über die Anwendung des mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriffes auf Theile eines Continuums. Ibid.

Süssmilch, J. P., 1) Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechtes. 3 Bde. Berlin, 1788.

Svanberg, G., 1) Dissertation sur la recherche du milieu le plus probable entre les résultats de plusieurs observations ou expériences. Gergonne A. II, 1821.

Sylvester, J. J., 1) On a funicular solution of Buffon's „problem of the needle" in its most general form. Acta math. XIV, 1890.

Tait, P. G., 1) On the law of frequency of errors. Edinb. Trans. XXIV, 1865.

Thiele, T. N., 1) En matematisk Formel for Dödeligheden. Kopenhagen, 1871.

— 2) Foreläsninger over almindelig Jagttagelseslâre: Sandsynlighedsregning og mindste Quadraters Methode. Kopenhagen, 1889.

Tilly, J. M. de, 1) Note sur le principe de la moyenne arithmétique et sur son application à la théorie mathématique des erreurs. Nouv. corresp. math. I, 1875.

— 2) Théorie mathématique des erreurs. Bruxelles, 1875.

Todhunter, J., 1) A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace. Cambr. and London, 1865.

— 2) On the method of least squares. Cambr. Trans. XI (2), 1869.

Trembley, J., 1. Disquisitio Elementaris circa Calculum Probabilium. Comm. Goett. XII, 1796.

— 2) De Probabilitate Causarum ab effectibus oriunda. Ibid. XIII, 1799.

— 3) Recherches sur une question relative au calcul des probabilités. Mém. Ac. Berl. (1794—95) 1799.

— 4) Recherches sur la mortalité de la petite vérole. Ibid. (1796) 1799.

— 5) Observations sur les calculs relatifs à la durée des mariages et au nombre des époux subsistans. Ibid. (1799—1800) 1803.

— 6) Observations sur la méthode de prendre les milieux entre les observations. Ibid (1801) 1804.

Tchebycheff, P. L., 1) Des valeurs moyennes. Liouv. J. (2) XII, 1867.

— 2) Formule d'interpolation par la méthode des moindres carrés. Mém. Sav. Etrang. Ac. Belg. XXI, 1870.

— 3) Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités. Petersb. Abh. LV, 1887. (Aus dem Russischen von J. Lyon, Acta math. XIV, 1891.)

— 4) Sur les fractions continues. Liouv. J. (2) II, 1857.

— 5) Sur une formule d'Analyse. Crelle J. LIII, 1857.

— 6) Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrés. Mém. Ac. Petersb. (7) I, 1859.

Veltmann, W., 1) Bestimmung der Unbekannten einer Ausgleichungsaufgabe mittels der Gauss'schen Transformation der Summe der Fehlerquadrate. Ztschr. f. Verm.-W. XVI, 1887.

— 2) Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach dem Princip symmetrisch berechneter Mittelwerte. Marburg, 1886.

Venn, J., 1) The logic of chance. London, 1876.

Vogler, Ch. A., 1) Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. Braunschweig, 1882.

Vogler, Ch. A., 2) Die Methode der kleinsten Quadratsummen als Bildnerin bestgewählter Mittelwerte. Ztschr. f. Verm.-W. XVI, 1887.

Wagner, K., 1) Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung. Jena, 1898.

Wallis, J., 1) A discours of combinations, alternations, and aliquot parts. (Wallis' Algebra) 1685.

Wappäus, J. E., 1) Allgemeine Bevölkerungsstatistik. Leipzig, 1861.

Watson, J. C., 1) Theorical Astronomy. Cap. VII. Philadelphia, 1869.

Wiener, Ch., 1) Über die möglichst genaue mechanische Rectification eines verzeichneten Curvenbogens, bestimmt auf der Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ztschr. f. M. u. Ph. XVI, 1871.

Winckler, A., 1) Allgemeine Sätze zur Theorie der unregelmässigen Beobachtungsfehler. Wien. Ber. LII, 1866.

Windelband, W., 1) Die Lehren vom Zufall. Berlin, 1870.

Winlock, J., 1) On prof. Airy's objections to Peirce's Criterion. Gould Astr. J. IV, 1856.

Witt, J. de, 1) De vardye van de lif-renten na proportie van de los-renten. La Haye, 1671. (Ins Engl. übersetzt in: Contributions to the history of insurance by F. Hendriks, Assur. Mag. II, 1852.)

Wittstein, Th., 1) Mathematische Statistik und deren Anwendung auf Nationalökonomie und Versicherungswissenschaft. Hannover, 1867.

— 2) Ein Zusatz zur Methode der kleinsten Quadrate. Ztschr. f. M. u. Ph. XXVII, Astr. N. 1882.

— 3) Das mathematische Gesetz der Sterblichkeit. Hannover, 1881 (1883).

— 4) Das mathematische Risiko der Versicherungsgesellschaften sowie aller auf dem Spiele des Zufalls beruhenden Institute. Hannover, 1885.

Wolf, R., 1) Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Mitth. d. Naturf. G. Bern 1849—1851, 1853.

— 2) Zur Lehre der Wahrscheinlichkeit. Ibid. 1852.

— 3) Drei Mittheilungen über neue Würfelversuche. Vierteljs. Naturf. G. Zürich XXVI, XXVII, 1881—1883.

— 4) Neue Serie von Würfelversuchen. Ibid. XXXVIII, 1893.

Woolhouse, W. S., 1) On interpolation, summation and the adjustment of numerical tables. Lond. Assur. Mag. XI, 1864.

Wuich, N., 1) Die Theorie der Wahrscheinlichkeit u. ihre Anwendung auf dem Gebiete des Schiefswesens. Wien, 1877.

Yarochenko, S., 1) Sur la méthode des moindres carrés. Darboux Bull. (2) XVII, 1893.

— 2) Zur Theorie der Methode der kleinsten Quadrate. Denkschr. Univ. Odessa LVIII, 1894.

Young, Th., 1) Remarks on the probability of error in physical observations and on the density of the Earth, especially with regard to the reduction of experiments of the pendulum. Lond. Trans. 1819.

— 2) A formula for expressing the decrement of human life. Ibid. 1826.

Zachariae, G., 1) Laerebog i Theorien om de mindste Quadraters-Methode. Nyborg, 1871.

— 2) De mindste Kvadraters Methode. Kopenhagen, 1887.

Zech, J., 1) Einladung zur akademischen Feier des Geburtsfestes des Königs von Württemberg, nebst einer Abhandlung zur Methode der kleinsten Quadrate. Tübingen, 1857.

Zerr, G. B. M., 1) Solutions of questions in the theory of probability and averages. Educ. Tim. LV, 1891.

Zeuner, G., 1) Abhandlungen aus der mathematischen Statistik. Leipzig, 1869.

Zillmer, A., 1) Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen. Berlin, 1861 (1887).

— 2) Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungs-Gesellschaften. (Anhang zu dem gleichnamigen Werke.) Berlin, 1883.

Zimmermann, H., 1) Über Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältnisse. Berlin, 1886, 1889.

Sach-Register.

(Die beigesetzten Ziffern bezeichnen die Seitenzahl.)

Namen-Register.

(Die beigesetzten Ziffern bezeichnen die Seitenzahl.)


U.C. BERKELEY LIBRARIES
C036561823

